ZFN Zagadnienia Filozoficzne w Nauce

LIII
2013

Copernicus Center

Copernicus Center PRESS

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce

Projekt okładki: *Mariusz Banachowicz*

Adiustacja: *Mirosław Ruszkiewicz*

Projekt typograficzny: *Mirosław Krzyszkowski*

Skład: MELES-DESIGN

ISSN 0867-8286

Nakład: 500 egz.

Wydawca: Copernicus Center Press Sp. z o.o.,
Pl. Szczepański 8, 31-011 Kraków,
tel/fax (+48) 12 430 63 00
e-mail: marketing@ccpress.pl
www.ccpress.pl

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o., Łódź, ul. Senatorska 31

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce

LIII ▪ 2013
numer specjalny
Elementy historii matematyki

Wprowadzenie

W drugiej połowie XIX i na początku XX wieku dzieje matematyki wyraźnie przyspieszyły. Idee, które przez poprzednie lata dojrzewały, znalazły swoją realizację w nowych teoriach. Ich liczba przekraczała znacząco liczbę teorii matematycznych powstałych przez całe wcześniejsze dzieje nauki. W dużej mierze pierwszą połowę XIX wieku można traktować jako okres przygotowawczy. Badanie podstaw analizy matematycznej czy geometrii i arytmetyki oraz próby zdefiniowania wielu ważnych, lecz nieścisłych pojęć używanych w matematyce (np. funkcji, liczby, ciągłości, granicy) doprowadziły do powstania nowych działów matematyki. Takie teorie jak topologia (*analysis situs*), logika matematyczna (logistyka), teoria mnogości, teoria grup, geometrie nieeuklidesowe, teoria funkcji analitycznych czy geometrie niearchimedesowe sięgały najgłębszych podstaw matematyki. Pokazywały też, że nie jest ona jedynie nauką o „kategorii ilości", lecz obejmuje kolejne kategorie i obszary badawcze. Poza tym niektórzy matematycy próbowali dokonać wielkiej syntezy nauk matematycznych, opierając się na starych lub nowych teoriach (C.F. Gauss, B. Bolzano, J.M. Hoene-Wroński, B. Riemann, G. Cantor, G. Frege, D. Hilbert i inni).

Wiek XIX (a szczególnie jego koniec) to również czas ożywienia w polskiej matematyce. Podjętych zostaje wówczas wiele inicjatyw, które doprowadzają do wzrostu zainteresowań matematyką wśród społeczeństwa polskiego oraz dają pewne możliwości zdobywania wiedzy z zakresu matematyki i innych nauk ścisłych. Powstają towarzystwa naukowe (Towarzystwo Naukowe w Krakowie od 1816 roku, Akademia Umiejętności od 1872, Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu działające w latach 1870–1882), fundacje wspierające edukację i badania naukowe (w tym przede wszystkim Kasa Mianowskiego w Warszawie), nowe wydawnictwa naukowe („Rozprawy" oraz „Sprawozdania" Akademii Umiejętności, „Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie", „Pamiętniki Towarzystwa Nauk Ścisłych", „Prace Matematyczno-Fizyczne", „Wiadomości Matematyczne"), podręczniki matematyczne pisane po polsku, tłumaczenia wybitnych prac matematycznych na język polski, powołany zostaje ponadto Uniwersytet Latający, kształcący głównie kobiety (od 1882, w 1905 roku przekształcony w Towarzystwo Kursów Naukowych), a także wiele innych inicjatyw.

Wspomniane wyżej kluczowe dla rozwoju matematyki wydarzenia są w niewielkim stopniu przebadane i opracowane (zwłaszcza jeśli idzie o dzieje matematyki polskiej tego okresu). Niniejszy tom częściowo wypełnia tę lukę. Jest on w pewnym stopniu wynikiem pracy Zespołu Historii Matematyki (i współpracowników), który powstał przy Instytucie Historii Nauki PAN w Warszawie pod koniec 2006 roku z inicjatywy niedawno zmarłej prof. Grażyny Rosińskiej. Przedstawione tutaj prace były referowane i omawiane na seminariach.

Chciałbym zaznaczyć, że pierwsze z takich merytorycznych i oficjalnych spotkań odbyło się 8 marca 2007 roku (wzięli w nim udział Zbigniew Król, Krzysztof Maślanka, Zdzisław Pogoda, Grażyna Rosińska i Wiesław Wójcik), a było poprzedzone wcześniejszymi rozmowami i konsultacjami. Podczas tych seminariów ustalano wspólne zamierzenia i plany badawcze. Do najważniejszych zaliczono badania dziejów matematyki polskiej, szczególnie w okresie rozwoju tzw. polskiej szkoły matematycznej i bezpośrednio przed jej powstaniem. Badania te planowano rozszerzyć o analizę analogicznych okresów w rozwoju matematyki (powstanie matematyki nowożytnej i jej *novum* w stosunku do matematyki starożytnej, matematyka polska w renesansie oraz narodziny matematyki współczesnej).

Kolejne spotkanie miało miejsce 1 czerwca 2007 roku w krakowskim Instytucie Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, a uczestniczył w nim również ks. prof. Michał Heller. W trakcie tego seminarium wywiązała się dyskusja wokół wygłoszonego przeze mnie referatu pt. *Historia matematyki jako nauka – jej specyfika oraz znaczenie dla matematyki oraz dziejów cywilizacji*. W roku akademickim 2007/2008 odbyło się w Krakowie kilka spotkań Zespołu. Gdy 1 październiku 2008 roku z inicjatywy ks. prof. Michała Hellera zostało oficjalnie powołane Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych, członkowie Zespołu utworzyli w ramach Centrum grupę badawczą „Historia matematyki: ludzie – idee – aspekty filozoficzne". Wzmocniły ją tak znaczące osoby, jak m.in. prof. Roman Duda i prof. Andrzej Pelczar.

W czasie comiesięcznych spotkań wygłoszono wiele referatów (ponad 40) i omawiano różnorodne zagadnienia z historii matematyki. Wyniki prezentowano też na konferencjach krajowych i zagranicznych, m.in. w Miesenbach (XI^th^ Austrian Symposion on the History of Mathematics, 22–26 kwietnia 2012) i Manchesterze (24^th^ International Congress of History of Science, Technology and Medicine, 21-–28 lipca 2013).

W prezentowanym tomie cztery artykuły są poświęcone historii matematyki polskiej. Dwa z nich analizują sytuację przed powstaniem polskiej szkoły matematycznej, a dokładniej – dotyczą prac z zakresu równań różniczkowych opublikowanych w „Pamiętniku Akademii Umiejętności w Krakowie" oraz „Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu" (Jan Koroński). Po scharakteryzowaniu obu instytucji i ich wydawnictw przedstawiono i omówiono prace z równań różniczkowych Alojzego Jana Stodółkiewicza, Władysława Zajączkowskiego, Jana Rajewskiego, Wawrzyńca Żmurki, Edwarda Władysława Skiby oraz Yvona Villarceau i Władysława Folkierskiego.

Artykuł piąty bada warszawską szkołę logiczną powstałą w okresie międzywojennym. Lidia Obojska przybliża główne jej idee i pokazuje wkład Stanisława Leśniewskiego w powstanie logiki współczesnej, w tym jego wpływ na innych przedstawicieli szkoły.

Artykuł pierwszy został poświęcony fenomenowi polskiej szkoły matematycznej, który od lat jest przedmiotem zainteresowania historyków matematyki. Ta nagła erupcja twórczej myśli naukowej i osiągnięcie w tak krótkim czasie tak wielu wspaniałych wyników, głównie w zakresie analizy funkcjonalnej, teorii funkcji rzeczywistych, topologii oraz logiki matematycznej, nadal nie przestają zadziwiać. Autor artykułu próbował odnaleźć podstawy oraz inspiracje zarówno filozoficzne, jak i czysto matematyczne tego gwałtownego rozwoju. Wielu z twórców polskiej szkoły matematycznej studiowało w liczących się europejskich centrach naukowych (np. w Paryżu, Monachium, Getyndze) i wprost od największych (Lebesgue, Hilbert) czerpało ożywcze idee. Rozproszeni w wyniku drugiej wojny światowej polscy matematycy stworzyli poza granicami kraju prężne ośrodki matematyczne, dowodząc tym samym siły rodzimej nauki.

Kolejne trzy artykuły badają dokonania trzech wielkich twórców nowych teorii matematyki współczesnej: Gottloba Fregego, Davida Hilberta oraz Giuseppe Veronesego.

Jak wiadomo, Frege jest współtwórcą współczesnej logiki. Kluczowe w jego drodze do logiki były badania podstaw arytmetyki. Gabriela Besler zauważa, że Frege w całej swojej pracy naukowej poszukiwał głównie odpowiedzi na jedno pytanie: „Czym jest liczba?", angażując do tego celu narzędzia filozoficzne, matematyczne i logiczne. Wbrew powszechnie przyjętej opinii, że Frege opracował tylko jedną koncepcję liczby, autorka dowodzi, iż dysponował on sześcioma różniącymi się od siebie definicjami. Te analizy są inspiracją dla pokazania roli, jaką odgrywa historia matematyki w uprawianiu filozofii.

Ważną postacią dla współczesnej matematyki jest włoski uczony Giuseppe Veronese, twórca geometrii niearchimedesowych. W kolejnym artykule Jerzy Dadaczyński przedstawia wydaną w 1891 roku pracę pt. *Fondamenti di geometria a più dimensioni*, w której Veronese wprowadza swoją geometrię. Spotkała się ona z silną krytyką wielu matematyków, w tym szczególnie Giuseppe Peano i Georga Cantora. Autor bada przyczyny tego oporu wobec nowych idei. Sama geometria okazała się jednak niesprzeczna, co udowodnił David Hilbert w swoich *Grundlagen der Geometrie*, wskazując model dla geometrii niearchimedesowej Veronesego. Oznaczało to oczywiście względną niesprzeczność systemu zaproponowanego przez włoskiego matematyka. Ponadto autor pokazuje, że ważne w konstrukcji Veronesego są założenia filozoficzne, co dowodzi poczesnego miejsca filozofii w budowaniu teorii matematycznej.

W artykule Bartosza Brożka i Adama Olszewskiego o podmiocie matematycznym Hilberta autorzy dowodzą obecności w jego filozofii matematyki silnych założeń metafizycznych. Okazuje się, że sam program Hilberta ma podbudowę metafizyczną, w której podmiot matematyczny jest utożsamiany z podmiotem transcendentalnym Kanta. Pokazano to poprzez analizę sporu, jaki powstał między Paulem Gordanem a Hilbertem, dotyczącego wartości przeprowadzonego przez tego ostatniego dowodu twierdzenia o bazie. Dzięki temu widoczne jest jak znaczącą rolę pełnią u Hilberta rozumowania pozasystemowe.

Wiesław Wójcik

Fenomen polskiej szkoły matematycznej a emigracja matematyków polskich w okresie II wojny światowej

Wiesław Wójcik
Instytut Historii Nauki PAN, Warszawa
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych, Kraków

The phenomenon of the Polish School of Mathematics and the emigration of Polish mathematicians during World War II

Abstract

In the paper I try to describe the phenomenon of the Polish School of Mathematics. It requires the presentation and analysis of the many factors that have had an influence on its creation and development. It is impossible to do so in such article yet I try to show, however, its essence and strength through an analysis up until the point that World War II brutally ended its development. I focus on the mathematicians who were forced to emigrate and created important mathematical centres in other countries. Thus, the program and atmosphere of Polish Mathematical School was continued.

Keywords:
Polish School of Mathematics, emigration of Polish mathematicians, Stanisław Ulam, Jan Łukasiewicz, Mark Kac, Jerzy Neyman, Antoni Zygmund, Otto Nikodym, Samuel Eilenberg, Alfred Tarski

Wstęp

Opisanie fenomenu polskiej szkoły matematycznej wymaga przedstawienia i analizy wielu czynników, które wpłynęły na jej powstanie i rozwój. Nie jest to możliwe w tak krótkim opracowaniu, spróbuję jednak ukazać jej istotę i siłę poprzez omówienie tego momentu, gdy jej rozkwit został brutalnie przerwany przez II wojnę światową. Skoncentruję się na tych wychowankach szkoły, którzy zmuszeni do emigracji stworzyli w innych krajach ważne ośrodki matematyczne. Poprzez owe ośrodki szkoła ta dalej realizowała swój program badawczy nakreślony przez jej założycieli: Zygmunta Janiszewskiego, Stefana Mazurkiewicza, Wacława Sierpińskiego, Jana Łukasiewicza, Hugona Steinhausa, Stefana Banacha, Jana Śleszyńskiego, Stanisława Zarembę i innych.

Przed powstaniem polskiej szkoły matematycznej

Druga połowa XIX i początek XX wieku to czas wzmożonej aktywności naukowej Polaków. Z jednej strony jest ona efektem wprowadzania w życie idei pozytywizmu (budowanie od podstaw substancji narodu nie może się wszak zrealizować bez rozwoju nauki polskiej), z drugiej zaś stanowi pokłosie romantyzmu, który pobudzał wiarę w nieograniczone możliwości ducha polskiego. Ta aktywność zaowocowała powstaniem polskiej szkoły matematycznej, której intensywny rozkwit nastąpił w okresie międzywojennym.

Trudnym do zrozumienia fenomenem jest to, że wyodrębnienie się owej szkoły naukowej nie było zwieńczeniem długiego procesu dziejów matematyki polskiej. Nie mieliśmy do czynienia ze stopniowo narastającym potencjałem intelektualnym i dojrzewaniem idei. Wydaje się, jakby nagle, z niemal zupełnej próżni wyłoniło się silne, dojrzałe środowisko matematyczne.

Taki pogląd byłby jednak zbyt daleko idącym uproszczeniem. Powstanie tej szkoły poprzedzało bowiem wiele ważnych wydarzeń i inicjatyw, które miały znaczenie nie tylko dla matematyki, ale i dla całej polskiej kultury.

Myślę, że kluczowa wśród tych wydarzeń była aktywność naukowa Józefa Hoene-Wrońskiego (1776–1853) – polskiego matematyka i filozofa, który główne pomysły w zakresie matematyki ogłosił sto lat przed zainaugurowaniem polskiej szkoły matematycznej (w latach 1810–1819[1]). Jego wszechstronne

[1] Były to następujące pozycje: *Premier principe des méthodes analityques comme base de la technie mathématique* (1810), *Introduction à la philosophie des mathématiques et technie d'algorithmie* (1811), *Résolution générale des équations de tous les dégrès* (1812),

zainteresowania i osiągnięcia naukowe oraz koncepcja mesjanizmu oddziaływały mocno na polskie środowisko emigracyjne (Wroński bowiem pracował i zmarł w Paryżu).

Zasadniczo był samoukiem (poza uczęszczaniem w latach 1786–1790 do Szkoły Wydziałowej w Poznaniu). Podstawą jego wiedzy były wykłady wybranych filozofów i matematyków, na które uczęszczał pod koniec lat dziewięćdziesiątych XVIII wieku (po opuszczeniu służby wojskowej) oraz lektura najwybitniejszych dzieł. Nie wiadomo, w jakich wykładach Wroński uczestniczył, jak również jakie to były uczelnie. Nigdy też sam o tym nie wspomina. Na podstawie jego wspomnień i notatek zawartych w rękopisach wiadomo, że fascynował się filozofią Kanta, Fichtego, Schellinga oraz dziełami Lagrange'a, Laplace'a i Lalanda. Ponadto znał kilkanaście języków (w tym hebrajski, grekę i łacinę), dzięki czemu mógł sięgać bezpośrednio do prac źródłowych, ważnych w dziejach nauki. Budowana przez niego nauka nawiązuje do matematyki antycznej, scholastycznej oraz do matematyków i filozofów nowożytnych i współczesnych (Kartezjusza, Leibniza, Kanta oraz Fichtego i Schellinga). Gdyby nie ogrom pozostawionego przez niego dzieła, można by podejrzewać, że był postacią fikcyjną, jakąś zbiorową narodową halucynacją wywołaną upadkiem państwowości polskiej oraz dążeniem do odzyskania utraconej godności i poczucia warto-

---

Philosophie de la technie algorithmique (trzy tomy – 1815, 1816, 1817), *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques* (1812), *Philosophie de l'infini* (1814), *Critique de la théorie des fonctions génératices de M. Laplace* (1819).

ści. Samuel Dickstein, autor biografii polskiego matematyka i filozofa, zauważa, że „Wroński-myśliciel zjawia się niemal nagle, jakby Minerwa z głowy Jowisza, zbrojny w potęgę wiedzy wszechstronnej"[2].

Przed Wrońskim w dziejach matematyki polskiej było tylko kilku wybitniejszych matematyków: poczynając od Witelona w XIII wieku, poprzez Mikołaja Kopernika, Jana Brożka, Adama Kochańskiego do Jana Śniadeckiego. Natomiast po śmierci Wrońskiego mamy wyraźne ożywienie naukowe wśród Polaków. Oczywiście nie jest on jedyną przyczyną tego stanu, nie można jednak nie zauważyć, że odwaga rozwijania najtrudniejszych zagadnień naukowych miała swoje źródło między innymi w potężnym rozmachu twórczym Hoene-Wrońskiego. Kiedy po jego śmierci przybrana córka Batylda Conseillant i przyjaciel Leonard Niedźwiecki podjęli próbę wydania jego dzieł wszystkich, to z powodu ich ogromu przedsięwzięcie nie zostało zrealizowane. Zebrane rękopisy liczyły ponad 8 tysięcy stron, a dotyczyły niemal wszystkich dziedzin nauki.

Dopiero kilkadziesiąt lat po śmierci Wrońskiego jego odkrycia zaczęły mieć pełniejszą recepcję w światowej literaturze naukowej. Dokonano analizy jego prac matematycznych i astronomicznych i próbowano zastosować prawo najwyższe oraz pozostałe prawa i formuły (można wskazać około stu takich prób). Z najważniejszych można wymienić analizy następujących

[2] S. Dickstein, *Hoene Wroński. Jego życie i prace*, Akademia Umiejętności, Kraków 1986, s. 3.

uczonych: Jeana-Victora Ponceleta[3], Arthura Cayleya[4], Charles'a Henriego Lagrange'a[5], Yvona Villarceau (astronom, m.in. w swoim głównym dziele *Mecanique Celeste. Exposé des Méthodes de Wronski et Composantes des Forces Perturbatrices suivant les Axes Mobiles*, wydanym w 1881 roku), Abla Transona[6], Thomasa Muira[7] (to on wprowadził termin „wronskian" na oznaczenie wyznaczników funkcyjnych), Josepha Liouville'a, Victora A. Puiseaux, Elwina Bruno Christoffela, Jamesa Josepha Sylvestra, Ferdinanda Georga Frobeniusa, Ruggiera Torellego, Giuseppe Peano[8] i inni.

Również w Polsce (chociaż w znacznie mniejszym zakresie) mamy do czynienia z recepcją dzieła Wrońskiego. Jego bezpośrednimi uczniami byli Antoni Bukaty i Leonard Niedźwiecki. Mocno oddziałał na takich myślicieli, jak: Bronisław Trentowski, Karol Libelt, August Cieszkowski, a w okresie międzywojennym – Józef Jankowski, Paulin Chomicz, Czesław Jastrzęb-

---

3 J.V. Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie*, Paris 1864.
4 A. Cayley, *On Wronski's theorem*, „The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics" 1873, nr 12, s. 221–228.
5 Matematyk belgijski, który napisał kilka prac o metodzie Wrońskiego, w tym *Forme générale du reste dans l'expression d'une fonction au moyen d'autres fonctions*, „Les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences" 1884.
6 A. Transon, *Loi des séries de Wronski. Sa phoronomie*, „Nouvelles Annales de Mathématique" 1874, nr 13, s. 305–318.
7 A. Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Its Development*, part I, London 1890.
8 G. Peano, *Sur le déterminant wronskien*, „Mathesis" 1889, nr 9, s. 71–76.

ski-Kozłowski (w ramach Instytutu Mesjanistycznego) oraz Jerzy Braun (Towarzystwo Hoene-Wrońskiego). W tym czasie przetłumaczono wiele jego dzieł na język polski[9]. Przybliżeniem matematycznego dorobku Wrońskiego zajął się Samuel Dickstein (poczynając od lat osiemdziesiątych XIX wieku). W dużej mierze dzięki pracom tego historyka matematyki, organizatora nauki polskiej, tłumacza, wydawcy i propagatora nauk ścisłych, nastąpiło ożywienie intelektualne na ziemiach polskich w zakresie matematyki.

Ważną inicjatywą było powołanie w 1968 roku przez Agatona Gillera i Jana Działyńskiego (głównego mecenasa i organizatora tego przedsięwzięcia) Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu (najpierw jako Stowarzyszenia Pomocy Naukowej), które prowadziło aktywną działalność naukową przez czternaście lat – do roku 1882. Był to krótki okres, lecz bardzo ważny dla nauki polskiej. W latach 1870–1882 ukazało się dwanaście tomów „Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych", w których znalazło się wiele wartościowych prac matematycznych (i innych). Również w Paryżu powstała po upadku powstania listopadowego Szkoła Montparnaska kształcąca Polaków (aby umożliwić im podjęcie studiów wyższych). Pisano podręczniki w języku polskim z różnych działów matematyki, szlifując przy okazji polską terminologię matematyczną.

[9] Zostało przetłumaczone na język polski przez P. Chomicza jedno z najważniejszych dzieł Wrońskiego *Wstęp do filozofii matematyki i technii algorytmii*.

W Warszawie działała od 1881 roku Kasa im. Józefa Mianowskiego, która została powołana przez wielu wpływowych i bogatych ludzi i była bardzo aktywnie wspierana przez społeczeństwo polskie. Wspomagała ona szereg inicjatyw naukowych, m.in. finansowała studia zdolnym młodym ludziom oraz wydawanie książek i czasopism. Szczególne znaczenie miał „Poradnik dla Samouków" – seria prac, które prezentowały i przybliżały stan ówczesnych nauk, zachęcając do ich studiowania. Wydawano też prace w ramach serii „Dzieł Matematyczno-Fizycznych", gdzie ukazały się m.in. prace Wacława Sierpińskiego (*Zarys teorii mnogości*) i Władysława Gosiewskiego (*Zasady rachunku prawdopodobieństwa*).

Samuel Dickstein, matematyk i historyk matematyki, powołał do życia dwa czasopisma naukowe: „Prace Matematyczno-Fizyczne" (od 1882) oraz „Wiadomości Matematyczne" (od 1897). Poza ukazywaniem stanu ówczesnej matematyki (tłumaczenie na język polski i komentowanie wybitnych prac ówczesnych matematyków) przybliżały one dorobek polskich matematyków, m.in. Adama Kochańskiego, Jana Brożka, Józefa Hoene-Wrońskiego. Oprócz prac Dicksteina niebagatelny wpływ miały również badania historyczne Ludwika Antoniego Birkenmajera oraz Mariana Aleksandra Baranieckiego. Świadczyły one o wielkości i ciągłości polskiej kultury mimo okresu zaborów. Ponadto w 1905 roku powstało w Warszawie Towarzystwo Kursów Naukowych, przekształcone z działającego tajnie od 1882 roku Uniwersytetu Latającego (kształcącego głównie kobiety, które wówczas nie miały zasadniczo dostępu do kształcenia uniwersyteckiego). Już w niepodległej Polsce Towarzystwo przekształciło się w Wolną Wszechnicę Polską. Podobnie w 1905 roku powstało Koło Matematyczno-Fizyczne, mające w założeniach podnieść poziom kultury naukowej nauczycieli (od 1911 roku zaczęto wydawać czasopismo „Wektor"), a dwa lata później założono Towarzystwo Naukowe Warszawskie, wydające wiele ważnych prac w „Sprawozdaniach" oraz „Roczniku". Publikowali tam swoje prace tacy matematycy, jak: Władysław Gosiewski, Samuel Dickstein, Leon Lichtenstein, Stefan Mazurkiewicz, Aleksander Rajchman, Hugo Steinhaus, Wacław Sierpiński, Stanisław Ruziewicz i wielu innych[10].

Dzięki zabiegom wielu działaczy i organizacji w 1861 roku język polski zostaje przywrócony jako język wykładowy na Uniwersytecie Jagiellońskim, a 10 lat później również Uniwersytet Lwowski staje się w pełni polską uczelnią. W ten sposób stopniowo zdobywano kolejne przyczółki na drodze do niepodległości.

Wtedy to właśnie ujawniły się z pełną siłą najlepsze cechy narodu polskiego: umiejętność współpracy, zdolność do poświęcenia, wiara w sukces podejmowanych przedsięwzięć, troska o dobro wspólne, szacunek dla tradycji i kultury narodowej. W tym sprzyjającym klimacie stał się możliwy rozwój wybitnych jednostek, co w krótkim czasie doprowadziło do znaczącego wzrostu potencjału intelektualnego w polskim społeczeństwie.

---

[10] J. Dobrzycki, *Nauki matematyczno-fizyczne*, w: *Historia nauki polskiej 1863–1918*, red. B. Suchodolski, t. 4, cz. 3, s. 42–60.

Mimo skrajnie niekorzystnej sytuacji politycznej (wszak siła państw zaborczych wydawała się przemożna) przybliżała się nadzieja na odzyskanie niepodległości.

Powstanie polskiej szkoły matematycznej

Jak zauważyłem wcześniej, odzyskanie przez Polskę niepodległości stało się możliwe m.in. dzięki wzmożonej aktywności naukowej Polaków. Zdobyta wolność była jednak dodatkowym impulsem do dalszego rozwoju nauki. Szczególnie nauki teoretyczne, które nie wymagały dużych nakładów finansowych, rozwijały się bardzo dynamicznie – chodzi przede wszystkim o logikę, matematykę i fizykę teoretyczną. W krótkim czasie pojawiło się zastosowanie tych nauk (m.in. w technice), co zaczęło przynosić wymierne efekty ekonomiczne i gospodarcze. Wybuch II wojny światowej przerwał ten niepowtarzalny w historii Polski rozwój. Mimo okupacji hitlerowskiej (a później radzieckiej) oraz ogromnych strat ludnościowych (głównie w warstwie inteligenckiej, która znajdowała się na pierwszym froncie walki – również zbrojnej), materialnych i kulturowych (zniszczeniu uległo bezpowrotnie wiele dzieł sztuki, rękopisów itp.) osiągnięcia nauki polskiej nie zostały zaprzepaszczone – w okupowanej ojczyźnie już nie tak dynamicznie jak poprzednio, ale jednak rozwój nauki postępował, a rzesza uczonych, którzy wyemigrowali, stworzyła poza granicami kraju silne ośrodki naukowe (głównie w Stanach Zjednoczonych). Rozkwit tych ośrodków można uznać w pewnym sensie za kontynuację polskiej szkoły matematycznej, a dokonane w nich odkrycia miały ogromne znaczenie dla nauki światowej.

W niniejszym artykule chciałbym pokazać, jak wykształceni w polskim środowisku naukowym wybitni matematycy przenosili to, co osiągnęli dzięki rodzimej kulturze, do innych krajów i środowisk. Takie ośrodki badawcze o światowym zasięgu i renomie stworzyli: Alfred Tarski, Samuel Eilenberg, Antoni Zygmund, Mark Kac oraz Jerzy Neyman.

Powszechnie przyjmuje się, że w okresie międzywojennym ukształtowała się polska szkoła matematyczna, skupiona głównie w trzech ośrodkach: lwowskim, warszawskim i krakowskim. Powstawanie szkół naukowych nie jest zjawiskiem zbyt częstym w historii nauki. Powoływano je w czasach greckich (szkoła pitagorejska, eleacka, megarejska, atomistów) i hellenistycznych (stoicka, epikurejska, sceptycka, aleksandryjska), szczególnie licznie zaś w okresie średniowiecza (np. szkoła ockhamistów czy Buridana) i w czasach współczesnych. O szkole naukowej mówimy wtedy, gdy pod wpływem indywidualności naukowych (mistrzów) zaczynają się rozwijać określone gałęzie nauki. Wzrasta wówczas liczba uczniów zajmujących się tematami proponowanymi przez mistrzów, powstają prace naukowe koncentrujące się wokół jednej tematyki, otoczenie zewnętrzne (bliższe i dalsze) przejmuje idee i metody ukazywane i realizowane w danej szkole. Szkoła naukowa staje się ważnym ośrodkiem przemian w nauce, miejscem spotkania najlepszych uczonych w danej dziedzinie i centrum przyciągającym nowych adeptów. W Polsce okresu międzywojnia wyodrębniły się trzy szkoły matematyczne: lwowska, warszawska i krakowska. Ponieważ istniały między nimi silne związki (wymiana idei, uczonych itp.), można mówić o polskiej szkoły matematycznej.

Według Kazimierza Kuratowskiego „o powstaniu polskiej szkoły matematycznej zadecydowały – obok pojawienia się grona wielce utalentowanych matematyków – czynniki charakteryzujące postawę naszego społeczeństwa w niewoli: niezłomna wiara w odzyskanie niepodległości, otoczenie troskliwą opieką nauki i kultury narodowej jako gwarancji zachowania bytu narodowego”[11].

Dla powstania polskiej szkoły matematycznej cezurą wydaje się rok 1920, kiedy to wydany został pierwszy tom polskiego czasopisma „Fundamenta Mathematicae”. Miało ono być poświęcone głównie topologii i teorii mnogości – dwóm nowym wówczas dziedzinom matematyki, a prace w nim zamieszczane mieli pisać polscy matematycy. Biorąc pod uwagę nieznaczny wkład Polaków do matematyki światowej w okresie wcześniejszym, zamierzenie to wydawało się nierealne. Już od pierwszego numeru pojawiały się jednak artykuły najwyższej jakości i poziom ten został utrzymany w kolejnych wydaniach czasopisma, które stało się jednym z najważniejszych periodyków matematycznych na świecie.

[11] K. Kuratowski, *Pół wieku matematyki polskiej 1920–1975*, Warszawa 1973, s. 29.

Pięć lat wcześniej, w 1915 roku, został powołany do życia Uniwersytet Warszawski (mimo utworzenia go przez władze niemieckie jest to uczelnia polska), a Stefan Mazurkiewicz został profesorem nowej Alma Mater. Od roku akademickiego 1916/1917 zaczyna on prowadzić seminarium matematyczne (z topologii). W 1918 roku dołączają do niego najpierw Zygmunt Janiszewski, a następnie Wacław Sierpiński (promotor i nauczyciel akademicki Mazurkiewicza z czasów lwowskich), który przenosi się z macierzystego Uniwersytetu Lwowskiego.

Istotną rolę w kształtowaniu ośrodka matematycznego odgrywała osobowość tworzących go matematyków. Stefan Mazurkiewicz był świetnym wykładowcą, pobudzającym młodzież do pracy naukowej w nowych działach matematyki (głównie topologii). Zygmunt Janiszewski miał z kolei szerokie zainteresowania (również pozamatematyczne, w tym filozoficzne) i w sposób niezwykle precyzyjny i zwięzły umiał je prezentować. Wacław Sierpiński posiadał natomiast dar dzielenia się swoimi aktualnymi pasjami naukowymi i inspirowania innych (był jednym z pierwszych wykładowców teorii mnogości). Duży wpływ na zainteresowania młodych adeptów matematyki mieli też logicy Jan Łukasiewicz i Stanisław Leśniewski. Przedstawiali oni w nowym świetle metodologię nauk dedukcyjnych oraz podstawy logiki matematycznej. W latach dwudziestych istniało już w Warszawie jedno z najsilniejszych centrów matematyki na świecie, głównie w dziedzinie teorii mnogości, topologii, teorii funkcji rzeczywistej i podstaw matematyki wraz z logiką matematyczną.

Podobnie intensywny rozwój tej nauki można zaobserwować we Lwowie, gdzie działali Hugo Steinhaus (który zastąpił Sierpińskiego w katedrze matematyki) oraz Stefan Banach (Steinhaus nazwał go swoim największym „odkryciem naukowym"). Wcześniej katedrą matematyki kierował Wawrzyniec Żmurko (od 1871 roku, kiedy to Uniwersytet Lwowski stał się uczelnią z polskim językiem wykładowym) oraz Józef Puzyna (od 1892).

O ile warszawska szkoła matematyczna interesowała się przede wszystkim teorią mnogości i topologią, o tyle szkoła lwowska była skoncentrowana na badaniach z zakresu analizy funkcjonalnej (oczywiście ta ostatnia była ściśle związana z tymi poprzednimi). Podstawowe pojęcia analizy funkcjonalnej sformułowali Vito Volterr, Maurice Fréchet, Frigyes Riesz oraz inni, jednak dopiero po fundamentalnej pracy Stefana Banacha, opublikowanej w 1922 roku w „Fundamenta Mathematicae", stała się ona w pełni „nową" i samodzielną dyscypliną matematyczną. Ta rozprawa okazała się kluczowa dla dalszego rozwoju matematyki i współczesnych nauk przyrodniczych przez dostarczenie niezbędnych metod i narzędzi badawczych. W tym czasie ośrodek lwowski wyrósł na najważniejsze centrum rozwoju analizy funkcjonalnej na świecie. W 1929 roku założone zostało we Lwowie czasopismo „Studia Mathematica" poświęcone właśnie analizie funkcjonalnej – w kolejnych latach drukowano w nim najdonioślejsze odkrycia w tej dziedzinie.

Dwoma głównymi „centrami" lwowskiej szkoły matematycznej są więc Stefan Banach i Hugo Steinhaus. Starszy od

Banacha o pięć lat Steinhaus (urodzony w 1887 roku), podobnie jak Mazurkiewicz i Janiszewski, cechował się wszechstronnością w matematyce (i poza nią) oraz podkreślał uniwersalny charakter tej nauki i jej zastosowań. Cecha uniwersalizmu stała się zresztą punktem charakterystycznym całej lwowskiej szkoły matematycznej.

Poza Paryżem, Warszawą i Lwowem czwartym ośrodkiem, z którego wyrosła polska szkoła matematyczna, był Uniwersytet Jagielloński w Krakowie. Wykładali tam tacy matematycy, jak Franciszek Mertens, a później Marian Baraniecki, Ludwik Antoni Birkenmajer, Kazimierz Żorawski, Stanisław Zaremba oraz Jan Śleszyński.

Franciszek Mertens, po studiach w Berlinie, otrzymał w 1864 roku katedrę matematyki elementarnej na Uniwersytecie Jagiellońskim. W 1874 roku powstało z jego inicjatywy seminarium matematyczne, mające na celu konsolidację i podniesienie poziomu nauczania matematyki. Sam Mertens prowadził również wykłady (poza klasycznymi) z najnowszych teorii matematycznych, w tym z teorii form kwadratowych, analitycznej teorii liczb i teorii grup, otwierając matematykę krakowską na najważniejsze ówczesne odkrycia. W 1884 roku, po 19 latach pobytu w Krakowie, przeniósł się na politechnikę do Grazu, a jego miejsce w katedrze matematyki zajął Marian Baraniecki, po nim Kazimierz Żorawski, a od 1919 do 1924 roku – Jan Śleszyński. Od 1900 roku natomiast Stanisław Zaremba objął na Uniwersytecie Jagiellońskim funkcję profesora i kierownictwo drugiej katedry matematyki.

Istotnym momentem w dziejach krakowskiej szkoły wyższej było dopuszczenie przez władze austriackie języka polskiego jako języka wykładowego – nastąpiło to w 1861 roku. Od tego momentu odnotowuje się znaczący rozwój uczelni. Również powstałe w 1816 roku Towarzystwo Naukowe Krakowskie (przekształcone w 1872 roku w Akademię Umiejętności – o randze ogólnonarodowej) stało się ważnym ośrodkiem inspirującym i organizującym badania naukowe oraz wydającym czasopisma „Rozprawy Akademii Umiejętności" oraz „Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie" (od 1901 roku, najpierw przez dziewięć lat w języku niemieckim).

Polską szkołę matematyczną zapoczątkowało więc tylko kilku wybitnych matematyków: Sierpiński, Janiszewski, Banach, Steinhaus, Mazurkiewicz oraz Łukasiewicz, Leśniewski, Żorawski, Zaremba. Trzeba też podkreślić znaczenie (pośrednie, lecz jednak bardzo ważne) Kazimierza Twardowskiego – twórcy szkoły lwowsko-warszawskiej, który zgromadził we Lwowie aktywne środowisko filozofów i logików, oddziałujących na inne obszary działalności naukowej, również matematycznej.

Znaczenie emigracji polskich matematyków w okresie II wojny światowej dla rozwoju nauki

W ramach polskiej szkoły matematycznej następował w okresie międzywojennym szybki wzrost liczebny matematyków, wydawano coraz więcej prac matematycznych, organizowano konferencje i kongresy naukowe. Ten rozwój został przerwany wybuchem wojny. Wielu matematyków zginęło, m.in. Juliusz Paweł Szauder, Herman Auerbach (w roku 1943, z rąk gestapo w getcie lwowskim), Stanisław Saks (rozstrzelany w 1942 roku), Aleksander Rajchman (w obozie koncentracyjnym w Sachsenhausen 30 marca 1940 roku), Jozef Schreirer (w 1943 w Drohobyczu), Adolf Lindenbaum (zamordowany przez Niemców w Ponarach koło Wilna), Józef Marcinkiewicz (zamordowany przez Sowietów w 1940 roku), Stefan Mazurkiewicz (w 1945 roku z powodu trudów wojennych – był wygnany z Warszawy po upadku powstania warszawskiego), Antoni Łomnicki, Włodzimierz Stożek, Stanisław Ruziewicz (rozstrzelani w 1941 roku wraz z grupą intelektualistów polskich we Lwowie na Wzgórzach Wuleckich), Stefan Kaczmarz (najprawdopodobniej zamordowany w Katyniu), Władysław Hepter (umiera w sowieckim łagrze), Władysław Nikliborc (popełnia samobójstwo w Warszawie w 1948 roku po przesłuchaniu przez Urząd Bezpieczeństwa). Część matematyków opuściło Polskę, udając się na emigrację (głównie do Stanów Zjednoczonych).

Jak wylicza Wacław Sierpiński, ubyło ponad połowę matematyków spośród pracujących na polskich uczelniach przed wojną, zostało również zniszczonych wiele rękopisów i bibliotek matematycznych[12]. Wprawdzie po wojnie uniwersytety na

[12] R. Duda, *Lwowska Szkoła Matematyczna*, Wrocław 2007, s. 409–411.

terenie Polski były odbudowywane i rozbudowywane (w tym ośrodki matematyczne), ale przestał już istnieć fenomen nazwany polską szkołą matematyczną – zostało tylko jej pokłosie (znaczące, lecz nieposiadające już wcześniejszego impetu). Część emigrantów utworzyła jednak szkoły matematyczne poza granicami Polski – na wzór polskiej szkoły matematycznej (przenosząc metody badań i tematykę badawczą do innych krajów). Tym samym można mówić o kontynuacji polskiej szkoły matematycznej, choć już nie na ziemiach ojczystych.

Chciałbym teraz przyjrzeć się sylwetkom kilku najwybitniejszych rodzimych matematyków, którzy opuszczając Polskę w okresie, gdy rozwój polskiej szkoły matematycznej został zahamowany przez wojnę, stworzyli (lub współtworzyli) poza granicami kraju szkoły, a przynajmniej silne ośrodki matematyczne, kontynuując badania zapoczątkowane i rozwijane w Polsce międzywojennej (zostali więc ukształtowani przez polską szkołę matematyczną). Decyzja o emigracji, wymuszona przez wojnę oraz ideologie faszyzmu i komunizmu, była dla nich konsekwencją stanięcia przed tragicznym wyborem między życiem zniewolonym a wolnością, dającą możliwość naukowego rozwoju. Te trudne dylematy, prócz tego, że osłabiały tkankę narodu, stały się osobistym dramatem ludzi, którzy poza ziemią ojczystą nie byli w stanie zrealizować w pełni swoich możliwości. Z drugiej jednak strony ludzi ci (uratowani od zagłady), poprzez podkreślanie swoich korzeni, rozsławiali polską matematykę i wspomagali jej dalszy rozkwit. Przede wszystkim zaś ich naukowe dokonania miały fundamentalne znaczenie dla rozwoju nauki światowej – wiele odkryć nie zostałoby pewnie dokonanych, nauka poszłaby innymi drogami.

Wybrałem ośmiu polskich matematyków, a są nimi: Stanisław Ulam, Otton Nikodym, Jerzy Spława-Neyman, Jan Łukasiewicz, Mark Kac, Antoni Zygmund, Samuel Eilenberg i Alfred Tarski. Rozpocznę od prezentacji dokonań Stanisława Ulama, gdyż jego działalność naukowa nieomal wzorcowo ukazuje ducha polskiej szkoły matematycznej oraz sposoby kontynuowania jej działalności w innych krajach.

Stanisław Marcin Ulam urodził się 13 kwietnia 1909 roku we Lwowie w spolonizowanej rodzinie żydowskiej. Od wczesnych lat fascynowała go matematyka i trudne problemy (jako gimnazjalista z powodzeniem zgłębiał tajniki szczególnej teorii względności i próbował rozwiązać nierozstrzygnięte zagadnienie istnienia liczb nieparzystych doskonałych, czytał książki Poincarégo i Steinhausa).

Studiując od 1927 roku na Politechnice Lwowskiej, uczył się matematyki od Kazimierza Kuratowskiego, Stanisława Mazura i Stefana Banacha. Uczestniczył w spotkaniach w słynnej Kawiarni Szkockiej, gdzie matematycy, na czele z Banachem, całymi godzinami dyskutowali nad zagadnieniami naukowymi (i nie tylko), zapisując problemy i rozwiązania najpierw na serwetkach czy blatach stolików, a później w specjalnie ufundowanym przez żonę Banacha grubym zeszycie (nazwanym „Księgą Szkocką"). Pochłonęły go zwłaszcza zagadnienia dotyczące teorii mnogości. Te spotkania, jak i całą atmosferę ówczesnego

Lwowa, wspominał przez całe życie z niezwykłym sentymentem i ogromną wdzięcznością. Uważał, że to właśnie środowisko lwowskie ukształtowało go jako człowieka i uczonego, ukazując mu istotę matematyki i sedno matematycznego myślenia.

Rozwój naukowy Ulama postępował bardzo szybko, a zainteresowania były niezwykle szerokie (obejmowały topologię, teorię mnogości, teorię funkcji rzeczywistych, rachunek prawdopodobieństwa, logikę, biomatematykę i różnorodne zastosowania matematyki w technice). Pierwszą pracę naukową *Concerning Functions of Sets* opublikował już w wieku 20 lat i to w „Fundamenta Mathematicae". Przełomowy był dla niego wyjazd na Kongres Matematyków do Zürichu w 1932 roku. Po rozmowach ze spotkanymi tam naukowcami i zaprezentowaniu własnych poglądów był przekonany, że polska matematyka jest potęgą, a on sam – twórczym badaczem. Od tego momentu całe życie postanowił poświęcić matematyce. Ta pewność raz wybranej drogi nie opuszczała go aż do śmierci. Rok po zakończeniu studiów uzyskał tytuł doktora (promotorem jego pracy był Kazimierz Kuratowski, który uważał Ulama za swoje największe odkrycie naukowe).

W 1934 roku nawiązał współpracę z Johnem von Neumannem, wielkim matematykiem węgierskim pochodzenia żydowskiego. W 1935 na zaproszenie von Neumanna wyjechał do Princeton w USA. Ostatecznie opuścił Polskę tuż przed wybuchem wojny. Starał się przenieść lwowską atmosferę współpracy do Stanów Zjednoczonych, które skupiały w tym czasie ogromną liczbę uczonych opuszczających Europę z obawy przed rozszerzającym się nazizmem. Poza von Neumannem (z którym nawiązał bardzo bliską przyjaźń) współpracował z Johnem C. Oxtobym (wspólna publikacja prac z mechaniki statystycznej), Markiem Kacem (wspólna książka *Mathematics and Logics*), Jamesem L. Tuckiem (pionierska praca o możliwości kontrolowanej reakcji termojądrowej), C.J. Everettem (praca z teorii grup) i wieloma innymi. Najczęściej Ulam był twórcą luźnych pomysłów, które jego współpracownicy ubierali w rygorystyczną formę. Głównym jego zajęciem było myślenie, prowadzenie intensywnych dyskusji i generowanie kolejnych pomysłów.

Od 1943 roku uczestniczył w projekcie „Manhattan" w Los Alamos nad opracowaniem technologii produkcji bomby atomowej, a później termojądrowej. Podczas tych prac pojawiło się wiele nowych pomysłów i technologii, których Ulam był twórcą lub współtwórcą (wobec utajnienia całego programu do tej pory trudno jest ustalić szczegółowy wkład poszczególnych uczonych w dokonane odkrycia). Opracowanie technologiczne bomby atomowej było typowym zagadnieniem z zakresu matematyki stosowanej (wykorzystanie mechaniki statystycznej). Szczególnie wiele obliczeń trzeba było wykonać przy teoretycznym testowaniu zapłonu bomby wodorowej – w tym celu skonstruowano pierwsze komputery (w Los Alamos zbudowano komputer o nazwie MANIAC). W tym momencie bardzo przydatna okazała się logika matematyczna – John von Neumann opracował metodę programowania komputerów na wzór metod logiki.

W 1952 roku Ulam wraz z Enrico Fermim zajął się pierwszymi w historii poważnymi symulacjami komputerowymi (chodziło o symulacje zachowania się układu dynamicznego) na komputerze MANIAC. Otrzymane wyniki stanowiły początek badań zjawisk nieliniowych. Przy okazji prac nad bombą wodorową Ulam opracował metodę Monte Carlo (pozwalającą na stosowanie teorii prawdopodobieństwa do obliczania procesów statystycznych na podstawie wielu próbek losowych, m.in. przeprowadzania symulacji aerodynamicznych), metodę obliczeń hydrodynamicznych oraz (wraz z von Neumannem) teorię układów samopowielających się z prostych warunków początkowych (tzw. *cellular automata* – ta metoda jest wykorzystywana m.in. do badania sieci neuronów). Ponadto pracując nad modelem zapłonu w bombie wodorowej (razem z Everettem i Fermim), stworzył model procesu multiplikatywnego (*branching ratios*), stanowiący przełom w konstrukcji bomby wodorowej. Dzięki tym pomysłom Ulam (wraz z Edwardem Tellerem) został uznany za twórcę bomby wodorowej, chociaż *de facto* cały program był dziełem bardzo wielu uczonych.

Później pracował nad zagadnieniem wykorzystania energii jądrowej do napędu rakiet kosmicznych. Wraz z Everettem napisał w 1955 roku pracę o napędzie rakiet kosmicznych poprzez sekwencję słabych wybuchów jądrowych. Niestety projekty te z powodów finansowych nie były kontynuowane. Ulam był też jednym z głównych inspiratorów pomysłu lotu człowieka na Księżyc. Opierając się na metodach i wynikach uzyskanych w Los Alamos, umiał uzasadnić realność takiego projektu i przekonać doradców prezydenta Kennedy'ego.

Pod koniec lat pięćdziesiątych zainteresował się genetyką molekularną i zapoczątkował w Los Alamos seminarium z biologii komórkowej, gdzie pracowano nad zastosowaniami matematyki w biologii (ostatnim jego pomysłem i pasją było wykorzystanie teorii języków komputerowych i teorii programowania w biologii).

Stanisław Ulam miał szczególne zdolności w zakresie dostrzegania różnorodnych problemów i podawania trafnych idei ich rozwiązania. Dlatego specyficzne znaczenie ma wydana przez niego w 1960 roku książka pt. *A Collection of Mathematical Problems*.

Przez całą działalność naukową podkreślał swoje polskie korzenie i wypowiadał się z ogromnym uznaniem i wdzięcznością o lwowskim środowisku naukowym, które go ukształtowało. W celu zachowania i rozpowszechnienia tego, co działo się we Lwowie w słynnej Kawiarni Szkockiej, przetłumaczył na angielski i uporządkował – zapoczątkowaną w 1933 roku przez Banacha – Księgę Szkocką (została wydana jako książka w 1981 roku). Umarł w 1984 roku w Santa Fe.

W artykule opublikowanym w 1969 roku w „Wiadomościach Matematycznych" Ulam w piękny sposób ocenił polskie środowisko matematyczne okresu międzywojennego (z którego wyrósł) i jego relacje do matematyki światowej:

> Znaczna część osiągnięć matematyków w Polsce w okresie dwudziestolecia międzywojennego stanowi ważny etap w tworzeniu fundamentów współczesnej matematyki światowej. Wywierają one wpływ nie tylko na przedmiot, lecz również na ton współczesnych

> badań. (…) Od czasów Cantora duch teorii mnogości coraz bardziej przenikał matematykę; ostatnio byliśmy świadkami renesansu zainteresowania tą teorią i nieoczekiwanych jej postępów. Mam na myśli nie tylko teorię mnogości w jej najbardziej abstrakcyjnej formie, lecz także jej bezpośrednie zastosowania, topologię w jej najogólniejszym ujęciu, najogólniejsze przedstawianie idei algebraicznych. Temu wszystkiemu nadała kierunek i impuls szkoła polska. Znaczna część tego wkładu jest zasługą matematyków lwowskich. Tutaj zainteresowania nie koncentrowały się wyłącznie na teorii mnogości, lecz na nowym ujęciu problemów klasycznych, które może być nazwane analizą funkcjonalną w duchu geometrycznym i algebraicznym.

Ulam podkreśla szczególnie ducha współpracy oraz zdolność polskiego środowiska matematycznego do badania podstaw matematyki i znajdowania prostych i zarazem uniwersalnych metod konstrukcji nowych obiektów:

> Ważną cechą matematyki nowoczesnej, która została w pełni rozwinięta we Lwowie, jest współpraca między różnymi indywidualnościami, a nawet całymi szkołami matematycznymi. Wbrew rosnącej różnorodności i specjalizacji, a nawet hiperspecjalizacji badań matematycznych, kierunki i wątki badawcze pochodzące z różnorodnych i niezależnych źródeł częstokroć zbiegają się. (…) Jeśli zależałoby mi na określaniu głównej cechy charakterystycznej tej szkoły, to wymieniłbym przede wszystkim zainteresowania podstawami różnych teorii. Rozumiem przez to, że

> jeśliby rozważać matematykę jako drzewo, to grupa lwowska oddawała się studiowaniu korzeni i pni, być może nawet głównych konarów, mniej interesując się bocznymi pędami, liśćmi i kwiatami. (…) Podniecenie wywołane znalezieniem takiej rozmaitości nowych obiektów, którymi można było operować za pomocą kilku ogólnych metod, było tak duże, że częstotliwość dyskusji i pracy zespołowej w tych latach była rzeczywiście wyjątkowa. Jedynym wypadkiem, gdy spotkałem się z podobną wspólnotą zainteresowań i intensywnością współżycia intelektualnego, był okres mych badań w czasie lat wojennych nad nowym wówczas zagadnieniem – energią jądrową.

Czy można wystawić bardziej pozytywną ocenę matematyce polskiej, stwierdzając, że zajmowała się ona „studiowaniem korzeni i pni", a więc tych obszarów matematyki, z których wszystkie jej gałęzie czerpią swoje życiodajne soki? A podkreślenie, że „częstotliwość dyskusji i pracy zespołowej", która charakteryzowała środowisko matematyków polskich, była czymś niespotykanym w tamtych czasach, wskazuje na źródło sukcesów i sposób oddziaływania na uczonych w innych krajach – autentyczna pasja porywa.

W celu przybliżenia atmosfery Kawiarni Szkockiej i wagi rozważanych tam problemów przetłumaczył Ulam na język angielski i wydał „Księgę Szkocką"[13]. We wstępie do niej opisywał intensywność życia matematycznego we Lwowie w okresie

[13] S.M. Ulam, *The Scottish Book*, Michigan 1957.

międzywojennym. Pokazywał wartość naukową nieformalnych spotkań w małych grupach, odbywających się każdego dnia. Dyskutowano tam zagadnienia będące przedmiotem wspólnego zainteresowania matematyków, dzielono się ostatnimi wynikami. Nie wystarczały cotygodniowe spotkania Towarzystwa Matematycznego, szukano dodatkowych okazji i miejsc, aby rozmawiać o matematyce. Była ona obecna w każdym miejscu Lwowa, poruszane problemy matematyczne stawały się centralnym przedmiotem spotkań, a umieszczano je w „Księdze Szkockiej" dopiero wtedy, gdy nie sposób ich było rozwikłać w toku dłuższych analiz i dyskusji.

Los tej Księgi wpisuje się w losy wielu polskich matematyków. Po rozpoczęciu wojny niemiecko-sowieckiej w 1941 roku skończyły się spotkania matematyków i wpisy do Księgi. Ostatni nosi datę 31 maja 1941 i sygnowany jest numerem 193 (uczynił go H. Steinhaus). Oryginał Księgi przechowywany jest przez rodzinę Banacha, natomiast do tej pory nie ma jej polskiego wydania.

Otton Nikodym miał całkiem inny charakter niż Stanisław Ulam: był mało towarzyski, zamknięty w sobie. Cechowała go jednak podobna wszechstronność i ogromne ambicje twórcze. Podejmował zagadnienia z zakresu teorii miary i całki, logiki, teorii sieci, algebry, analizy funkcjonalnej, równań różniczkowych[14], ale inte-

[14] Wprowadził m.in. pojęcia własności Radona-Nikodyma przestrzeni Banacha oraz przestrzeni metrycznej Frécheta-Nikodyma. Opracował nową teorię rzutu ortogonalnego w przypadku zbiorów wypu-

resowały go również zastosowania matematyki do fizyki (uściślanie podstaw fizyki teoretycznej) oraz dydaktyka matematyki (napisał m.in. *Dydaktykę matematyki czystej w zakresie gimnazjum wyższego*", a także podręczniki akademickie *Równania różniczkowe*, *Wstęp do rachunku różniczkowego*) i działalność popularyzatorska (prowadzenie w polskim radiu pogadanek o nauce zebranych w 1946 w książce *Spójrzmy w głębiny myśli*).

Nikodym uczestniczył w bardzo ważnym dla polskiej matematyki wydarzeniu. W czasie I wojny światowej, w 1916 roku spotkał go Hugo Steinhaus na krakowskich Plantach, gdy wraz ze Stefanem Banachem rozmawiali o całce Lebesgue'a. To spotkanie przerodziło się w regularne seminaria odbywające się przy ulicy Karmelickiej 9 (uczęszczali na nie również Witold Wilkosz, Władysław Ślebodziński, Władysław Stożek i Leon Chwistek), gdzie dyskutowane były bieżące zagadnienia matematyczne.

Urodził się 13 sierpnia 1889 roku w Zabłotowie na Kresach Wschodnich. We Lwowie zdobywał swoje wykształcenie – jego nauczycielami na Uniwersytecie Lwowskim byli matematycy Wacław Sierpiński i Józef Puzyna oraz fizyk Marian Smoluchowski. Później pracował w Krakowie, studiował w Paryżu, a od 1931 roku (po zrobieniu habilitacji) podjął pracę na Uniwersytecie Warszawskim. Po zakończeniu wojny, w 1946 roku (będąc mianowany profesorem Politechniki Krakowskiej)

kłych i rozwiązał zagadnienia Dirichleta istnienia i jednoznaczności rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych typu eliptycznego.

opuścił Polskę, aby po krótkim pobycie w Belgii i we Francji znaleźć miejsce w Stanach Zjednoczonych. Prowadził wykłady w Kenyon College w Ohio, by w końcu od 1966 roku przenieść się do Utica (w stanie Nowy Jork) i poświęcić się pracy naukowej na zlecenie Atomic Commission i National Science Foundation. Tam też umarł w 1974 roku.

Opublikował kilka znaczących książek i innych prac naukowych, m.in. *Teorię tensorów z zastosowaniami do geometrii i fizyki matematycznej* (Warszawa 1938), *Równania różniczkowe* (Poznań 1949) oraz *The Mathematical Apparatus for Quantum-Theories* (prawie tysiącstronicowa książka zawierająca podstawy mechaniki kwantowej; New York 1966). Przed wybuchem wojny napisał jeszcze trzy książki, które zaginęły po upadku powstania warszawskiego – były to drugi tom *Teorii tensorów* oraz dwa tomy *Mechaniki*.

Po przyjeździe do USA, oprócz pisania prac naukowych, prowadził liczne wykłady w Stanach Zjednoczonych i na wielu uczelniach świata, m.in. w Belgii, Francji, Włoszech, Niemczech, Kanadzie.

Samuel Eilenberg, urodzony w 1913 roku w Warszawie, najpierw kształcił się w szkole żydowskiej, a później studiował na Uniwersytecie Warszawskim. Działał tam silny zespół topologów, stworzony przez Janiszewskiego, Mazurkiewicza, Sierpińskiego, Kuratowskiego, Saksa i Borsuka. Niemal od początku Eilenberg zainteresował się więc topologią – jego praca doktorska, pisana pod kierunkiem Karola Borsuka, dotyczyła topologii płaszczyzny i została obroniona w 1936 roku oraz opublikowana w tym samym roku w „Fundamenta Mathematicae".

Poza środowiskiem warszawskim związał się również z drugim centrum matematyki polskiej – Kawiarnią Szkocką we Lwowie, gdzie pod kierunkiem Stefana Banacha kwitło życie naukowe i towarzyskie. Tam zrodziły się pomysły zastosowania w topologii metod algebraicznych – w ten sposób topologia algebraiczna (której twórcą był Henri Poincaré) stała się jedną z ważniejszych dziedzin współczesnej matematyki. Do roku 1939, gdy wyemigrował do USA i podjął pracę na Uniwersytecie Michigan, napisał 37 prac, głównie z tej dziedziny. W 1947 roku rozpoczyna pracę na Uniwersytecie Columbia, gdzie stworzył centrum badań w ramach czystej matematyki. Wykształcił wielu uczniów, wypromował kilku znakomitych matematyków, w tym Davida Buchsbauma, Petera Freyda, Alexa Hellera, Daniela M. Kana, Williama Lawvere'a, F.E.J. Lintona oraz Stephena Schanuela.

Jego pracę naukową cechuje duch współpracy. Jest jednym ze współpracowników grupy matematyków, która pod pseudonimem Nicolas Bourbaki publikowała swoje wyniki. Razem z takimi matematykami jak André Weil, Saunders Mac Lane, Norman Steenrod czy Henri Cartan pisze artykuły naukowe i książki oraz realizuje różnorodne programy badawcze. Owocem tego była m.in. rozbudowa i aksjomatyzacja teorii homologii (z Mac Lane'em), stworzenie nowej teorii matematycznej – teorii kategorii (ze Steenrodem), a także klasyczna monografia *Algebra homologiczna* (wraz z Cartanem). W późniejszym okresie zajął się teorią automatów – nowym, dynamicznie rozwijającym się działem informatyki.

Warto zaznaczyć, że Eilenberg traktował swoją pracę naukową jako formę działalności (aktywności) społecznej i towarzyskiej – i z całą pewnością ten sposób uprawiania nauki wyniósł z lwowskiego i warszawskiego środowiska matematyków. Poza matematyką był również miłośnikiem sztuki. Gromadził zbiory sztuki indyjskiej i z Azji Południowo-Wschodniej. Jego wiedza na ten temat i sama kolekcja zyskały mu duże uznanie wśród kolekcjonerów. W 1989 roku przekazał ponad 400 cennych rzeźb do Metropolitan Museum of Art. Ten dar doprowadził do powstania fundacji Eilenberg Visiting Professorship w Columbia University (darczyńcami było muzeum oraz inne instytucje i osoby prywatne), dzięki której wielu wybitnych matematyków przyjechało do tego uniwersytetu z wykładami. Umarł w 1998 roku w Nowym Jorku, po przeżytym trzy lata wcześniej udarze mózgu.

Alfred Tarski, urodzony w 1901 roku, jest jednym z uczniów i twórców warszawskiej szkoły matematycznej. Był też członkiem filozoficznej szkoły lwowsko-warszawskiej oraz współtwórcą warszawskiej szkoły logicznej (obok Jana Łukasiewicza, Stanisława Leśniewskiego i Tadeusza Kotarbińskiego). Studiował i pracował na Uniwersytecie Warszawskim, zajmując się teorią mnogości, logiką, metalogiką i teorią modeli. W 1939 roku wyjechał do USA i w 1946 został profesorem na Uniwersytecie Berkeley (gdzie umarł w 1983). Tam stworzył najsilniejszy na świecie ośrodek (szkołę) badań podstaw matematyki. Przez lata prowadził seminarium naukowe, które było kuźnią wielu wybitnych logików. To dzięki Tarskiemu logika matematyczna stała się jedną z ważniejszych amerykańskich dyscyplin badawczych.

Według Tarskiego nie istnieje granica między matematyką a metamatematyką (która jest narzędziem badań samej matematyki i została wprowadzona przez Hilberta jako „teoria dowodzenia"). Dzięki badaniom Tarskiego metamatematyka staje się integralną częścią (dziedziną) matematyki. W pracy *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* ukazał metodę konstrukcji niesprzecznego języka nauki, która pozwala na rozróżnienie języka (ma być on ściśle sformalizowany) i metajęzyka (ma zawierać wszystkie odpowiednio przetłumaczone pojęcia języka, a ponadto tzw. pojęcia semantyczne, czyli m.in. pojęcia „oznaczania", „prawdziwości", „definiowania"). Tarski wykazał, że można przy pewnych założeniach zdefiniować w metajęzyku pojęcia semantyczne (np. prawdziwość zdań języka, o którym metajęzyk orzeka), nie sposób jednak zdefiniować prawdziwości jakichkolwiek zdań bez wskazania konkretnego języka. Był to ważny głos w dyskusji nad używaniem w nauce pojęcia „prawdy" – wbrew neopozytywistom Tarski uzasadniał logiczną możliwość i poprawność używania tego pojęcia.

Jest on autorem 19 monografii dotyczących różnych dziedzin matematyki, m.in. *Geometry*, *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, *Cardinal Algebras*, *Undecid-*

able Theories, *Logic, Semantics, Metamathematics* oraz *Ordinal Algebras*.

Losy **Marka Kaca** ukazują kolejną specyfikę polskiej matematyki okresu międzywojennego. Urodzony w 1914 roku w żydowskiej rodzinie w Krzemieńcu (mieście polskiego wieszcza – Juliusza Słowackiego), aż do czasu wstąpienia do gimnazjum krzemienieckiego w 1925 roku zupełnie nie mówił po polsku. Znał język rosyjski, francuski i w pewnym stopniu hebrajski, język polski był mu jednak obcy. W wieku 15 lat zafascynował się matematyką, nieomal obsesyjnie starając się opanować metodę rozwiązywania równań sześciennych oraz teorię pochodnych – starał się do wszystkiego dojść samodzielnie i częściowo to mu się udało.

Można powiedzieć, że język polski i matematyka wrastały w jego świadomość równocześnie. Jego mentorem na Uniwersytecie Lwowskim, gdzie studiował matematykę, został Hugo Steinhaus – matematyk i zarazem mistrz mowy polskiej. W czerwcu 1937 roku Mark Kac obronił pracę doktorską i cały czas myślał o tym, jak opuścić Polskę, ponieważ tutaj nie widział możliwości realizacji swoich ambitnych planów naukowych. W tych działaniach pomagał mu Steinhaus. Aby zrozumieć decyzję Kaca, trzeba przywołać znaną wypowiedź Steinhausa (który do końca życia pozostał w kraju) dotyczącą Polski: „W tym kraju jedno tylko mi się podoba – pozostać". Czy to wyznanie pełnej dezaprobaty, czy bezwarunkowej miłości? Wydaje się, że jedno i drugie.

Pod koniec 1938 roku Kac opuścił Polskę i wyjechał do Stanów Zjednoczonych. Tam podjął pracę najpierw na Cornell University (od 1939), potem na nowojorskim Rockefeller University, a w końcu na University of Southern California.

Był pionierem rozwoju matematycznej teorii prawdopodobieństwa i jej zastosowań do różnych dziedzin nauki, w tym do fizyki. Kilkakrotnie nagradzano go za jego wyniki, szczególnie za jasne ujmowanie i prezentowanie trudnych i ważnych problemów oraz za wykorzystanie teorii prawdopodobieństwa w różnych obszarach fizyki i techniki.

Z atmosfery Lwowa wyniósł i realizował w swoim życiu naukowym przede wszystkim zamiłowanie do stawiania i rozwiązywania problemów matematycznych (a nie do czystej teorii), a także zapał do współpracy oraz poszukiwania szerokich zastosowań swoich badań. Jak jego nauczyciel Steinhaus wierzył, że istnieje głęboki związek między przyrodą i matematyką oraz że matematyka jest rodzajem gry/zabawy, która pozwala nam wejść w kontakt z drugim człowiekiem i światem przyrody. Jego słynne prace *Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory* oraz *Can One Hear the Shape of a Drum?* oddają w pełni deklarowaną przez niego postawę życiową. Umarł w 1984 roku w Kalifornii.

Antoni Zygmund, urodzony w 1900 roku w Warszawie, jest przedstawicielem warszawskiej szkoły matematycznej. Prowadził badania w zakresie teorii funkcji analitycznych oraz analizy matematycznej (były to głównie: analiza harmoniczna, szeregi trygonometryczne, teoria całki, równania różniczkowe). W 1923 roku uzyskał na Uniwersytecie Warszawskim stopień doktorski w zakresie matematyki, a trzy lata później docenturę. W 1940 roku wyjechał z okupowanej Polski do Stanów Zjednoczonych (od 1929 pracował na Uniwersytecie Stefana Batorego w Wilnie i tworzył tam środowisko matematyczne – jego uczniem był Józef Marcinkiewicz). Po krótkim pobycie w Massachusetts Institute of Technology, a następnie w Mount Holyoke College oraz na Uniwersytecie Michigan dostał pracę na Uniwersytecie Chicagowskim, gdzie pracował przez 33 lata, aż do emerytury w 1980 roku.

To dzięki niemu Chicago stało się jednym z najmocniejszych ośrodków badań w ramach analizy matematycznej. Wspólnie z Marshallem Harveyem Stone'em zbudował potężną szkołę analizy harmonicznej (Chicago School of Analysis). Wykształcił duże grono uczniów (38 doktorów – trzech w Polsce i pozostałych w USA), a wraz z Alberto Calderonem (swoim uczniem) stworzył w latach pięćdziesiątych nową teorię matematyczną – teorię całek osobliwych. Wydał też wiele wybitnych prac, w tym: *Trigonometric Series*, *Funkcje analityczne* oraz *Measure and Integral*. Zmarł w Chicago w 1992 roku.

Jerzy Spława-Neyman jest charakterystycznym przykładem człowieka, w którym mimo wielu niesprzyjających warunków przetrwała przynależność do narodu polskiego, stanowiąc siłę napędową wielu działań. Jego dziadek został za udział w powstaniu styczniowym zesłany na Syberię i dopiero jego ojcu pozwolono ją opuścić. Osiedlił się na pograniczu rosyjsko-rumuńskim, gdzie też w 1894 roku na świat przyszedł Jerzy. Wykształcenie matematyczne zdobywał w Rosji (fascynował się teorią miary i całki oraz książką Karla Pearsona *The Grammar of Science*).

Przez pięć lat pracował jako asystent na Uniwersytecie w Charkowie, a po podpisaniu pokoju w Rydze przyjechał do Polski. Nie udało mu się dostać pracy na Uniwersytecie Warszawskim, został więc statystykiem w różnych instytutach naukowych, a w końcu kierownikiem Laboratorium Statystycznego Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie. Zetknięcie się ze statystyką matematyczną nie wzbudziło jego zachwytu – nie przypominała ona teorii matematycznej.

Dzięki stypendium Funduszu Kultury Narodowej w 1924 roku wyjechał na dwa lata za granicę (w Londynie poznał Karla Pearsona, a w Paryżu uczęszczał na wykłady i seminaria Lebesgue'a i Hadamarda). Podjął bliską współpracę z synem Pearsona (w ramach statystyki) i zapragnął uczynić statystykę dyscypliną w pełni matematyczną. Gdy w 1926 roku wrócił do Polski, rozpoczął się w jego życiu najbardziej twórczy okres. Prowadził wykłady (m.in. na Uniwersytecie Warszawskim), a pomysły i prace powstałe w tym czasie otworzyły przed statystyką matematyczną nowe kierunki rozwoju.

Z powodu trudnej sytuacji materialnej przeniósł się do Londynu, gdzie przez cztery lata prowadził wykłady na University College. W 1937 roku udał się do Ameryki, gdzie otrzymał propozycję profesury (najpierw w Ann Arbor w stanie Michigan, a później w Berkeley w Kalifornii). W Berkeley powstało wówczas światowe centrum statystyki matematycznej – Spława-Neyman powołał Laboratorium Statystyczne, wykształcił wielu światowej sławy uczniów oraz zorganizował cykliczne (odbywające się co pięć lat) Berkeleyskie Sympozja Statystyki Matematycznej i Rachunku Prawdopodobieństwa. W swoich badaniach i pracach nie tylko uczynił ze statystyki znaczący dział matematyki, ale ukazał jej liczne zastosowania w różnorodnych dziedzinach wiedzy, w tym w medycynie, ekonomii, technice i astronomii. Przez cały okres pobytu za granicą utrzymywał kontakt z Polska, wspomagając badania naukowe w zakresie zastosowań matematyki. Zmarł w 1981 roku.

Jednym z twórców logiki matematycznej jest urodzony we Lwowie **Jan Łukasiewicz** (1878–1956). To jemu zawdzięczamy wprowadzenie m.in. logicznego pojęcia dedukcji oraz rozpoczęcie i prowadzenie badań nad logikami wielowartościowymi. Ponadto kluczowe w jego pracy nad logiką są badania z historii logiki. Odkrył on m.in. kontynuację logiki starożytnej i średniowiecznej w logice współczesnej. Był też metodologiem pokazującym, jak wykorzystać logikę w badaniach podstaw nauk empirycznych i matematyki.

Na Uniwersytecie Lwowskim studiował matematykę i filozofię pod kierunkiem Kazimierza Twardowskiego, gdzie w 1902 roku uzyskał stopień doktora. Tam też pracował aż do roku 1915, kiedy to przeniósł się do nowo utworzonego Uniwersytetu Warszawskiego. Przebywał tam do czasu II wojny światowej, kształcąc liczne grono logików i filozofów, m.in. Kazimierza Ajdukiewicza, Stanisława Jaśkowskiego, Jerzego Słupeckiego, Bogdana Suchodolskiego i Alfreda Tarskiego. W ten sposób zrodziła się warszawska szkoła logiczna (jej współtwórcą był Stanisław Leśniewski – kolejny uczeń Twardowskiego), znana z badań metodologicznych i zastosowań logiki do badań nad podstawami matematyki i nauk doświadczalnych.

Pod koniec wojny opuścił Warszawę i przeniósł się do Dublina. W tamtejszej Akademii Królewskiej aż do swojej śmierci kierował Zakładem Logiki Matematycznej. To dzięki jego autorytetowi logika matematyczna stała się obowiązkowym przedmiotem studiów matematycznych, jak również ważnym elementem studiów technicznych i humanistycznych.

Warto zauważyć, że początkiem badań logicznych Łukasiewicza były analizy podstawowych zasad, pojęć i metod filozoficznych: metoda indukcji, dedukcji, zasada sprzeczności, determinizmu, pojęcie przyczyny, konieczności, możliwości, prawdopodobieństwa. Te badania doprowadziły go do stworzenia trójwartościowej logiki zdań i rozpoczęcia prac nad logikami wielowartościowymi. W 1920 roku wygłosił na Uniwersytecie Warszawskim słynny referat *O logice trójwartościowej*, w którym wprowadził implikacyjno-negacyjny system logiki trójwartościowej. Jego odkrycia były porównywane do największych przełomów w dziejach nauki: rewolucji Kopernika, odkrycia fizyki nowożytnej, powstania geometrii nieeuklidesowych czy teorii względności.

Oczywiście w okresie II wojny światowej wyjechało z Polski więcej matematyków. Wybierając tych ośmiu, kierowałem się następującymi kryteriami:

1. matematycy ci zostali ukształtowani (przynajmniej w znacznym stopniu) przez polskie środowisko matematyczne;
2. stworzyli poza granicami Polski silne ośrodki naukowe (przeważnie były to szkoły naukowe), będące kontynuacją polskiej szkoły matematycznej;
3. dokonali odkryć, które zmieniły i rozszerzyły dziedzinę matematyki, wpływając na losy świata.

Dzięki takim kryteriom i odpowiedniej prezentacji dorobku owych matematyków uzyskałem również pełniejszą charakterystykę polskiej szkoły matematycznej. Jak już wspominałem, specyfika tej szkoły polegała na podjęciu badań w zakresie podstaw matematyki, co zaowocowało rozwojem nowych działów tej nauki (w tym logiki matematycznej, analizy funkcjonalnej, teorii mnogości, topologii). Matematyka wyłoniła z siebie działy, które mogły służyć do badania samej matematyki, jak i podstawowych zagadnień filozoficznych (np. badania Tarskiego i Łukasiewicza nad zagadnieniami teorii poznania). Ponadto pokazała szerokie zastosowanie abstrakcyjnych teorii matematycznych do rozwiązywania zagadnień technicznych, co doprowadziło do wzrostu znaczenia społecznego matematyki. Kolejną cechą polskiej szkoły był duch intensywnej współpracy uczonych, przenikanie się różnych działów nauki (rozwiązywanie problemów przy wykorzystaniu metod stosowanych w odmiennych naukach), śmiałe wchodzenie na nowe obszary badawcze i świadomość uniwersalności matematyki. Inne ważne cechy charakteryzujące twórców polskiej szkoły matematycznej to: umiejętność wynajdywania i przyciągania wybitnych młodych talentów, intensywne wspomaganie ich w rozwoju naukowym i autentyczna radość z wyników osiąganych przez innych matematyków, szczególnie młodych.

Fenomen znacznego ożywienia intelektualnego i gwałtownego rozwoju matematyki, który zaistniał właśnie w okresie odzyskiwania przez Polskę niepodległości, rzadko miał miejsce w historii nauki. Zawsze jednak prowadził do przemian cywilizacyjnych – tak było i w tym przypadku.

Zauważmy, że dużą część naukowców z polskiej szkoły matematycznej stanowili matematycy pochodzenia żydowskiego. W poprzednich okresach ani Polacy, ani Żydzi nie mieli szczególnych osiągnięć na tym polu, tym bardziej więc erupcja talentów matematycznych była gwałtowna i nieoczekiwana. Myślę, że dzięki duchowi autentycznej współpracy i otwartości pojawił się efekt synergii i najlepsze cechy obu narodów ujawniły się z pełną siłą: chęć zmieniania świata, poszukiwanie nowych wyzwań, odwaga w rozwiązywaniu trudnych i nowych problemów, nieposkromiona fantazja i wyobraźnia, poczucie własnej wartości i wagi uzyskiwanych rozwiązań, dbałość o zachowanie własnej tożsamości i integralności oraz umiejętność interesującego ukazywania swoich badań i wyników (matematycy polskiej szkoły matematycznej umieli „sprzedać" swoje dokonania poprzez organizowane konferencje, publikowane prace i nawiązywaną współpracę).

Bibliografia

Aull C.E., Lowen R. (red.), *Handbook of the History of General Topology*, Dordrecht, Boston, London 1997, t. 1, s. 255–341.

Burdman Feferman A., Feferman S., *Alfred Tarski. Life and Logic*, Cambridge 2004.

Derkowska A., *Otton Marcin Nikodym (1889–1974)*, „Wiadomości Matematyczne" 1983, t. 25, s. 74–88.

Dickstein S., *O prawie najwyższym Hoene-Wrońskiego w matematyce. Artykuł pierwszy*, „Prace Matematyczno-Fizyczne" 1890, t. 2, nr 1, s. 145–168; *O prawie najwyższym Hoene-Wrońskiego w matematyce. Artykuł drugi*, „Prace Matematyczno-Fizyczne" 1894, t. 5, nr 1, s. 123–145.

Domaradzki S., Pawlikowska-Brożek Z., Węglowska D., *Słownik biograficzny matematyków polskich*, Tarnobrzeg 2003.

Duda R., *Emigracja matematyków z ziem polskich*, „Wiadomości Matematyczne" 2004, t. 40, s. 175–211.

Duda R., *Lwowska Szkoła Matematyczna*, Wrocław 2007.

Hurwic J. (red.), *Wkład Polaków do nauki*, Warszawa 1967.

Iwiński T., *Ponad pół wieku działalności matematyków polskich*, Warszawa 1975.

Jadacki J.J. (red.), *Alfred Tarski: dedukcja i semantyka (Déduction et sémantique)*, Warszawa 2003.

Jakimowicz E., Mironowicz A., *Stefan Banach. Niezwykłe życie i genialna matematyka*, Gdańsk 2009.

Kac M., *Zagadki losu*, Warszawa 1997.

Kietlicz-Wojnacki W., *Polskie osiągnięcia naukowe na obczyźnie*, Lublin 1980.

Klonecki W., Zonn W., *Jerzy Spława-Neyman*, „Wiadomości Matematyczne” 1973, t. 16.

Krysicki W. (red.), *Poczet wielkich matematyków*, Warszawa 1969.

Kuratowski K., *Notatki do autobiografii*, Warszawa 1981.

Kuratowski K., *Pół wieku matematyki polskiej 1920–1975*, Warszawa 1973.

Kuzawa M.G., *Modern Mathematics: The Genesis of a School in Poland*, New Haven 1968.

Łukasiewicz J., *Z zagadnień logiki i filozofii*, Warszawa 1961.

Mac Lane S., *Samuel Eilenberg a topologia*, „Wiadomości Matematyczne” 1984, t. 25, s. 229–241.

Michalski S. (red.), *Poradnik dla samouków*, Warszawa 1915.

Mostowski A., *Thirty Years of Foundational Studies*, „Acta Fennica Philosophica” 1965, t. 17.

Neyman J., *Narodziny statystyki matematycznej*, „Wiadomości Matematyczne” 1979, t. 22 .

Sandomir A., *Poczet uczonych polskich*, Warszawa 1975.

Steinhaus H., *Wspomnienia i zapiski*, Wrocław 2002.

Szymański W., *Who Was Otto Nikodym?*, „Mathematical Intelligencer” 1990, nr 12, s. 27–31.

Śródka A., *Uczeni polscy XIX–XX stulecia*, t. I–IV, Warszawa 1994.

Tarski A., *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego nr 34, Warszawa 1933.

Ulam S. *Wspomnienia z Kawiarni Szkockiej*, „Wiadomości Matematyczne", seria II, 1969, t. 12.

Ulam S., *Adventures of a Mathematician*, New York 1976; tłum. Górnicka A., *Przygody matematyka*, Warszawa 1996.

Woleński J., *Filozoficzna Szkoła Lwowsko-Warszawska*, Warszawa 1985.

Woleński J., *Logika matematyczna*, w: *Historia nauki polskiej. Wiek XX. Nauki ścisłe*, z. 1, Warszawa 1995, s. 35–63.

Giuseppe Veronesego podstawy matematyki

ks. dr hab. Jerzy Dadaczyński
Katedra Filozofii Logiki UPJPII (dawniej: PAT) Kraków

Giuseppe Veronese's foundations of mathematics

Abstract
The aim of this paper is to analyze Veronese's philosophical principles of mathematics. He tried to begin the construction of mathematics (geometry) with the concept of the Thinking Subject and the phenomenon of thinking, which is discussed in detail. It is very likely that this idea had an impact on Hilbert's concept of the Mathematical Subject. Some similarities between Veronese's view and the intuitionistic thinkers are also shown.

Key words:
foundations of mathematics, epistemology of mathematics, ontology of mathematics, mathematical subject, Giuseppe Veronese

Giuseppe Veronese (1853–1917), włoski geometra, choć pracował przede wszystkim w środowisku włoskim, to jednak zyskał światowy rozgłos. Zawdzięczał to głównie zbudowaniu geometrii niearchimedesowej. Wywołało to gorące protesty przede wszystkim ojca współczesnego paradygmatu uprawiania matematyki Georga Cantora. Niemiecki matematyk był twórcą jednego z wariantów konstrukcji liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych, co definitywnie kończyło proces arytmetyzacji analizy matematycznej i eliminowało potrzebę odwoływania się w tej dyscyplinie matematycznej do wielkości niearchimedesowych (aktualnie nieskończenie małych), których nieścisłe stosowanie od czasów Isaaca Newtona i Gottrieda Wilhelma Leibniza w podstawach analizy generowało w nich niejasności i sprzeczności. Dlatego Cantor komentował pojawienie się wielkości niespełniających aksjomatu Eudoksosa-Archimedesa w konstrukcji geometrii Veronesego jako pojawienie się „zarazka cholery" w podstawach matematyki.

Veronese był atakowany również w środowisku włoskim za wprowadzenie wielkości niespełniających aksjomatu Eudoksosa-Archimedesa w geometrii. Krytyka pochodziła przede wszystkim od Giuseppe Peana. Twórca aksjomatyki liczb naturalnych, który był zwolennikiem stosowania metod formalnych w geometrii, zarzucał Veronesemu nieścisłe i nieuzasadnione wprowadzenie wielkości niearchimedesowych do geometrii.

Krytyka geometrii Veronesego, której autorami byli luminarze matematyki końca XIX wieku, spowodowała, że jego nazwisko stało się głośne w świecie matematycznym. Do jego rozgłosu przyczyniło się też spektakularne zamknięcie całej sprawy. Sam David Hilbert w swoich *Grundlagen der Geome-*

trie wskazał model dla geometrii niearchimedesowej Veronesego. Oznaczało to – oczywiście względną – niesprzeczność jego systemu. To zaś, zgodnie z jedną z zasad filozofii matematyki Hilberta (być niesprzecznym = istnieć), świadczyło o matematycznym istnieniu obiektów niearchimedesowych wprowadzonych przez Veronesego.

Nie tylko jednak kwestia geometrii niearchimedesowej przyczyniła się do tego, że Veronese był znany w głównym środowisku matematycznym drugiej połowy XIX wieku, tzn. w środowisku niemieckojęzycznym. Włoch odbył studia inżynierskie i matematyczne na politechnice w Zurychu, a w latach 1880–1881 przebywał jako stypendysta przygotowujący dysertację doktorską na Uniwersytecie Lipskim, będąc uczniem samego Felixa Kleina. To też spowodowało, że dążył do wydania niemieckiego tłumaczenia swego głównego dzieła. Opublikowano je najpierw w języku włoskim w roku 1891 pod tytułem *Fondamenti di geometria a più dimensioni*. Już w 1894 roku ukazało się właśnie w Lipsku tłumaczenie niemieckie, zatytułowane *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen*. Veronese, który studia odbywał w języku niemieckim, nadzorował ów przekład i oceniał go bardzo wysoko.

Wyżej podane przyczyny wpłynęły na to, że włoski geometra, a dokładniej jego zasadnicze idee, był bardzo dobrze znany matematykom niemieckiego obszaru językowego. Z drugiej zaś strony powody, które podano na końcu, pozwalają traktować niemieckie tłumaczenie jego monumentalnego dzieła jako dobrą i wierną reprezentacje jego idei.

Trzeba jednak zauważyć, że dzieło włoskiego matematyka, obok znanych elementów jego dorobku: geometrii niearchimedesowej i geometrii rzutowej wielowymiarowej, zawiera także sporą porcję filozofii matematyki. Jest ona po części zlokalizowana w *Przedmowie autora*, po części zaś na początku samego korpusu dzieła – Veronese stara się tu wyraźnie budować swoją matematykę na założeniach filozoficznych.

Celem niniejszego artykułu jest analiza i próba uporządkowania Giuseppe Veronesego filozoficznych założeń matematyki. Postawione też zostanie pytanie o jej ewentualną aktualność.

Najpierw skupię się na kwestiach epistemologii i ontologii matematyki Veronesego.

Korpus swojego monumentalnego dzieła rozpoczyna on od czegoś, co można nazwać charakterystyką Podmiotu Myślącego, albo inaczej – charakterystyką Podmiotu Matematycznego. Pierwsze cztery paragrafy *Geometrii* stwierdzają, co następuje:

> § 1. Ja myślę.
>
> § 2. Ja myślę jedną rzecz albo więcej rzeczy.
>
> § 3. Ja myślę najpierw jedną rzecz (i) następnie jedną [inną – przyp. J.D.] rzecz.
>
> § 4. *Def.* To, co w myśleniu odpowiada rzeczy, jest nazywane przedstawieniem, pojęciem albo duchowym wyobrażeniem tej rzeczy[1].

---

[1] „§ 1. Ich denke.
§ 2. Ich denke ein Ding oder mehrere Dinge.
§ 3. Ich denke zuerst ein Ding , nachher ein Ding.

W punkcie wyjścia swojego wykładu matematyki (geometrii) Veronese przyjmuje istnienie Podmiotu Myślącego. Choć stwierdzenie pierwszego paragrafu nie ma formalnie kształtu Kartezjuszowskiego *cogito ergo sum*, to jednak wydaje się do niego nawiązywać. Przede wszystkim pierwsze stwierdzenie matematyki Veronesego jest podatne na tę samą krytykę co argument Kartezjusza. Ten ostatni podważyli stopniowo empiryści brytyjscy George Berkeley i David Hume. Berkeley generalnie rozerwał arystotelesowski związek pomiędzy przypadłością a koniecznym według tradycji arystotelesowskiej jej „podłożem", czyli substancją. Hume wyciągnął z tego następujący wniosek: skoro generalnie przypadłość nie wymaga „podłoża", czyli substancji, „na" której istnieje, to myślenie nie wymaga takiego „podłoża" w postaci „ja", podmiotu (który myśli).

Najprawdopodobniej krytyka Hume'a nie była znana Veronesemu. W każdym razie bez żadnych wyjaśnień – niejako bezproblemowo – związał on myślenie z podmiotem (myślącym). Na mocy – przyjętych *implicite* – założeń metafizyki Arystotelesowskiej uważał *cogito ergo sum* za wyrażenie prawdziwe. Poza tym włoski matematyk twierdził *explicite*: „nikt nie może w istocie wątpić w istnienie naszego rozumu

---

§ 4. *Def.* Das, was in dem Gedanken einem Ding entspricht, wird *Vorstellung, Begriff oder geistige Vorstellung* des Dinges genannt". G. Veronese, *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen*, Leipzig 1894.

(*Verstand*) i jego logicznego uposażenia bez popadnięcia w sprzeczność”[2].

W stwierdzeniu Veronesego można znaleźć w istocie trzy tezy:

1. Istnienie Podmiotu jest niepowątpiewalne.
2. Podmiot (*Verstand*) wyposażony jest w logikę. Trzeba podkreślić, że ta teza nie jest powszechnie przyjmowana. I tak np. intuicjoniści uważają, że matematyka jest swobodną działalnością (twórczością) rozumu, logika zaś jest czymś w stosunku do niej wtórnym. Zasada konstruktywizmu (konieczności wykonania konstrukcji obiektu matematycznego) prowadziła do odejścia od logiki klasycznej (ku intuicjonistycznej). Z kolei w wypadku Veronesego logika jest na wyposażeniu Podmiotu Matematycznego, jest *a priori*. Jest ona też wcześniejsza od matematyki – matematyka może być uprawiana jedynie zgodnie z pryncypiami „wcześniejszej” logiki. Dalsze badania pokażą, że chodzi o logikę klasyczną.
3. Podważenie istnienia Podmiotu prowadzi do sprzeczności[3].

---

[2] „Niemand kann in der That an der Existenz unseres Verstandes und seiner logischen Verrichtungen zweifeln, ohne sich zu wiedersprechen”. G. Veronese, dz. cyt., s. 10.

[3] Tutaj analizowane zdanie Veronesego interpretowane jest następująco: podważenie istnienia Podmiotu prowadzi do sprzeczności i podważenie Jego uposażenia logicznego prowadzi do sprzeczności. Wydaje się, że właśnie taką treść wiązał włoski matematyk ze swoim zdaniem.

Powstaje oczywiście pytanie, o jaką sprzeczność chodzi tutaj Veronesemu. Wydaje się, że inaczej niż w pierwszych czterech paragrafach korpusu swojej matematyki Veronese odwołuje się *implicite* w cytowanym tekście z *Przedmowy* do argumentu Kartezjusza. Rozumowanie, które prowadzi do sprzeczności – przy poważeniu istnienia Podmiotu – można by rekonstruować następująco:

1. *non sum*	(treść wątpliwości – założenie)
2. *cogito*	(treść doświadczenia)
3. *cogito ergo sum*	(na podstawie zasad metafizyki Arystotelesa)
4. *sum*	(opuszczanie implikacji 3, 2 [Podmiot wyposażony jest w logikę], sprzeczność 4, 1 [Podmiot wyposażony jest w logikę])
Zatem: *sum*	(negacja założenia generującego sprzeczność: 4)

Sprzeczność, do której według Veronesego prowadzi zaprzeczenie istnienia Podmiotu, występuje w punkcie 4. Wobec przesłanki trzeciej można oczywiście wysunąć zastrzeżenia, które – jak wspomniano wyżej – sformułowali już empiryści brytyjscy.

Obok apriorycznego uposażenia w logikę klasyczną Podmiot Matematyczny wykazuje, według Veronesego, pewną zasadniczą zdolność. Włoski matematyk w swoim komentarzu do § 2 („Ja myślę jedną rzecz albo więcej rzeczy") podaje następpujące przykłady (rzeczy): „Moje Ja jest *jedną* rzeczą, działania myślenia, sąd, wniosek, zwierzęta i rośliny to *więcej* rzeczy”[4].

Wskazanie własnego Ja jako przedmiotu myślanego przez Podmiot dowodzi, że według Veronesego Podmiot Myślący jest samoświadomy[5]. Wydaje się też, że skoro Podmiot Myślący jest samoświadomy, to poznaje on zasady logiki, które są jego apriorycznym uposażeniem właśnie w aktach samoświadomości. Nie widać bowiem innej możliwości dotarcia przez Podmiot do apriorycznie „zadanych” zasad logiki.

Wyniki analizy pierwszych czterech paragrafów korpusu matematyki Veronesego wspomaganej fragmentem *Przedmowy* można ująć syntetycznie w następujący sposób:

---

[4] „Mein Ich ist *ein* Ding, die Handlungen des Denkens, ein Urtheil, ein Schluss, die Tiere und die Pflanzen sind *mehrere* Dinge”. G. Veronese, dz. cyt., s. 1.

[5] Dalsze badania pokażą, że według koncepcji Veronesego należy rozróżnić „myślenie własnego Ja (i dowolnego innego przedmiotu)” i „myślenie o własnym Ja (i o dowolnym innym przedmiocie)”. Już tu jednak należy zaznaczyć, że według Veronesego zachodzi pomiędzy nimi zasadniczy związek: „§ 18. Wenn wir ein Urtheil aufstellen, so können wir nachher beurtheilen, ob dieses Urtheil richtig ist oder nicht; in einem solchen Fall wird das Urtheil als ein dem Gedanken gegebenes Ding betrachtet. Auf gleiche Weise können mehrere Dinge, die zuerst von dem gesetzt sind, nachher als dem Gedanken gegeben betrachtet werden und zwar entweder in der Ordnung, in der wir sie betrachtet haben, oder unabhänging von dieser Ordnung, das heißt indem wir von derselben absehen. Und umgekehrt: Da einem dem Gedanken gegebenen Ding ein Begriff entspricht, mittels dessen wir es mit anderen Dingen vergleichen, so können wir es mittels dieses Begriffs als von dem Gedanken gesetzt auffassen. Es gilt deshalb der folgende Satz: Ein von den Gedanken gesetztes Ding kann nachher als dem Gedanken gegeben betrachtet werden und umgekehrt”. G. Veronese, dz. cyt.

1. Istnieje Podmiot;
2. Podmiot wyposażony jest w logikę;
3. Podmiot myśli;
4. Podmiot myśli zgodnie z zasadami logiki (w którą jest wyposażony);
5. Podmiot jest samoświadomy;
6. Podmiot myśli o swoim myśleniu;
7. Podmiot myśli o swoim myśleniu zgodnie z zasadami logiki;
8. Podmiot na drodze samorefleksji może *explicite* poznać zasady swego myślenia: logikę.

Jak się wydaje, należy tu jeszcze uwzględnić przypis, którym włoski matematyk opatrzył pierwszy paragraf swojego tekstu („Ja myślę"). Stwierdza on tam, że: „W ten sposób wyrażamy zdolność myślenia i wyprowadzamy stąd zasady abstrakcyjnych form, przy czym jednak myślenie nie jest jakimś szczególnym przedmiotem badań matematycznych"[6].

Abstrakcyjne formy to – jak później zostanie jeszcze wyjaśnione – przedmioty matematyki. Dla prowadzonych tutaj dociekań istotne jest stwierdzenie Veronesego, że myślenie nie jest (jakimś szczególnym) przedmiotem badań matematycznych. Nie wyklucza jednak włoski matematyk tego, iż myślenie – to

[6] „Damit drücken wir die Fähigkeit zu denken und die Handlung des Denken aus und leiten daraus die Principien der abstracten Formen ab, ohne dass jedoch das Denken ein besonderer Gegenstand der mathematischen Forschung wäre". G. Veronese, dz. cyt., s. 1.

stojące, według niego, u początku matematyki – jest (będzie) przedmiotem badań jakiejś innej dyscypliny naukowej. Trzeba dodać, że gdyby takie badania były prowadzone „w duchu" Veronesego, to koniecznie, obok myślenia, musiałyby uwzględnić Podmiot Myślący. Pokazano bowiem, że włoski matematyk związał nieoddzielnie, w duchu arystotelesowsko-kartezjańskim, myślenie z Podmiotem (Myślącym).

W każdym razie nie wyklucza Veronese badań myślenia i badań Podmiotu Myślącego, stojących u początków matematyki, w ramach takich dyscyplin jak filozofia (epistemologia) matematyki (ale chyba nie podstawy matematyki), psychologia, neurobiologia, a także w ramach ich interdyscyplinarnych kombinacji. Sam jednak nie przejawiał żadnych ambicji do prowadzenia takich badań. Raczej przyjmował on fenomen myślenia i związany z tym, według niego, fakt istnienia Podmiotu Myślącego (wyposażonego *a priori* w logikę) jako konieczne warunki (uprawiania) matematyki.

Dalsze badanie filozofii matematyki Veronesego będzie wymagać wprowadzenia – obok takich pojęć, jak myślenie, Podmiot Myślący, logika – pojęcia przedmiotu. Zatem do analiz epistemologicznych dodane zostaną elementy ontologii. Jest to niezbędne do dalszej charakterystyki epistemologii matematyki włoskiego geometry. Charakterystykę przedmiotów, którymi zajmuje się matematyka, przedstawię później.

Pojęcie przedmiotu pojawiło się już w czterech pierwszych paragrafach korpusu matematyki Veronesego. Warto je w tym miejscu jeszcze raz przypomnieć:

§ 1. Ja myślę.

§ 2. Ja myślę jedną rzecz albo więcej rzeczy.

§ 3. Ja myślę najpierw jedną rzecz (i) następnie jedną [inną – przyp. J.D.] rzecz.

§ 4. *Def.* To, co w myśleniu odpowiada rzeczy, jest nazywane przedstawieniem, pojęciem albo duchowym wyobrażeniem tej rzeczy.

Wypada zwrócić uwagę, że w języku niemieckim istnieje rozróżnienie między *ein Ding denken* oraz *an einen Ding denken*, czyli między *myśleć (pewną) rzecz* oraz *myśleć o (pewnej) rzeczy*. W drugim i trzecim paragrafie Veronese używa wyłącznie pierwszej formy. Pisze on o *myśleniu rzeczy*, a nie o *myśleniu o rzeczy*.

Włoski matematyk nie definiuje tego, czym jest przedmiot. Nie wiąże go na przykład z istnieniem. W wyjaśnieniu do swojego drugiego paragrafu podaje natomiast *de facto* pewne przykłady przedmiotów. Veronese pisze: „Moje Ja jest *jedną* rzeczą, działania myślenia, sąd, wniosek, zwierzęta i rośliny to więcej rzeczy”[7]. Trzeba w tym miejscu przypomnieć jeszcze raz treść drugiego paragrafu, który został zaopatrzony w powyższą uwagę. W drugim paragrafie stwierdzono: „§ 2. Ja myślę jedną rzecz albo więcej rzeczy”.

Otóż zestawienie tych dwóch tekstów stwarza pewną sytuację problemową. Na pewno można myśleć wniosek, można

[7] „Mein Ich ist *ein* Ding, die Handlungen des Denkens, ein Urtheil, ein Schluss, die Tiere und die Pflanzen sind *mehrere* Dinge”. G. Veronese, dz. cyt., s. 1.

się zgodzić, że można myśleć (wydawać) sąd – który jest tutaj czymś odmiennym od przedmiotu abstrakcyjnego, jak pojmowało go wielu filozofów, np. Immanuel Kant – można się też zgodzić, że można myśleć samego siebie, ale nie można myśleć ani zwierząt, ani roślin. Zwykło się myśleć o tych przedmiotach, a nie te przedmioty.

Narzuca się tu podział na przedmioty mentalne, będące produktem myślenia lub fragmentem (strumienia?) myślenia, i przedmioty niementalne, zapewne zewnętrzne w stosunku do Podmiotu Myślącego. Na taki przynajmniej podział zdaje się wskazywać zwyczaj językowy: myślenia pewnych przedmiotów i myślenia o pewnych przedmiotach.

Można by wprawdzie bronić hipotezy, że włoski matematyk wyliczył tu tylko takie przedmioty, które są obiektami mentalnymi w wyżej podanym znaczeniu. Ale wtedy trzeba by przyjąć, że Veronese reprezentował jakiś rodzaj solipsyzmu, czy idealizmu subiektywnego w stylu Berkeleyowskim.

Tak jednak nie jest. W dalszym ciągu swojego korpusu matematycznego wprowadza bowiem pojęcie przedmiotów duchowych (*geistige Dinge*)[8]. Należy przyjąć, że wprowadzenie takiej kategorii przedmiotów oznaczało, iż włoski matematyk uważał, że niepusty jest zbiór będący dopełnieniem (do uniwersum przedmiotów) zbioru przedmiotów duchowych. A zatem istnieją przedmioty nie-duchowe. Można je również – na mocy tekstów Veronesego – ulokować w rzeczywistości. Otóż stwier-

[8] Por. tamże, s. 17.

dza on w dalszych tekstach istnienie świata zewnętrznego (*Aussenwelt*)[9]. Trzeba przyjąć w tym miejscu, że chodzi o świat zewnętrzny w stosunku do Podmiotu Myślącego. Nie może być zatem mowy o jakiejś formie solipsyzmu w filozofii włoskiego matematyka. I właśnie w tym świecie zewnętrznym, który wspomniano, należy umieścić Veronesego przedmioty nie-duchowe.

Wydaje się, że zasadne jest tutaj utożsamienie przedmiotów duchowych, o których pisał włoski matematyk, ze scharakteryzowanymi powyżej obiektami mentalnymi. Tak więc w niesolipsystycznej rzeczywistości Veronesego występują z jednej strony przedmioty mentalne, z drugiej zaś przedmioty niementalne, które należą do świata zewnętrznego. Przedmioty mentalne zdefiniowano wcześniej jako produkty myślenia czy też fragmenty (strumienia?) myśli.

Wypada jeszcze w tym miejscu wskazać kontrowersję, która dała zasadniczy impuls prowadzonym powyżej rozważaniom na temat typów przedmiotów. Otóż w świetle powyżej sformułowanych wniosków trzeba stwierdzić, że nie wszystkie wyliczone przez Veronesego w jego wyjaśnieniu przedmioty mogą być zaliczone do zbioru przedmiotów mentalnych. Trzeba przyjąć, że wyliczył on zarówno przedmioty mentalne, jak i niementalne.

Warto jeszcze raz odnieść konstrukcję włoskiego matematyka do filozofii Kartezjusza. Francuski filozof, po ustaleniu istnienia „myślącego ja", korzystał z tego ustalenia jako z prze-

[9] Por. tamże.

słanki prowadzącej do ustalenia istnienia przedmiotów poza owym „myślącym ja”: Boga i przedmiotów materialnych (rozciągłych). Veronese natomiast w ogóle nie korzysta z ustaleń (założeń) dotyczących Podmiotu Myślącego w argumentacji dowodzącej istnienia świata zewnętrznego (*Aussenwelt*) lub przedmiotów niementalnych. Włoski matematyk bowiem w ogóle takiej argumentacji nie przedstawia. Jego filozofia obok założeń dotyczących Podmiotu Myślącego zawiera zatem szereg kolejnych mocnych założeń egzystencjalnych – właśnie tych dotyczących (istnienia) świata zewnętrznego i (istnienia) przedmiotów niementalnych.

Istnienie przedmiotów mentalnych w ontologii wynikało z założenia istnienia myślenia i – tutaj przyjętej, choć nie wyrażonej przez włoskiego matematyka *explicite* – definicji przedmiotu mentalnego (przy założeniu podzielności [strumienia] myślenia).

Wypada w tym miejscu stwierdzić, że włoski geometra wyróżnił jeszcze pewną ważną podklasę przedmiotów mentalnych. W tym celu trzeba przypomnieć treść czwartego paragrafu korpusu matematyki Veronesego:

> § 4. *Def.* To, co w myśleniu odpowiada rzeczy, jest nazywane przedstawieniem, pojęciem albo duchowym wyobrażeniem tej rzeczy.

Należy zauważyć, że włoski matematyk stawia w tym tekście znak równości m.in. pomiędzy przedstawieniami (*Vorstel-*

lungen) i pojęciami (*Begriffe*). Jest to zasadnicze uproszczenie w stosunku do zastanej tradycji. Wystarczy tutaj wskazać chociażby na subtelne rozróżnienie między przedstawieniem a pojęciem dokonane przez Bernarda Bolzana. Pojęcie (przedstawienie) jest zdaniem włoskiego matematyka tym, „co w myśleniu odpowiada rzeczy”. Zatem pojęcie (przedstawienie) jest tu pojmowane jako coś będącego „fragmentem”, „częścią” myśli. Zgodnie z przedstawioną powyżej koncepcją przedmiotu mentalnego pojęcie (przedstawienie) jest przedmiotem mentalnym.

Trzeba zaznaczyć, że odpowiada to koncepcji – walczącego z „psychologizmem”[10] w podstawach logiki i matematyki – Bolzana. Ale nie do końca. Matematyk z Pragi obok pojęć (przedstawień) subiektywnych – odpowiadają one proponowanej tutaj definicji przedmiotów mentalnych – wprowadził też abstrakcyjne (pozaczasowe i pozaprzestrzenne) pojęcia (przedstawienia) obiektywne. Ich porządkowi miał – w idealnym przypadku – odpowiadać jednojednoznacznie porządek pojęć (przedstawień) subiektywnych. Włoski matematyk ograniczył się natomiast wyłącznie do Bolzanowskich pojęć (przedstawień) subiektywnych. Może to budzić podejrzenie, że Veronese – przynajmniej nieświadomie – skłaniał się w stronę psychologizmu. Do kwestii tej przyjdzie powrócić w podsumowaniu niniejszego artykułu.

Warto jeszcze raz zwrócić uwagę, że według włoskiego matematyka pojęcie (przedstawienie) to „to, co w myśleniu od-

[10] Psychologizm nie był wtedy tak nazywany.

powiada rzeczy". Veronese nie precyzuje, o jakie przedmioty (rzeczy) tutaj chodzi. Należy zatem przyjąć, że chodzi o przedmioty wszelkiego rodzaju: zarówno mentalne, jak i niementalne. Zatem Podmiot Myślący tworzy w swym myśleniu pojęcia zarówno takich przedmiotów jak wnioskowanie, które samo jest – według Veronesego – elementem myślenia (przedmiotem mentalnym), jak i takich przedmiotów jak wyspa Capri, która należy do świata zewnętrznego. Innymi słowy, każdy przedmiot – zarówno mentalny, jak i niementalny – może mieć swój „obraz" w myśleniu, a więc taki „obraz", który jest przedmiotem mentalnym. Tym „obrazem" mentalnym każdego (potencjalnie) przedmiotu jest pojęcie (przedstawienie). W przypadku przedmiotu należącego do świata zewnętrznego można to ująć i w taki sposób: jeśli myślę o wyspie Capri, to myślę pojęcie wyspy Capri. Pojęcie wyspy Capri jest przedmiotem mentalnym, choć wyspa Capri jest przedmiotem niementalnym, jest przedmiotem należącym do świata zewnętrznego (*Aussenwelt*).

Wydaje się, że w ten sposób można wyjaśnić kontrowersję, która mogłaby się rodzić wokół komentarza Veronesego do drugiego paragrafu jego korpusu matematycznego („§ 2. Ja myślę jedną rzecz albo więcej rzeczy"): „Kiedy się myśli, myśli się jakąś rzecz. Ja nie myślę żadnej rzeczy, znaczy: Ja nie myślę"[11].

Zgodnie z tym, co powiedziano wyżej, nie można myśleć wyspy Capri, ponieważ nie jest ona przedmiotem mentalnym.

---

[11] „Wenn man denkt, denkt man irgend ein Ding. Ich denke kein Ding, bedeutet: Ich denke nicht". G. Veronese, dz. cyt., s. 1.

Można myśleć o wyspie Capri. Ale kiedy się o niej myśli, myśli się pojęcie wyspy Capri. Owo pojęcie jest przedmiotem mentalnym, jest przedmiotem, który się myśli. A zatem nawet wtedy, kiedy myśli się o jakimś przedmiocie niementalnym, myśli się pewien przedmiot mentalny.

W szóstym paragrafie swojego korpusu matematycznego Veronese wyjaśnia *explicite* różnicę między *denken ein Ding* oraz *denken an ein Ding*. Stwierdza on: „Kiedy myślę pewną rzecz, to mówi się: Rzecz jest przez myślenie *dana*, kiedy myślę o pewnej rzeczy, mówi się: rzecz jest *myśleniu* dana. *Przykł.* Budowa sądu jest przedmiotem danym przez myślenie; Człowiek Karol jest przedmiotem danym myśleniu”[12].

Należy jeszcze raz wyjaśnić, że myślany może być tylko przedmiot mentalny, w tym pojęcia przedmiotów niementalnych (oraz oczywiście mentalnych), a także pojęcia pojęć, pojęcia pojęć pojęć itd. Podmiot Myślący natomiast może myśleć o każdym dowolnym przedmiocie.

Veronese formułuje w dalszym fragmencie swego korpusu matematycznego coś, co można by nazwać zasadą równoważności myślenia. Warto w tym miejscu przytoczyć dłuższy fragment paragrafu osiemnastego:

---

[12] „§ 6. *Def.* Wenn ich ein Ding denke, so sagt man: Das Ding ist von dem Gedanken *gegeben* oder *gesetzt*, wenn ich an ein Ding denke, so sagt man: Das Ding ist *dem* Gedanken gegeben. *Beisp.* Der Aufbau eines Urtheils ist ein von dem Gedanken gesetztes Ding; der Mensch Carl ist ein dem Gedanken gegebenes Ding”. G. Veronese, dz. cyt.

Kiedy wydajemy sąd (*Urtheil*) [kiedy sąd jest przez myślenie dany – przyp. J.D.], możemy potem osądzić, czy ten sąd jest poprawny (*richtig*), czy też nie: w takim wypadku [osądzenia – przyp. J.D.] sąd jest traktowany jako dany myśleniu. W podobny sposób więcej rzeczy, które najpierw są przez myślenie dane, może być później traktowane jako dane myśleniu. […] I odwrotnie: ponieważ każdemu przedmiotowi danemu myśleniu odpowiada jakieś pojęcie, za pomocą którego ten przedmiot porównujemy z innymi przedmiotami, to możemy ów przedmiot, za pośrednictwem owego pojęcia, traktować jako dany przez myślenie. A zatem obowiązuje następujące zdanie:

Przedmiot dany przez myślenie może później być traktowany jako dany myśleniu i na odwrót.

Przykł. Przez powtórzenie tego samego duchowego działania konstruujemy np. liczbę dwa, potem jednak możemy tę liczbę uważać jako przedmiot dany myśleniu[13].

[13] „§ 18. Wenn wir ein Urtheil aufstellen, so können wir nachher beurtheilen, ob dieses Urtheil richtig ist oder nicht; in einem solchen Fall wird das Urtheil als ein dem Gedanken gegebenes Ding betrachtet. Auf gleiche Weise können mehrere Dinge, die zuerst von dem gesetzt sind, nachher als dem Gedanken gegeben betrachtet werden und zwar entweder in der Ordnung, in der wir sie betrachtet haben, oder unabhänging von dieser Ordnung, das heißt indem wir von derselben absehen. Und umgekehrt: Da einem dem Gedanken gegebenen Ding ein Begriff entspricht, mittels dessen wir es mit anderen Dingen vergleichen, so können wir es mittels dieses Begriffs als von dem Gedanken gesetzt auffassen. Es gilt deshalb der folgende Satz:
Ein von den Gedanken gesetztes Ding kann nachher als dem Gedanken gegeben betrachtet werden und umgekehrt.

Otóż należy zaznaczyć, że sformułowane i uzasadniane w powyższym tekście twierdzenie jest koniunkcją dwóch zdań („i na odwrót"). Veronese przytacza dwa przykłady, które mają potwierdzać owo zdanie. Można je uzasadnić i w taki sposób: jeśli myśli się jakiś przedmiot, to można też o tym przedmiocie myśleć. Zaś tym – zgodnie z tym, co pisał włoski matematyk – co odpowiada w myśleniu temu przedmiotowi jest pojęcie. Podmiot Myślący myśli (wydaje) pewien sąd, ale może myśleć o owym sądzie, np. zastanawiając się, czy jest on prawdziwy, czy też fałszywy. Tym, co w myśleniu odpowiada owemu sądowi (choć sam jest on przedmiotem mentalnym), jest pojęcie owego sądu.

Trudno natomiast zgodzić się z drugim zdaniem powyższej koniunkcji. Wypada je w tym miejscu sformułować. Brzmi ono: przedmiot dany myśleniu może później być traktowany jako dany przez myślenie.

Chodzi o dowolny przedmiot. Jest to więc w istocie zdanie rozpoczynające się od kwantyfikatora ogólnego: dla każdego przedmiotu. Wystarczy zatem jeden kontrprzykład, aby obalić to twierdzenie. Można odwołać się do przykładu podawanego już wyżej. Wyspa Capri jest dana myśleniu: Podmiot Myślący myśli o wyspie Capri. Ale Podmiot Myślący nie może myśleć wyspy Capri (Podmiot Myślący może myśleć wyłącznie pojęcie wyspy Capri): wyspa Capri nie może być dana przez myślenie.

Beisp. Durch die Wiederholung derselben geistigen Handlung construieren wir z. B. die Zahl zwei, dann aber können wir diese Zahl als ein dem Gedanken gegebenes Ding ansehen". G. Veronese, dz. cyt.

Łatwo stwierdzić, że obalone zdanie jest trywialnie prawdziwe, gdy kwantyfikuje się po przedmiotach mentalnych. Uzupełnieniem kontrprzykładu jest wskazanie na uzasadnienie, które Veronese starał się dać podważonemu twierdzeniu: jest ono mętne, nie mieści się w ramach tego, co zwykło się kwalifikować jako uzasadnienie w filozofii analitycznej.

Podsumowując w tym miejscu analizę tego wątku filozofii Veronesego, który dotyczy „przecięcia" problematyki Podmiotu Myślącego i podstaw ontologii, należy stwierdzić, że włoski matematyk nie włożył wielkiego wysiłku w rozpracowanie tematyki. Wydaje się on zaledwie „szkicować" niektóre kwestie, nie przykładając należytej uwagi do szczegółów. Stąd właśnie biorą się wadliwości oraz niejasności jego koncepcji powodujące pewne trudności interpretacyjne. Trzeba też zapytać, czy nie można było uprościć Veronesego ujęcia myślenia, wprowadzając poziom przedmiotowy myślenia (myślenie przedmiotów), poziom metaprzedmiotowy (myślenie o przedmiotach, za pomocą pojęć), poziom metametaprzedmiotowy (myślenie o myśleniu o przedmiotach, za pomocą pojęć pojęć) itd. Zapewne w ten sposób wprowadzono by większą przejrzystość prowadzonych analiz, ale lektura tekstu włoskiego matematyka nie wydaje się zawierać takiej sugestii. Tak więc posłużenie się takim narzędziem byłoby zdecydowanym „naddatkiem" w stosunku do jego intencji.

Dalsze analizy dotyczące Podmiotu Myślącego Veronesego muszą koniecznie podjąć kwestię innego jeszcze, niż logika, uposażenia apriorycznego Podmiotu. Włoski matematyk wskazuje na owo *a priori* niezwykle zdawkowo, zaledwie w jednym krótkim przypisie:

> Następstwo naszych przedstawień lub umiejętność traktowania wielu rzeczy jedna po drugiej daje nam ogląd pewnego przedmiotu, bez którego nie moglibyśmy rozwinąć naszego myślenia. Owym przedmiotem jest czas. Abstrahujemy jednak od czasu jako elementu naszych rozważań[14].

Włoski matematyk wychodzi tutaj od pewnych podstawowych (samo)obserwacji Podmiotu Myślącego. Otóż Podmiot potrafi rozpoznać następstwo przedstawień (pojęć) w swoim myślenia, a także zdolność traktowania (zajmowania się) przedmiotów „po kolei". Należy mocno podkreślić, że Podmiot nie musi dla rozpoznania tych zdolności wychodzić poza swoje myślenie, nie musi odwoływać się do świata zewnętrznego. Według włoskiego matematyka owe (samo)obserwacje dają Podmiotowi ogląd (*Anschauung*) czasu. Zaskakujące jest stwierdzenie Veronesego, że czas jest przedmiotem – a nie np. pojęciem (przedstawieniem). Swego stwierdzenia dotyczącego przedmiotowości czasu włoski matematyk w żaden sposób nie wyjaśnia. Nie

[14] „Die Aufeinanderfolge unserer Vorstellungen oder das Vermögen mehrere Dinge das eine nach dem anderen betrachten zu können gibt uns die Anschauung von einem gewissen Ding, ohne welches wir unserem Gedanken nicht entwickeln können. Dieses gewisse Ding ist die Zeit. Wir abstrahieren jedoch von der Zeit als Element unserer Betrachtungen". G. Veronese, dz. cyt., s. 8.

wiadomo w szczególności, czy jest to przedmiot zewnętrzny w stosunku do świata Podmiotu Myślącego, czy też nie. W każdym razie z faktu, że samoobserwacja Podmiotu prowadzi go do oglądu (*Anschauung*) czasu, wynika, iż albo czas jest przedmiotem „w" Podmiocie, albo też przynajmniej w Podmiot Myślący „wbudowane" jest jakieś *a priori* czasu. Czas (*a priori* czasu) jest w Podmiocie pierwotne w stosunku do myślenia. Co więcej, rozwój myślenia Podmiotu koniecznie wymaga „wcześniejszego" (*a priori*) czasu w Podmiocie Myślącym.

Veronese podkreśla, że nie czyni czasu przedmiotem swoich rozważań. Jest to zasadniczy brak jego filozofii matematyki. Tym bardziej że okaże się, iż właśnie czas, lub ogląd (*Anschauung*) czasu, stanowi „materiał", z którego Podmiot Myślący konstruuje arytmetykę i – szerzej – czystą matematykę. Pomysł oczywiście pochodzi od Kanta. Ale filozof z Królewca, znajdując w apriorycznych formach naoczności – czasie i przestrzeni – konieczny „materiał" do konstrukcji matematyki, poświęcił im i ich niezbędności znaczny i istotny fragment swoich badań. Veronese natomiast zbywa w istocie całą kwestię jednym przypisem.

Trzeba jednak zaznaczyć, że czas (*a priori* czasu) legł już u podstaw jednego z pierwszych paragrafów korpusu matematyki Veronesego. Wypada go w tym miejscu przypomnieć: „§ 3. Ja myślę najpierw jedną rzecz (i) następnie jedną [inną – przyp. J.D.] rzecz". Myślenie „najpierw" i „następnie" opiera się niewątpliwie na założeniu (*a priori*) czasu. Poza tym leży ono u podstaw arytmetyki. Włoski matematyk odwołuje się w swej konstrukcji arytmetyki do stworzonego przez siebie aparatu teoriomnogościowo-mereologicznego. Czasami jednak opisuje ją bez odwołania do szczegółów technicznych. Wtedy stwierdza:

> *Przykł.* Przez powtórzenie tego samego duchowego działania konstruujemy np. liczbę dwa, potem jednak możemy tę liczbę uważać jako przedmiot dany myśleniu.

Z powyższego tekstu wynika, że Podmiot Myślący konstruuje liczbę dwa – a potem następne liczby naturalne – przez powtórzenie pewnego mentalnego działania. Powtórzenie działania wymaga niewątpliwie leżącego u jego podstaw (*a priori*) czasu.

Do kwestii konstruktywizmu w filozofii matematyki Veronesego przyjdzie jeszcze powrócić, kwestię *a priori* czasu w Podmiocie Myślącym można natomiast podsumować następująco:

1. Podmiot Myślący ma zdolność traktowania rzeczy „jedna za drugą”;
2. Podmiot Myślący rozpoznaje następstwo przedstawień (pojęć);
3. Te zdolności Podmiotu Myślącego dają mu ogląd czasu;
4. Czas jest przedmiotem;
5. Nie jest rozstrzygnięte, czy czas jest przedmiotem w Podmiocie Myślącym, czy poza nim;
6. Czas lub *a priori* czasu jest w Podmiocie Myślącym;
7. Podmiot Myślący rozpoznaje czas w sobie bez odwołania do świata zewnętrznego;

8. Czas jest w Podmiocie Myślącym przed myśleniem;
9. Podmiot Myślący nie może rozwijać myślenia bez (*a priori*) czasu;
10. Czas (*a priori* czasu) pozwala rozwinąć Podmiotowi Myślącemu arytmetykę.

Skoro powyżej analizowano zagadnienie czasu, to warto zaraz potem podjąć kwestię przestrzeni w posiadających wydźwięk filozoficzny wypowiedziach włoskiego matematyka. Veronese kwituje to zagadnienie bardzo krótko:

> Przez oglądową przestrzeń (*Anschauungsraum*) rozumiemy tutaj przedstawienie (pojęcie) świata zewnętrznego, a nie sam ów świat zewnętrzny[15].

Włoski matematyk łączy pojęcie oglądu z pojęciem przestrzeni. Ta zbitka pojęciowa wskazywałaby na „ślady" kantowskiego podejścia do zagadnienia przestrzeni. Tak jednak nie jest. Przestrzeń – ta której ogląd posiada Podmiot Myślący – nie jest *a priori*; nie jest aprioryczną formą naoczności. Oglądowa przestrzeń jest pojęciem Podmiotu Myślącego wytworzonym przez „ogląd" zmysłowy świata zewnętrznego.

O ile zatem Veronese zdaje się rozwiązywać zagadnienie czasu w duchu kantowskim – czas lub *a priori* czasu jest w Pod-

[15] „Unter Anschauungsraum verstehen wir hier die Vorstellung von der äusseren Welt und nicht etwa diese selbst". G. Veronese, dz. cyt., s. 17.

miocie Poznającym – o tyle przestrzeń, która występuje w poznaniu świata zewnętrznego, jest czymś w świecie zewnętrznym, a nie jest *a priori* w Podmiocie Myślącym.

Dlaczego włoski matematyk przyjął takie właśnie rozwiązanie? Veronese odchodzi od głównego nurtu rozwiązania kantowskiego, ponieważ XIX wiek przyniósł pluralizm geometrii. Sam w swym monumentalnym dziele zajmuje się on geometriami *n*-wymiarowymi i dlatego nie mógł uznać istnienia jednej i jedynej apriorycznej przestrzeni. Zaproponowane przez niego rozwiązanie idzie w tym kierunku, że Podmiot Myślący ma dzięki poznaniu zmysłowemu pojęcie jednej przestrzeni świata zewnętrznego, a inne przestrzenie są przedmiotami mentalnymi – produktem myślenia Podmiotu Myślącego – których pojęciami posługuje się w (różnych) geometriach.

Generalnie trzeba stwierdzić, że podejście Veronesego do kwestii czasu i przestrzeni przypomina rozwiązanie intuicjonistów. Te same też są powody rezygnacji z *a priori* przestrzeni świata zjawiskowego w Podmiocie. *A priori* czasu zaś w obydwu przypadkach wykorzystane jest do konstrukcji liczb naturalnych (arytmetyki).

Wypada teraz przejść do ogólnej charakterystyki przedmiotów, którymi, według Veronesego, zajmuje się matematyka. Włoski matematyk odpowiednie definicje przedstawił w korpusie swej matematyki i uzupełnił pewnymi wyjaśnieniami w *Przedmowie*. W paragrafie 38 podał następującą definicję abstrakcyjnych przedmiotów matematycznych:

> Przedmioty duchowe (mentalne), których charakterystykami są całość, części, porządek, rodzaj pozycji, albo które dają się porównywać za pomocą tych charakterystyk, nazywają się *abstrakcyjnymi matematycznymi formami* albo *wielkościami*, nawet jeśli nie uwzględnia się niektórych wyżej wymienionych charakterystyk[16].

W tym miejscu nie wydaje się konieczne wyjaśnianie wszystkich terminów, którymi posługiwał się Veronese. Niech wystarczy wyjaśnienie jednego podanego przez niego terminu:

> Charakterystyka (*contragesso*) pewnej rzeczy jest tym, za pomocą czego możemy ową rzecz porównywać z innymi rzeczami. *Przykł.* Caius jest jako człowiek równy Tytusowi, ale Caius i Tytus mogą być różni przy odniesieniu do innych ich charakterystyk[17].

Istotne jest stwierdzenie włoskiego matematyka, że abstrakcyjne formy matematyczne to przedmioty duchowe (*geistige*), czyli – zgodnie z przyjętą tu terminologią – przedmioty

---

[16] „§ 38. *Def. I.* Die geistigen Gegenstände, deren Merkmale das Ganze, die Theile, die Ordnung und die Art der Position sind oder welche sich mittels dieser Merkmale vergleichen lassen, heissen *abstracte mathematische Formen oder Grössen*, auch wenn von einigen der obengennanten Merkmale abgesehen wird". G. Veronese, dz. cyt.

[17] „§ 9. *Def. I.* Das Merkmal (*contragesso*) eines Dinges ist dasjenige, mittels dessen wir es mit anderen Dingen vergleichen können. *Beisp.* Caius ist dem Titius als Mensch gleich, aber Caius und Titius können im Bezug auf andere ihrer Merkmale verschieden sein". G. Veronese, dz. cyt.

mentalne. Są zatem abstrakcyjne formy matematyczne (czy też wielkości, jak chce Veronese) elementami myślenia Podmiotu Myślącego – są jego „produktem". Opatrzenie owych przedmiotów drugą nazwą: „wielkość", o wielkim ciężarze gatunkowym w dziejach matematyki, każe się bliżej przyjrzeć abstrakcyjnym formom matematycznym. Matematyka przecież wielokrotnie w swych dziejach, od starożytności greckiej, określana była jako nauka o wielkościach.

Otóż Veronese stwierdza, że abstrakcyjne formy matematyczne to przedmioty, którymi zajmują się nauki ścisłe – logika i matematyka czysta:

> Liczba, która w pierwszym ujęciu jest efektem liczenia przedmiotów, mogących być także czysto abstrakcyjnymi, należy do drugiej kategorii, ponieważ nie jest potrzebny żaden przedmiot poza myśleniem, który ją przedstawia, tzn. musiałby dać jej obraz, aby otrzymała znaczenie matematyczne. Przedmioty drugiej kategorii nazywają się *formami*, a nauki, które zajmują się formami – naukami *formalnymi*. Takimi są logika i czysta matematyka. W tych naukach prawda pochodzi ze zgodności różnych aktów myślenia[18].

[18] „Die Zahl, welche in ihrer ersten Bildung das Resultat der Verrichtung des Zählens von Gegenstaenden ist, die auch rein abstract sein können, gehört dagegen der zweiten Kategorie an, weil kein Gegenstand ausserhalb des Gedankens nöthig ist, welche sie darstellen, d.h. ihrer Bild liefern müsste, damit sie ihre mathematische Bedeutung erhalte. Die Dinge der zweiten Kategorie heissen *Formen* und die Wissenschaften, welche sich mit den Formen beschäftigen, *formale*.

Oznacza to, że logika i matematyka czysta zajmują się abstrakcyjnymi formami, które, zgodnie z tym, co powiedziano wyżej i co zostało potwierdzone w ostatnim tekście, są przedmiotami mentalnymi. Logikę i matematykę czystą można by uprawiać w izolowanym, solipsystycznym świecie Podmiotu Myślącego.

Trzeba zauważyć, że Veronese nie rozróżnia *explicite* przedmiotów matematyki czystej i przedmiotów logiki. Te pierwsze można z pewnością – zgodnie z jego wskazaniem – nazwać abstrakcyjnymi formami matematyki. Te drugie, zgodnie z tym, co twierdzi on w swym ostatnim tekście, to również formy abstrakcyjne. Konsekwentnie trzeba by je nazwać abstrakcyjnymi formami logicznymi. Ale oprócz tego, że są one przedmiotami mentalnymi, więcej o nich na podstawie tekstów włoskiego matematyka nie da się powiedzieć.

Veronese podaje jednak jeszcze jedną kategorię przedmiotów, którymi zajmuje się matematyka.

> Kiedy pewnej konkretnej rzeczy (realnie poza myśleniem egzystującemu przedmiotowi) odpowiada pewna abstrakcyjna forma matematyczna, to owa rzecz nazywa się konkretną matematyczną formą[19].

Solche sind die Logik und die reine Mathematik. In diesen Wissenschaften geht die Wahrheit aus der Übereinstimmung verschiedenen Acte des Gedankens hervor". G. Veronese, dz. cyt., s. 7.

[19] „Wenn einem concreten Ding (einem reellen ausserhalb des Gedankens existirenden Gegenstand) eine abstracte mathematische Form entspricht, so heisst der gegebene Gegenstand *concrete mathematische Form*". G. Veronese, dz. cyt., § 38.

Tym samym stwierdza *de facto*, że w świecie zewnętrznym w stosunku do Podmiotu Myślącego istnieją przedmioty konkretne (rozciągłe), którym odpowiadają abstrakcyjne formy matematyczne. Na czym owa odpowiedniość ma polegać, nie odpowiada. Mając dotychczasowe ustalenia dotyczące Podmiotu Myślącego i jego uposażenia, należy przypuszczać, że odpowiedniość zachodzi wtedy, gdy przedmiot konkretny i abstrakcyjna forma matematyczna (przedmiot mentalny) podpadają pod to samo pojęcie, w które wyposażony jest podmiot. Owa odpowiedniość ma pewne dalsze skutki, które Veronese natychmiast zauważa w przypisie do przedstawionej powyżej definicji:

> Stąd wynika, że kiedy chce się traktować konkretne matematyczne formy z logiczną ścisłością, to trzeba przynajmniej podstawowe zasady dotyczące abstrakcyjnych form matematycznych odnieść do odpowiednich konkretnych form, ponieważ my prowadzimy badania dotyczące nie realnych przedmiotów, ale odpowiadających im duchowych (mentalnych) przedstawień[20].

W tym miejscu wyznacza Veronese metodologię matematyki stosowanej, która zajmuje się konkretnymi formami mate-

[20] „Daraus geht hervor, dass wenn man die concreten mathematischen Formen mit logischer Schärfe behandeln will, man wenigstens die Grundprincipien der abstracten den concreten entsprechenden Formen aufstellen muss, da wir ja nicht über die reellen Gegenstände sondern über ihre entsprechenden geistigen Darstellungen unsere Untersuchungen anstellen". G. Veronese, dz. cyt., s. 19.

matycznymi. Po stwierdzeniu opisanej wyżej odpowiedniości zajmuje się abstrakcyjnymi formami matematycznymi i stosuje do nich zasady (operacje) logiczno-matematyczne. Działania matematyka – w przypadku uprawiania matematyki stosowanej – dokonują się w sferze mentalnej. Konieczna jest jednak konfrontacja – w przypadku matematyki stosowanej – z rzeczywistością zewnętrzną w stosunku do Podmiotu Myślącego. Chodzi tu o jakąś (nieważne, czy będzie to weryfikacja, falsyfikacja czy korroboracja) formę sprawdzenia empirycznego (testu) wyników operacji matematycznych dokonanych na mentalnych odpowiednikach konkretnych form matematycznych. Veronese stwierdza w *Przedmowie*:

> Nauki o przedmiotach istniejących rzeczywiście poza myśleniem nazywają się »eksperymentalnymi«. Prawda tych nauk polega na zgodności myślenia z przedmiotem poza myśleniem[21].

Stwierdzenie włoskiego matematyka, że prawda w przypadku nauk eksperymentalnych polega na zgodności myślenia z przedmiotem zewnętrznym, to potwierdzenie, że w przypadku matematyki stosowanej trzeba testu empirycznego dla wyników operacji mentalnych.

[21] „Die Wissenschaften von thatsächlich ausserhalb des Gedankens existirenden Gegenstanden heissen ‘experimentale’. Die Wahrheit diesen Wissenschaften beruht dagegen auf der Übereinstimmung des Gedankens mit dem Gegenstand ausserhalb desselben”. G. Veronese, dz. cyt., s. 7.

W wyżej prezentowanych tekstach Veronese dotyka – dyskutowanej od czasów pitagorejczyków po dzień dzisiejszy – kwestii matematyczności przyrody (świata zewnętrznego). Daje też swoją odpowiedź na pytanie o matematyczność świata zewnętrznego. Jest on matematyczny, ponieważ występują w nim konkretne formy matematyczne, które odpowiadają – podpadając pod to samo pojęcie będące na uposażeniu Podmiotu Myślącego – mentalnym abstrakcyjnym formom matematycznym, którymi zajmuje się matematyka czysta.

Nie jest jednak tak, że Veronese znalazł absolutne rozwiązanie problemu matematyczności świata. W istocie cały problem tylko przesunął. Rodzi się bowiem pytanie, dlaczego istnieją w świecie zewnętrznym konkretne formy matematyczne, które odpowiadają (mentalnym) abstrakcyjnym formom matematycznym. Veronese tego pytania nawet nie postawił, tym trudniej więc doszukiwać się u niego odpowiedzi. Nie dostrzegł też innej trudności, którą można opisać następująco: stwierdza się zgodność matematycznych form – abstrakcyjnej i konkretnej. Na abstrakcyjnej dokonuje się operacji logiczno-matematycznych. Dlaczego test empiryczny potwierdza przewidywania sformułowane w wyniku zastosowania owych operacji? Czy znaczy to, że świat pozamentalny również posiada strukturę logiczno-matematyczną? Ale jeśli tak, to dlaczego świat ma taką strukturę? Te pytania w koncepcji Veronesego pozostają bez odpowiedzi. Nie dał on zatem zadowalającego rozwiązania problemu matematyczności świata. Nie jest to jednak żadna ujma, gdyż Veronese znajduje się tutaj w towarzystwie wielu wybitnych myślicieli.

Wypada jeszcze raz powrócić do kwestii przedmiotów, którymi według włoskiego badacza zajmuje się matematyka. Dotychczas ustalono, że matematyka czysta zajmuje się badaniem abstrakcyjnych form matematycznych, natomiast matematyka stosowana zajmuje się badaniem konkretnych form matematycznych. Veronese w zbiorze tych pierwszych wyróżnia poza tym formy, które odpowiadają konkretnym formom matematycznym. Nie przypisuje im jednak istotnego znaczenia w matematyce:

> Z drugiej strony nie możemy zapomnieć, że materiał, którego dostarczają nam zmysłowe wrażenia, jest przerabiany przez naszego ducha, i że element subiektywny ma przewagę nad elementem obiektywnym w matematyce czystej, geometrii i racjonalnej mechanice, i że ponadto my wszyscy posiadamy w sobie pierwsze idealne geometryczne formy, zanim jeszcze zaczynamy studium geometrii i bez konieczności zakładania, że te formy byłyby właśnie realnymi przedmiotami z ich wszystkimi niedokładnościami[22].

---

[22] „Wir können aber anderseits nicht verkennen, dass der Rohstoff, den uns die sinnliche Eindrücke liefern, durch unsern Geist verarbeitet wird und dass das subjective Element in der reinen Mathematik, der Geometrie und der rationalen Mechanik den Vorrang vor dem objectiven Element hat, und dass wir alle überdies die ersten idealen geometrischen Formen in uns besitzen, noch ehe wir mit dem Studium der Geometrie beginnen und ohne voraussetzen zu müssen, diese Formen seien eben die reellen Gegenstände mit ihrem sämmtlichen Ungenauigkeiten". G. Veronese, dz. cyt., s. 15.

Tak więc ostatecznie matematyka czysta, a także geometria, a nawet mechanika posługują się i odnoszą się do przedmiotów mentalnych, jakimi są abstrakcyjne formy matematyczne i geometryczne. Aby zrozumieć stanowisko Veronesego, trzeba przypomnieć, że w swoim monumentalnym dziele zajmował się on geometriami *n*-wymiarowymi. Jest oczywiste, że nie mógł się w niej absolutnie odwoływać do materiału dostarczanego przez wrażenia zmysłowe. Obiektów takich geometrii dostarcza zatem myślenie, rzecz jasna w formie nieoglądowej.

Włoski matematyk zwrócił też uwagę na istotną sprawę języka matematyki. Veronese natychmiast po charakterystyce Podmiotu Myślącego, w § 5 zajął się kwestią oznaczania rzeczy (pojęć) przez znaki. Stwierdza tam: „Jedna lub więcej rzeczy albo pojęć będzie oznaczana przez znaki, np. przez litery alfabetu. *Def.* Te znaki *przedstawiają* te rzeczy, a te rzeczy *odpowiadają* swoim znakom i są przez swoje znaki przedstawiane”[23].

Należy zauważyć, że w przytoczonym tekście nie ma *explicite* Podmiotu Myślącego oznaczającego znakami pewne obiekty i operującego znakami. Można z niego jednak wyprowadzić dwa wnioski:

1. Według Veronesego nie istnieje obiektywny porządek wiążący znaki z przedmiotami. Jest to kwestią konwen-

[23] „§ 5. Ein oder mehrere Dinge oder Begriffe werden mit Zeichen, z. B. mit Buchstaben des Alphabets bezeichnet werden. *Def.* Diese Zeichen *stellen* diese Dinge *dar*, und diese Dinge *entsprechen* ihren Zeichen und werden durch ihre Zeichen dargestellt”. G. Veronese, dz. cyt.

cji. Wskazuje na to wyraźnie zwrot „*zum Beispiel*". Powstaje tu oczywiście pytanie o ustalającego konwencję. Kontekst czterech pierwszych paragrafów poprzedzających analizowany tekst Veronesego zdaje się jednoznacznie wskazywać na Podmiot Myślący.

2. Mówiąc o oznaczaniu, Veronese używa strony biernej. Wskazuje to na jakąś „moc" (podmiot), która rzeczom (pojęciom) przypisuje znaki. I tutaj kontekst poprzedzającej piąty paragraf charakterystyki Podmiotu Myślącego wskazuje na ten Podmiot.

Zatem generalny wniosek w tym miejscu jest taki, że choć Veronese, poruszając kwestię „znakowania" przedmiotów, nie odwołuje się *explicite* do scharakteryzowanego wcześniej Podmiotu Myślącego, to ów Podmiot wydaje się „mocą sprawczą" oznaczania znakami przedmiotów.

Ostateczną pewność w tej kwestii daje lektura dalszych fragmentów *Geometrii*. W § 36 włoski matematyk pisze: „ponieważ miejsca (pozycje) zajęte przez ten sam przedmiot są różne, to możemy powtórzoną rzecz przy każdym powtórzeniu oznaczyć odmiennym znakiem"[24].

Użyty przez autora zaimek osobowy „my" (*wir*) ewidentnie wskazuje na podmiotowe uwarunkowanie doboru znaków. In-

[24] „§ 36. Da die von demselben Ding in der Reihe eingenommenen Stellen verschieden sind, so können wir das wiederholte Ding bei jeder Wiederholung mit einem von dem vorhergehenden verschiedenen Zeichen belegen". G. Veronese, dz. cyt.

nymi słowy, dalsze teksty *Geometrii* potwierdzają tezę, że według Veronesego właśnie Podmiot Matematyczny ma zdolność oznaczania przedmiotów za pomocą prostych znaków.

Z kolei § 42 zawiera tekst „dotykający" pierwszego z wyżej sformułowanych wniosków: „§ 42. *Przykł. 1*. Tak zachodzi pomiędzy formami i ich znakami związek jednoznaczny, gdy każdemu znakowi odpowiada jeden przedmiot i każdemu przedmiotowi jeden znak"[25].

Veronese stwierdza w istocie, że można ustalić – dokładniej, na podstawie wcześniejszych analiz, trzeba by powiedzieć: Podmiot Myślący jest w stanie ustalić – jednoznaczne przyporządkowanie znaków przedmiotom (pojęciom). Wypada przypuszczać, że Podmiot Myślący jest w stanie zapamiętać owo przyporządkowanie (funkcję). To wydaje się podstawową umiejętnością konieczną do stworzenia przez Podmiot Myślący sztucznego (symbolicznego) języka (matematyki).

Trudno ustalić, czy Veronese, jak np. intuicjoniści, był zdania, że matematyka może być uprawiana jako czynność czysto mentalna, bez potrzeby werbalizowania owych myśli, czyli bez języka. Sam – oczywiście ze względu na potrzebę komunikacji – postulował symboliczny język matematyki i wskazywał w istocie, że umiejętność zbudowania takiego języka jest podstawową zdolnością Podmiotu Myślącego.

---

[25] „§ 42. *Beisp. 1*. So besteht zwischen den Formen und ihren Zeichen ein eindeutiger Zusammenhang, wenn jedem Zeichen ein Ding entspricht und einem Ding ein Zeichen". G. Veronese, dz. cyt.

Trzeba jednak zaznaczyć, że Veronese podkreśla, iż matematyka nie jest nauką o znakach, ale o przedmiotach (mentalnych) i o pojęciach. Pisze on wprost: „czysta matematyka przedstawia się jako nauka o pojęciach, a nie o czystych […] znakach, jakiekolwiek te ostatnie by były”[26]. Można więc uznać, że, podobnie jak później Hilbert, Veronese stał na stanowisku, iż matematyki nie można redukować do zbioru formuł budowanych ze znaków. Twierdził on wprost, że matematyka posiada pewną treść (pozaznakową). Wydaje się, że ten pogląd Veronesego został wypowiedziany jako sprzeciw wobec atakującego go niejednokrotnie Peana, który skłonny był redukować matematykę do jej zapisu formalnego[27].

Kończąc przegląd tematów z zakresu filozofii matematyki poruszanych przez Veronesego, należy jeszcze koniecznie zwrócić uwagę na jedną kwestię, która poniekąd przewijała się w dotychczasowych analizach. Podobnie jak Kant i współcześni mu intuicjoniści był Veronese konstruktywistą. Matematyka dotyczy przedmiotów mentalnych. Są one – zgodnie z określeniem przed-

---

[26] „Die reine Mathematik stellt sich so als eine Wissenschaft von Begriffen und nicht von reinen […] Zeichen dar, wie möglich die letzteren auch sein mögen”. G. Veronese, dz. cyt., s. 26.

[27] „Aus Furcht in das Unbestimmte zu gerathen soll man aber auch nicht die Mathematik und Geometrie in ihren Fundamenten auf einen reinen Zeichenconventionalismus reducieren wollen, wohl aber soll man sie auf philosophische Art behandeln, d.h. die Natur der Dinge, mit denen man sich beschaeftigt, möglichst klar machen, ohne deshalb die Bedeutung anderer Methoden zu bestreiten, die von einem anderen, aber beschränkten, Gesichtspunkt ausgehen”. G. Veronese, dz. cyt., s. 13.

miotów mentalnych – produktem myślenia Podmiotu Myślącego. Zatem Podmiot Myślący tworzy, konstruuje obiekty matematyki.

Lektura dzieła włoskiego matematyka dostarcza tutaj stosownych przykładów. Najlepszym jest tekst, który już kilkakrotnie, w innym nieco kontekście, był tu przytaczany:

> *Przykł.* Przez powtórzenie tego samego duchowego działania konstruujemy np. liczbę dwa, potem jednak możemy tę liczbę uważać za przedmiot dany myśleniu.

Trzeba zaznaczyć, że w istocie konstrukcja arytmetyki proponowana przez Veronesego jest bardziej skomplikowana. Prowadzi ona przez odpowiednik teorii mnogości/mereologii, którego projekt przedstawił. I tutaj jednak zachodzą procedury konstruowania pewnych przedmiotów przez Podmiot Myślący. Jako zobrazowanie niech posłuży jeden przykład:

> § 13. *Def. I.* Ja myślę razem więcej danych rzeczy, które nie są nawzajem sprzeczne i są takie, że kiedy usunę dowolną z nich, to nie wyjmę żadnej innej rzeczy. Rezultat tej operacji nazywa się *grupą* (agregatem, wielością albo systemem) danych rzeczy[28].

[28] „§ 13. *Def. I.* Ich denke mehrere gegebene Dinge zusammen, welche sich nicht gegenseitig widersprechen und so beschaffen sind, dass, wenn ich ein beliebiges von ihnen wegnehme, ich nicht irgend ein anderes der gegebenen Dinge wegnehme. Das Resultat dieser Operation heisst *Gruppe* (Aggregat, Vielheit oder System) der gegebenen Dinge”. G. Veronese, dz. cyt.

Mowa tu o pewnej operacji (*Operation*), która jest działaniem mentalnym: myśleniem razem (*zusammendenken*). Rezultat tej operacji to nowy przedmiot – niewątpliwie mentalny – któremu Veronese daje nazwy znane z dziejów teorii mnogości czy mereologii. Tak więc dokonuje się tutaj, według włoskiego geometry, mentalna konstrukcja nowego przedmiotu. Jest on dalej wykorzystywany w (mentalnej) konstrukcji przedmiotów arytmetyki – liczb naturalnych.

Można wspomnieć, że Bolzano w swych pierwszych dociekaniach teoriomnogościowo-mereologicznych rozumował dokładnie tak samo. Zbiór, wielość były mentalnymi konstrukcjami, rezultatem myślenia razem (*zusammendenken*) pewnych przedmiotów. Dopiero w dojrzałej fazie swojej działalności matematyk z Pragi „zobiektywizował" zbiory i wielości. Veronese natomiast pozostał na stanowisku konstruktywistycznym.

Konstruktywiści – niezależnie od tego, jak pojmują konstrukcję – mają zasadnicze trudności z fundamentalnym dla matematyki pojęciem nieskończoności. Veronese był tego świadomy. Zdawał sobie sprawę, że nie można przypisać Podmiotowi Myślącemu zdolności wykonania aktualnie nieskończenie wielu operacji, ani myślenia nieskończenie wielu przedmiotów, nawet gdyby to było „rozciągnięte" w czasie. Uważał jednak, iż Podmiot Myślący może myśleć o (*denken an*) nieskończenie wielu przedmiotach, a zatem dysponuje pojęciem nieskończoności (aktualnej)[29].

[29] „Wir können überdies von den Beziehungen des Gedankens zu den wahrnehmbaren Dingen abstrahieren. Auf diese Art wird die Betrachtung einer unbegrentzten Reihe von Dingen ermöglicht und mittels des

Stwierdzony na końcu analiz konstruktywizm stawia Veronesego na tej linii rozwojowej filozofii matematyki, która swój początek ma u Kanta. Nie wiadomo, czy włoski matematyk był pod bezpośrednim (wynikającym z lektury) wpływem myśliciela z Królewca. Veronese nie uznaje wszak czasu i przestrzeni jako apriorycznych form naoczności. Przyznaje jednak Podmiotowi Myślącemu pewne *a priori* czasu, odrzucając wszelką aprioryczność przestrzeni będącej strukturą rzeczywistości fizycznej. Filozofia matematyki Veronesego jest subiektywistyczna, a nawet – w pewnym sensie – solipsystyczna. Można jej postawić zarzut psychologizmu. Jej autor nigdzie nie uzasadnia obiektywności logiki, w którą – przed myśleniem – wyposażony jest Podmiot Myślący. Ciekawe jest to, że włoski matematyk budował swą koncepcję matematyki, gdy równocześnie rozpoznawano potrzebę antypsychologizmu (Gottlob Frege).

Wskazano na istotne zbieżności koncepcji Veronesego z filozofią matematyki prawie że współczesnych intuicjonistów. Kwestia ta wymaga jednak dalszych badań. Koncepcja Podmiotu Myślącego miała prawdopodobnie wpływ na koncepcję Podmiotu Matematycznego Hilberta, która była prezentowana

---

Princips § 18. diejenige einer gegebenen unbegrentzten Reihe, auch wenn sie für die Verhältnisse eines Individuums nicht realisierbar ist. Denkt man sich, die Operation, durch welche mehrere Gegenstände einer nach dem andern bis zu einem Gegenstand *B* gesetzt werden, sei vollendet und der erste Gegenstand in dem Moment *A* gesetzt, so kann man auch sagen, man beziehe die so erhaltene Reihe von Dingen, die man als dem Gedanken gegeben ansieht (§ 18.), auf dem Moment *A*, d.h. von der von *A* bis *B* verflossenen Zeit absehen. So erklären sich die oft gebrauchten Ausdrücke: *unbegrenzt, ins Unendliche oder ohne Ende* fortfahren". G. Veronese, dz. cyt., § 13.

w wykładach getyńskich z początku XX wieku. Wydaje się też, że koncepcja swobodnej konstrukcji przedmiotów geometrycznych miała wpływ na takież podejście do tej kwestii przez Hilberta. Ową swobodę wyrażał matematyk z Getyngi słynnym „Wir denken uns".

Na koniec trzeba podkreślić, że mimo iż Veronese rozpoczynał budowę swojej matematyki (geometrii) od Podmiotu Myślącego i fenomenu myślenia, to analizie Podmiotu uprawiającego (tworzącego) matematykę i myśleniu „matematycznemu" nie poświęcił specjalnej uwagi.

Bibliografia

Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1899.

Veronese G., *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen*, Leipzig 1894.

Podmiot matematyczny Hilberta

Bartosz Brożek
Uniwersytet Jagielloński,
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych
Adam Olszewski
Uniwersytet Papieski Jana Pawła II,
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych

Hilbert's mathematical subject

Abstract

The aim of this paper is threefold. First, on the basis of Gordan's problem and Hilbert's basis theorem we want to say a few words about the formation of Hilbert's philosophy of mathematics in the late nineteenth and early twentieth centuries. Second, we attempt to reconstruct Hilbert's Program highlighting the role of reasoning which is not conducted within the axiomatic system. Third, we formulate and try to justify the claim that Hilbert's Program assumes some metaphysics of the subject that – in general terms – is identical with Kant's transcendental subject.

Key words:

philosophy of mathematics, mathematical subject, David Hilbert

Cel tego eseju jest trojaki. Po pierwsze, chcemy – na przykładzie problemu Gordana i Hilberta twierdzenia o bazie – powiedzieć parę słów na temat kształtowania się Hilbertowskiej filozofii matematyki na przełomie XIX i XX wieku. Po drugie, podejmiemy próbę rekonstrukcji programu Hilberta, podkreślając rolę, jaką odgrywają w nim rozumowania *pozasystemowe*, tj. takie, które nie dokonują się w obrębie systemu aksjomatycznego. Po trzecie wreszcie, sformułujemy i spróbujemy uzasadnić pogląd, że program Hilberta zakłada pewną metafizykę podmiotu, który – w ogólnych zarysach – jest tożsamy z podmiotem transcendentalnym Kanta[1].

1. Teologia czy matematyka?

W 1888 roku David Hilbert rozwiązał tzw. problem Gordana. Opublikował swój wynik w „Mathematische Annalen" w 1890 roku. W reakcji na to osiągnięcie Paul Gordan miał powiedzieć: „To nie jest matematyka, to jest teologia!". Jak ustalili historycy, sformułowanie to zostało przypomniane dopiero 24 lata później, w 1914 roku, przez Maxa Noethera w mowie pogrzebowej na cześć Gordana[2]. Powiedzenie Gordana zrobiło później wielką karierę. Komentowali je matematycy i historycy matematyki, choćby Hermann Weyl, Gerhard Kowalewski, Eric Temple Bell,

[1] Podobne rozwa34~harris/theology.pdf.
[2] Por. C. McLarty, dz. cyt., s. 1.

Felix Klein czy Leonard Blumenthal, różniąc się w swych interpretacjach. Zdaniem niektórych Gordan chciał podkreślić, że zaproponowane przez Hilberta rozwiązanie trudno uznać za dowód matematyczny; według innych celem Gordana było podkreślenie wielkości osiągnięcia Hilberta, który miałby doznać boskiej iluminacji[3].

Co było przedmiotem tego „teologicznego dowodu"? Zainteresowania matematyczne Gordana koncentrowały się wokół algebraicznej teorii niezmienników. W 1868 roku udowodnił on konstruktywnie twierdzenie głoszące, że niezmienniki systemów form binarnych (z dwoma zmiennymi) posiadają skończoną bazę[4]. Jego dowód w istocie polegał na rozpatrywaniu szczegółowych przypadków. Bezskutecznie próbował natomiast udowodnić, że niezmienniki systemów form dowolnego rzędu i dla dowolnej liczby zmiennych także mają skończoną bazę. W swych badaniach posunął się jednak daleko. Wykorzystując *metodę symboliczną*, był w stanie zaproponować techniki, które pozwoliły mu na scharakteryzowanie systemu niezmienników dla formuł szóstego rzędu, a także na przybliżony opis systemu niezmienników dla formuł ósmego rzędu. Istotną rolę w tych badaniach odgrywała, jak zaznaczyliśmy, metoda symboliczna. Jej ciekawą cechą było to, że Gordan zabraniał przypisywania symbolom jakiegoś konkretnego

[3] Tamże, s. 1–2.

[4] Przez formę binarną należy w istocie rozumieć to, co dzisiaj jest wielomianem jednej zmiennej. I tak np. odpowiednikiem wielomianu $P(x) = Ax^2 + 2Bx + C$ była binarna forma $F(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

znaczenia w trakcie obliczeń. Było to dopuszczalne jedynie na kluczowych etapach rachunków[5].

Hilberta twierdzenie o bazie, opublikowane – jak wspomnieliśmy – w 1890 roku, głosi, że *istnieje* skończona baza dla niezmienników systemów form dowolnego rzędu i dla dowolnej liczby zmiennych. W dzisiejszej terminologii twierdzenie o bazie wypowiedzieć można następująco:

[Twierdzenie Hilberta o bazie]

Dowolny ideał w $K[x_1,\ldots,x_n]$ jest skończenie generowalny.

K jest ciałem, do którego należą współczynniki wielomianów. Ideał jest *skończenie generowalny*, gdy ma *skończoną bazę*. Skończoną bazą ideału jest zbiór jego elementów, taki że każdy element ideału da się uzyskać z bazy za pomocą operacji sumy lub iloczynu.

Dowód Hilberta miał charakter niekonstruktywny: wykorzystywał zasadę wyłączonego środka i dowodził jedynie istnienia skończonej bazy, nie podając jakiejś bliższej jej charakterystyki. Początkowa reakcja Gordana, choć nie całkiem negatywna, była sceptyczna. W swej recenzji pracy Hilberta dla „Mathematische Annalen" pisał:

(…) muszę z przykrością powiedzieć, że nie jestem tym [dowodem] usatysfakcjonowany. Twierdzenia są w rzeczy samej bar-

[5] C. McLarty, dz. cyt., s. 6.

dzo ważne i poprawne, moja krytyka nie odnosi się więc do nich. Dotyczy ona raczej dowodu podstawowego twierdzenia, które nie spełnia najbardziej skromnych wymogów, jakie stawia się przed dowodami matematycznymi. Nie wystarczy stwierdzić, że autor uważa kwestię za jasną. Wymagać należy, by zbudował on dowód, wykorzystując bezpieczne reguły[6].

Wydaje się przy tym, że przedmiotem niezadowolenia Gordana nie było wykorzystanie przez Hilberta metod infinitystycznych. Mówiąc, że mamy tu do czynienia z „teologią, a nie matematyką", Gordan dawał wyraz innym obawom. W 1893 roku pisał: „dowód Hilberta jest poprawny co do zasady. Niemniej wyczuwam lukę w jego wyjaśnieniu: zadowala się on dowiedzeniem istnienia rozwiązań, nie rozważając ich własności"[7]. Po kilku latach Hilbert przedstawił konstruktywny dowód swego twierdzenia.

Historia ta jest ciekawa z kilku powodów. Po pierwsze, w zmaganiach z teorią niezmienników algebraicznych istotną rolę odgrywała metoda symboliczna, której mistrzem był Gordan, a także uczennica Gordana i Hilberta – Emmy Noether. Metoda ta – w nieco innym kontekście – pełniła, jak zobaczymy, kluczową funkcję w programie Hilberta. Po drugie, w trakcie „sporu" z Gordanem Hilbert zetknął się z zarzutem związanym

[6] D. Hilbert, F. Klein, *Der Briefwechsel David Hilbert – Felix Klein*, red. G. Frei, Göttingen 1985, s. 65; cyt. za: C. McLarty, dz. cyt.
[7] P. Gordan, *Ueber einen Satz von Hilbert*, „Mathematische Annalen" 1893, vol. 42, s. 132; cyt. za: C. McLarty, dz. cyt.

z ideą dowodu w matematyce. Zdaniem Gordana, a jeszcze bardziej Leopolda Kroneckera, dowód powinien mieć charakter konstruktywny.

Te doświadczenia wpłynęły niewątpliwie na rozwój idei filozoficznych Hilberta. Dodać do nich należy jeszcze dwa źródła filozoficzno-matematycznej inspiracji. Pierwszy z nich to idea aksjomatyzacji. Od początku lat dziewięćdziesiątych XIX wieku Hilbert wykładał podstawy geometrii. Zgodnie z relacją Blumenthala w 1891 roku Hilbert wysłuchał wykładów Hermanna Wienera na temat podstaw geometrii. Wiener powiedział podczas tego wykładu, że:

> Także dla geometrii znaczenie ma tego rodzaju powrót do najprostszych przedmiotów i operacji, ponieważ z tych można odwrotnie zbudować pewną abstrakcyjną naukę, która jest niezależna od aksjomatów geometrii, ale której twierdzenia są krok po kroku paralelne do twierdzeń geometrii[8].

Po wykładzie Wienera Hilbert miał wypowiedzieć słynne zdanie, iż powinno być możliwe zamienienie w aksjomatach geometrii „punktów, linii i płaszczyzn" na „stoły, krzesła i kufle do piwa" bez utraty ważności tych aksjomatów[9]. Hilbert zauwa-

[8] H. Wiener, *Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 1890/1891, nr 1, s. 46.
[9] Por. L. Corry, *David Hilbert and the Axiomatization of Physics*, Dordrecht 2004, s. 75.

żył, że *metoda aksjomatyczna* pozwala na „pogłębienie podstaw konkretnej dziedziny wiedzy – pogłębienie konieczne dla każdego gmachu, który ktoś chciałby rozbudować i uczynić wyższym, zachowując jego stabilność”[10]. W głównej mierze odnosił to do geometrii i arytmetyki, ale nie tylko, gdyż znane są jego próby aksjomatyzacji innych dziedzin, np. fizyki[11]. Według przekazów świadków miał zacząć budować aksjomatykę geometrii już w pociągu w drodze powrotnej do Królewca[12]. Wykład Wienera, jak można spekulować, otworzył Hilbertowi oczy na abstrakcyjny charakter *modelu matematycznego*. Intuicja Hilberta była najprawdopodobniej taka, że potrafił „oderwać” intelektualnie samą formułę od jej znaczenia, albo inaczej – używając intuicji atomizmu logicznego, oderwać ją od faktu, który opisuje. Ówcześnie, jak się zdaje, było to nowatorskie odkrycie.

Drugi aspekt metody aksjomatycznej podkreślany przez Hilberta najlepiej wyrażają następujące słowa:

> Przez aksjomatyczne odkrywanie prawdy matematycznej rozumiem badania, które nie zmierzają do znalezienia nowych albo

---

[10] D. Hilbert, *Mechanik*, cyt. za: L. Corry, *The Origin of Hilbert's Axiomatic Method*, [w:] *The Genesis of General Relativity*, red. J. Renn, t. 4, Dordrecht 2006, s. 146.

[11] Lista tych dziedzin jest obszerniejsza i obejmuje: geometrię, mechanikę klasyczną, termodynamikę, rachunek prawdopodobieństwa, elektrodynamikę i teorię względności.

[12] Por. w tej sprawie dokładniej: J. Dadaczyński, *Arytmetyka u początku abstrakcyjnego pojmowania geometrii przez Hilberta*, „Filozofia Nauki” 2012, nr 3, s. 99–109.

> bardziej ogólnych twierdzeń związanych z tą prawdą, ale do określenia miejsca tego twierdzenia w systemie znanych prawd w taki sposób, że można jasno powiedzieć, jakie warunki są konieczne i wystarczające, by prawdę tę ugruntować[13].

Hilbert podkreśla tu systemowy charakter matematyki i zwraca uwagę, że metoda aksjomatyczna nie ma funkcji heurystycznych – nie musi prowadzić do nowych wyników; jej zadaniem jest raczej umożliwienie *lepszego zrozumienia* prawdy matematycznej.

Jesteśmy też przekonani, że na rozwój Hilbertowskiego formalizmu pewien wpływ wywarła filozofia Immanuela Kanta. Oczywiście, Hilbert nie odnosi się do myśli filozofa z Królewca w tak bezpośredni sposób, jak czyni to choćby L.E.J. Brouwer. Niemniej nie sposób zaprzeczyć, że Hilbert często posługuje się Kantowskim żargonem, mówiąc choćby sporo o intuicji. Można oczywiście zauważyć, że był to nie tyle żargon Hilberta, ile raczej żargon epoki: mniej lub bardziej bezpośrednie nawiązania do filozofii matematyki Kanta można znaleźć u wszystkich niemal matematyków, którzy tworzyli na przełomie XIX i XX wieku. W dalszej części tego artykułu chcemy jednak przekonywać, że inspiracje Kantowskie – w przypadku programu Hil-

---

[13] D. Hilbert, *Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck*, „Proceedings of the London Mathematical Society" 1902–1903, t. 35, s. 50; cyt. za: V. Peckhaus, *The Pragmatism of Hilbert's Programme*, „Synthese", November 2003, nr 1–2, z. 137, s. 141–156.

berta – sięgają znacznie głębiej niż sposób wyrażania się i stosunkowo nieliczne wypowiedzi bezpośrednio przywołujące Kanta. Uważamy bowiem, że filozofia Hilberta zawiera *ukrytą metafizykę* podmiotu matematycznego, która w swoim ogólnym zarysie odpowiada teorii podmiotu transcendentalnego opisanego w *Krytyce czystego rozumu*.

2. Program Hilberta[14]

Hilbert rozpoczął badania podstaw matematyki pod koniec XIX wieku. Przez ponad 20 lat jego poglądy ewoluowały, a dojrzałą ich formę określa się mianem programu Hilberta. Program wychodzi z pewnych postulatów. Uważamy, że można je sformułować w sposób następujący:

(P1) Zachować całą matematykę, włącznie z jej częścią niekonstruktywną.

Wydaje się, że najważniejszą motywacją programu Hilberta była próba obrony całej, również niekonstruktywistycznej, matematyki przed atakami Kroneckera (częściowo Gordana) oraz intuicjonistów. Właśnie problem dotyczący dowodu twierdzenia o bazie uświadomił Hilbertowi niebezpieczeństwa związane z konstruktywizmem. W 1926 roku Hilbert pisał:

[14] Ta część artykułu opiera się na książce A. Olszewski, *Teza Churcha…*, dz. cyt.

> To, co robił Weyl i Brouwer, to nic innego jak pójście w ślady Kroneckera! Próbują oni uratować matematykę, wyrzucają wszystko, co sprawia kłopot. (...) Jeśli zgodzimy się na takie propozycje, to ryzykujemy utratę wielu największych naszych skarbów[15].

Hilbert wielokrotnie podkreślał, że odrzucenie zasady wyłączonego środka w duchu intuicjonizmu prowadzi do paraliżu badań matematycznych (np. zauważał: „Nie możemy porzucić zasady wyłączonego środka, ani żadnego innego prawa logiki Arystotelesa [...], gdyż bez nich konstrukcja analizy staje się niemożliwa")[16]. Motywacja, by pozostać „w raju, do którego wprowadził nas Cantor", była niezwykle silna.

Z tym postulatem ściśle związana była inna idea Hilberta, którą najdobitniej wyraził w 1900 roku w Paryżu: „dla nas [matematyków] nie ma żadnego *ignorabimus* (...)"[17]. A w dużo późniejszym, słynnym wykładzie dodawał: „W opozycji do głupiego *ignorabimus* naszym sloganem powinno być: Musimy wiedzieć! – Będziemy wiedzieć!"[18]. Wypowiedź tę można potraktować jako drugi postulat programu Hilberta:

---

[15] Cyt. za: R. Murawski, *Rozwój programu Hilberta*, „Wiadomości Matematyczne" 1993, t. 30, s. 51–72.

[16] D. Hilbert, *The Foundations of Mathematics*, [w:] *From Frege to Godel: A Sourcebook in Mathematical Logic*, red. J. Van Heijenoort, Cambridge, MA 1879–1931, s. 1067.

[17] D. Hilbert, *Mathematical Problems: Lecture Delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900*, „Bulletin of the American Mathematical Society" 1902, no. 6, s. 437–79.

[18] Wykład Hilberta z 1930 roku na Kongresie Niemieckiego Stowarzyszenia Nauk Przyrodniczych i Medycznych, dostępny na stronie:

(P2) Można podać dowód wszelkich twierdzeń matematycznych.
Hilbert dostrzegał jednak problemy związane z dowodami niekonstruktywistycznymi. Redukcyjny dowód niesprzeczności matematyki, sprowadzający ją do teorii mnogości, natrafia na przeszkody, gdyż teoria mnogości jest uwikłana w różne paradoksy (np. paradoks Russella). Skoro tak, to póki nie dostarczy się zadowalającego dowodu niesprzeczności arytmetyki, nie będzie można ufać dowodom niekonstruktywnym. W związku z tym trzeba stosować „bezpieczne" metody finitystyczne:

(P3) W matematyce stosować należy wyłącznie metody finitystyczne.
„Finityzm to pogląd metodologiczny, który sprowadza się do ograniczenia myśli matematycznej do tych obiektów, które są intuicyjnie obecne jako bezpośrednie doświadczenie przed wszelką myślą, i do takich operacji i metod rozumowania o tych obiektach, które nie wymagają wprowadzenia pojęć abstrakcyjnych, a w szczególności odwołania się do nieskończoności"[19]. Jak pisze sam Hilbert:

> Jako warunek wstępny stosowania wnioskowań logicznych i wykonywania operacji logicznych dane jest już coś intuicyjnie: pewne pozalogiczne konkretne obiekty, które jawią się jako

http://math.sfsu.edu/smith/Documents/HilbertRadio/HilbertRadio.mp3.

19 R. Zach, *Hilbert's Program*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/.

> doświadczane bezpośrednio przed wszelkim myśleniem (...). W szczególności w matematyce przedmiotem naszych rozważań są konkretne znaki, których kształt (...) jest bezpośrednio jasny i rozpoznawalny[20].

Hilbert wskazuje zatem, że finitystycznymi obiektami są znaki: konkretne i doświadczane bezpośrednio. Trudno jednak dokładnie sprecyzować, co ma tu na myśli. Przede wszystkim znaki nie są obiektami fizycznymi („znakami na papierze"). W związku z tym William Tait[21] zaproponował, by Hilbertowskie znaki traktować jako typy (*types*), a nie egzemplarze (*tokens*). Typy są jednak pewnymi obiektami poza czasem i przestrzenią; tymczasem Paul Bernays zauważa:

> Nie jest zgodne z podstawowymi poglądami Hilberta, by wprowadzić liczby jako obiekty abstrakcyjne „o całkiem innych własnościach niż przedmioty poznawalne zmysłowo", które „istnieją całkowicie niezależnie od nas". W ten sposób znaleźlibyśmy się poza dziedziną tego, co bezpośrednio pewne. W szczególności stało by się to jasne w związku z faktem, że musielibyśmy w konsekwencji uznać, iż wszystkie liczby istnieją równocześnie – a to zakładałoby już na początku tezy, które Hilbert uważa za problematyczne[22].

[20] D. Hilbert, *Über das Unendliche*, „Mathematische Annalen" 1926, nr 95, s. 161–190.
[21] W. Tait, *Finitism*, „Journal of Philosophy" 1981, nr 78, s. 524–546.
[22] P. Bernays, *Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: Über Zahlen als Zeichen*, „Mathematische Annalen" 1923, nr 90, s. 159–63.

Problem charakteru „finitystycznych znaków" okazuje się jeszcze bardziej skomplikowany, jeśli weźmiemy pod uwagę, że Hilbert raz po raz odwołuje się w tym kontekście do intuicji. Nawet w przywoływanej powyżej wypowiedzi zauważa, że „jako warunek wstępny stosowania wnioskowań logicznych i wykonywania operacji logicznych dane jest już coś intuicyjnie". Zdaje się to wskazywać, że Hilbert konstruuje swój program w filozoficznym paradygmacie Kanta. Tak też interpretują poglądy Hilberta Philip Kitcher i Richard Zach[23].

By przedstawić dalsze szczegóły programu Hilberta, musimy omówić kluczowe dla niego odróżnienie dwóch rodzajów twierdzeń i dowodów matematycznych: realnych i idealnych. Przyjrzyjmy się następującemu dłuższemu fragmentowi:

> (...) Nawet elementarna matematyka zawiera, po pierwsze, formuły odnoszące się do treściowych wypowiedzeń skończonych sądów (głównie numerycznych równań i nierówności oraz złożonych z nich, bardziej skomplikowanych wypowiedzeń), które możemy określić mianem realnych sądów teorii, oraz, po drugie, formuł, które – tak jak zmienne treściowej teorii liczb – same w sobie nic nie znaczą, ale są obiektami rządzonymi przez nasze reguły i muszą być traktowane jak idealne przedmioty teorii.

[23] Por. P. Kitcher, *Hilbert's Epistemology*, „Philosophy of Science" 1976, nr 43, s. 99–115; R. Zach, *Hilbert's Finitism*, dysertacja doktorska, Berkeley 2001. Por. też M. Panza, *Mathematical Proofs*, „Synthese" 2003, nr 1–2, s. 119–158.

Te rozważania pokazują, że opracowanie koncepcji formuł jako sądów idealnych wymaga jedynie postępowania w sposób naturalny i spójny, zgodnie z linią rozwoju praktyki matematycznej. Stąd jest naturalne i spójne traktować nie tylko zmienne matematyczne, ale także funktory oraz zmienne logiczne, tj. zmienne zdaniowe A, B, C..., tak jak liczebniki i litery w algebrze i uważać je także za znaki, które same w sobie nic nie znaczą, a są jedynie elementami budującymi sądy idealne.

W rzeczy samej, istnieje ważny powód takiego rozszerzenia formalnej perspektywy algebry na całą matematykę, gdyż jest to sposób na uniknięcie podstawowego problemu, który pojawia się już w elementarnej teorii liczb. Spójrzmy na równanie:

$$a + 1 = 1 + a;$$

Gdybyśmy chcieli traktować je jako przekazujące informację, że

$$a + 1 = 1 + a,$$

gdzie „a" oznacza dowolną daną liczbę, to wypowiedzi tej nie można byłoby zanegować, gdyż sąd, że istnieje liczba „a", dla której:

$$a + 1 \neq 1 + a,$$

nie ma żadnego finitystycznego znaczenia; nie możemy przecież wypróbować wszystkich liczb. Zatem przyjmując nastawienie finitystyczne, nie moglibyśmy wykorzystać alternatywy, która głosi, że równanie takie jak powyższe, w którym występuje nieokreślony liczebnik, albo jest spełnione przez każdy liczebnik, albo może być odrzucone przez kontrprzykład, jako że alternatywa ta istotnie zależy od założenia, że można zanegować wypowiedź, iż badane równanie zawsze zachodzi[24].

Przytoczyliśmy tę wypowiedź Hilberta w całości, gdyż odróżnienie sądów realnych i idealnych jest z jednej strony kluczowe dla programu Hilberta, a z drugiej stanowi źródło sporych niejasności i kontrowersji interpretacyjnych. Te niejasności i kontrowersje biorą się stąd, że Hilbert wielokrotnie wypowiadał się na temat podstaw matematyki. Najpierw (na początku XX wieku) jego poglądy kształtowały się w opozycji do filozofii matematyki Kroneckera. Po 1905 roku Hilbert zajął się inną problematyką (fizyką), by w 1917 roku, pod wpływem *Principia mathematica* Bertranda Russella i Alfreda N. Whiteheada, powrócić do problemów z zakresu logiki i podstaw matematyki. Uwagi Hilberta z tego okresu sugerują, że sprzyjał on wtedy programowi logicyzmu, który jednak odrzucił wyraźnie na początku lat dwudziestych. Rozpoczął się wtedy etap precyzowania i realizacji przez Hilberta – przy wydatnej pomocy jego uczniów – własnego programu podstaw matematyki, który, rzecz jasna, wykorzystywał najważniejsze intuicje wyrażane już wcześniej (w pierwszych latach XX wieku).

Odróżnienie sądów realnych i idealnych – które uważamy za centralne dla programu Hilberta – nastąpiło dopiero w 1926 roku, a zasygnalizowane zostało ledwie trzy lata wcześniej[25].

---

24 D. Hilbert, *The Foundations of Mathematics*, dz. cyt.

25 Por. R. Zach, *Hilbert's Program*, dz. cyt.

Hilbert używa trzech par wyrażeń na określenie charakteru twierdzeń matematycznych:

(a) realne vs. idealne;

(b) finitystyczne vs. infinitystyczne;

(c) treściowe (*inhaltlich*) vs. formalne.

Problem w tym, że nie podaje precyzyjnych definicji tych pojęć, stąd interpretowane są one na różne sposoby. W związku z tym poniżej przyjrzymy się dwóm różnym interpretacjom, które skutkują dwoma sposobami rozumienia całego programu Hilberta. Pierwsza interpretacja opiera się na analizach Michaela Detlefsena[26], choć nie uwzględnia ich instrumentalistycznej wymowy. Druga wykorzystuje egzegezę zaproponowaną przez Davida Watsona Gallowaya[27].

Detlefsen podsumowuje odróżnienie sądów idealnych i realnych w sposób następujący[28]. Sądy (i dowody) realne to te, „których wartość epistemiczna bierze się z oczywistości ich zawartości", zaś sądy (i dowody) idealne to te, „których wartość epistemiczna bierze się z roli, jaką odgrywają one w pewnym formalnym algebraicznym czy obliczeniowym schemacie". Detlefsen sugeruje zatem, by Hilbertowskie pojęcie „idealne" uważać za równoważne pojęciu „formalne", natomiast pojęcie

[26] M. Detlefsen, *Hilbert's Program: An Essay on Mathematical Instrumentalism*, Dordrecht 1986.

[27] D.W. Galloway, *Finitism: An Essay on Hilbert's Programme*, praca doktorska, MIT 1991.

[28] M. Detlefsen, *Hilbert's Program...*, dz. cyt. s. 4.

„realne" traktować jak równoważne pojęciu „treściowe". W tej samej interpretacji matematyka realna może być zarówno finitystyczna, jak i niefinitystyczna. Przykładem na niefinitystyczne obiekty matematyczne, które rozumiane są realnie (treściowo), są wszystkie niekonstruktywne dowody, które stanowiły przedmiot krytyki Kroneckera i intuicjonistów. Z kolei wyrażenia matematyki idealnej można traktować na dwa sposoby: albo wyłącznie infinitystycznie[29] (np. zmienna „a" w przywoływanym wyżej równaniu przebiega wszystkie liczby naturalne), albo wyłącznie finitystycznie („a" traktowane jest jako skończony symbol „pozbawiony treści"). A zatem:

(Interpretacja 1)

(a) Wszystkie sądy i dowody idealne są zarazem formalne.
(b) Wszystkie sądy i dowody realne są zarazem treściowe.
(c) Niektóre sądy realne są finitystyczne.
(d) Niektóre sądy realne są infinitystyczne.
(e) Sądy idealne można traktować na dwa sposoby: wyłącznie jako infinitystyczne bądź wyłącznie jako finitystyczne.

[29] Hilbert w jednym z artykułów wyjaśnił, co rozumie przez *pozaskończone metody*: „Pozaskończone wnioskowania będą oznaczone w potocznym języku przez następujące słowa: *wszystkie*, *istnieje*, *tertium non datur*, *indukcja zupełna*" („Die transfiniten Schlussweisen werden in der gewöhnlichen Sprache durch folgende Stichworte bezeichnet: *alle*, *es gibt*, *tertium non datur*, *vollständige Induktion*"). D. Hilbert, *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, „Mathematische Annalen" 1923, t. 88, s. 156.

W tym ujęciu strategia proponowana przez Hilberta przedstawia się następująco. Wyrażenia idealne można traktować finitystycznie, jako „znaki bez treści". Tak np. w przywoływanym równaniu:

$$a + 1 = 1 + a$$

symbol „a" można traktować idealnie bądź realnie. Jeśli traktowany jest on realnie, to stanowi zmienną, która przebiega przeliczalnie wiele liczb; w takiej sytuacji „a" coś „znaczy". To prowadzi do wskazanych problemów z zastosowaniem zasady wyłączonego środka. Tymczasem potraktowanie „a" jak wyrażenia matematyki idealnej sprawia, że „a" nic nie znaczy, a jedynie może być przedmiotem operacji przeprowadzanych zgodnie z pewnymi przyjętymi regułami. Co ważniejsze, „a" rozumiane idealnie można traktować jako konkretny, dany w intuicji (= oczywisty) znak.

Idea Hilberta sprowadza się do tego, by całą matematykę wywieść z finitystycznie rozumianych sądów idealnych, stąd pomysł systemu formalnego i Hilbertowska teoria dowodu. Taki sposób postawienia sprawy narażony jest na zarzut, który Detlefsen określa mianem problemu Fregego[30]. W 1903 roku Gottlob Frege pisał:

> (…) rozumowanie nie składa się ze znaków. Możemy jedynie powiedzieć, że przy przejściu od jednej grupy znaków do drugiej może nam się czasami zdawać, iż przedstawiono nam rozumo-

[30] Por. M. Detlefsen, *Hilbert's Program*..., dz. cyt.

> wanie. Rozumowanie (wynikanie) po prostu nie należy do dziedziny znaków; stanowi ono raczej wypowiedzenie sądu dokonanego w zgodzie z prawami logiki na bazie wcześniej uznanych sądów. Każda z przesłanek jest określoną myślą rozpoznawaną jako prawdziwa; także w konkluzji pewna określona myśl jest rozpoznawana jako prawdziwa[31].

Zarzut Fregego jest poważny i wskazuje na najbardziej problematyczną i rzadko komentowaną cechę programu Hilberta. Detlefsen twierdzi, że rozwiązaniem problemu Fregego jest stosowana przez Hilberta Strategia Wymiany Metamatematycznej: dowody uzyskane w matematyce idealnej są oceniane na poziomie metamatematyki, która jest treściowa oraz finitystyczna. Należy w tej sytuacji zapytać, co zyskuje się poprzez wprowadzenie teorii dowodów przeprowadzanych na zdaniach idealnej matematyki, skoro i tak muszą one podlegać ocenie metamatematycznej, która jest „treściowa"? Odpowiedź Hilberta na ten zarzut jest złożona[32]. Po pierwsze, Hilbert stwierdza, że jego metoda jest bardziej skuteczna (efektywna) niż tradycyjne, treściowe metody matematyczne. Po drugie, pozwala ona na precyzyjne przedstawienie wszystkich kroków rozumowania. Dzięki przeprowadzaniu operacji na zdaniach matematyki idealnej mamy pełną kontrolę nad każdym krokiem dowodu. Związane jest to – po trzecie – z faktem, że proponowana metoda

[31] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena 1903, t. 2, s. 82.
[32] Por. D. Hilbert, *The Foundation of Mathematics*, dz. cyt.

jest finitystyczna. W końcu – po czwarte – Hilbert nie sugeruje, by całkiem wyrugować matematykę treściową. Wiele dowodów matematycznych, np. w elementarnej teorii liczb, ma tak prostą postać „treściową", że bezcelowe i nieefektywne byłoby przeprowadzanie ich w formie „idealnej". Niemniej duża część matematyki treściowej, w szczególności ta wymagająca dowodów niekonstruktywnych, daje się dowieść środkami finitystycznymi jedynie w matematyce idealnej.

Trzeba raz jeszcze podkreślić, że zaproponowana przez Hilberta metoda dowodzenia twierdzeń matematycznych ma „dwie warstwy" czy też „dwa etapy". Pierwszy z nich to przeprowadzony w matematyce idealnej dowód w sensie ścisłym, w którym każdy krok dowodu jest albo aksjomatem systemu, albo wynika z aksjomatu lub innego dowiedzionego wcześniej zdania na mocy reguł inferencyjnych. Drugi polega na zastosowaniu Strategii Wymiany Metamatematycznej i sprowadza się do metamatematycznej oceny uzyskanego twierdzenia, tj. do przypisania zdaniu matematyki idealnej treści matematycznej. Widać z tego jasno, że uznawanie, iż formalizm programu Hilberta redukuje matematykę do „wolnej gry symboli", jest nieporozumieniem.

Przejdźmy teraz do drugiej interpretacji, która zdaje się dominować w historycznych badaniach nad programem Hilberta[33]. Podsumować ją można krótko w sposób następujący:

---

[33] D.W. Galloway, *Finitism…*, dz. cyt. Por. także R. Zach, *Hilbert's Finitism*, dz. cyt.

(Interpretacja 2)

(a) Sądy i dowody realne = sądy i dowody treściowe = sądy i dowody finitystyczne.

(b) Sądy i dowody idealne = sądy i dowody formalne = sądy i dowody infinitystyczne.

Galloway – zwolennik tej interpretacji – twierdzi dodatkowo, że nie wszystkie wyrażenia symboliczne (np. zmienne) należą do matematyki idealnej. Uważa, że finitystyczną część matematyki można utożsamić z *Primitive Recursive Arithmetics* Thoralfa Skolema.

Według Gallowaya program Hilberta składa się z trzech elementów: programu niesprzeczności, programu konserwacji i tzw. Głównego Argumentu (*Master Argument*). Program niesprzeczności polega na udowodnieniu niesprzeczności systemu formalnego, w którym zawarta jest matematyka infinitystyczna. Program konserwacji zmierza do wykazania, że cała matematyka klasyczna jest konserwatywnym rozszerzeniem finitystycznego fragmentu matematyki. Główny Argument pokazuje z kolei związek między oboma programami: wykazujemy w nim, iż jeśli mamy finitystyczny dowód niesprzeczności dla systemu idealnego I, to dla dowolnej skończonej formuły S dowiedlnej w I możemy efektywnie skonstruować czysto finitystyczny dowód S.

Interpretacja Gallowaya budzi pewne wątpliwości. Po pierwsze, trudno ją pogodzić z wyraźnymi deklaracjami Hilberta. W cytowanym powyżej fragmencie wykładu z 1926 roku Hilbert *explicite* stwierdza, że zmienne, funktory logiczne i inne wyrażenia budujące sądy idealne należy traktować jak skończone znaki. Po drugie, trudno zrozumieć, dlaczego Hilbert wyróżnia trzy różne pary pojęć, które oznaczają to samo. Wreszcie nie jest do końca jasne, w jaki sposób dowieść można niesprzeczności systemu idealnego *I*, jeśli formuły tego systemu nie są traktowane finitystycznie.

Wydaje się, że przywołane różnice i wątpliwości interpretacyjne nie są przypadkowe. Winę za nie ponosi – w pewnej mierze – sam Hilbert, który nie przedstawiał swych idei filozoficznych z jakąś nadzwyczajną jasnością. Pewne znaczenie ma również fakt, że koncepcje niemieckiego matematyka ewoluowały w czasie. Według nas program Hilberta można przedstawić w sposób następujący:

(ETAP 1) Identyfikacja niebudzącej wątpliwości, finitystycznej części matematyki realnej (treściowej).
(ETAP 2) Formalizacja tej części matematyki (przy czym nie ma znaczenia, czy tę formalną część będziemy już nazywać matematyką idealną, czy ciągle realną).
(ETAP 3) Zbudowanie odpowiedniego systemu formalnego (aksjomatów i reguł inferencyjnych), z których da się zrekonstruować finitystyczną część matematyki. Sformalizowana matematyka treściowa pełni w tym procesie funkcję heurystyczną; można zatem powiedzieć, że na tym etapie aksjomaty traktowane są „treściowo".
(ETAP 4) Potraktowanie skonstruowanego systemu formalnego jako zbioru skończonych znaków (finitystyczna matematyka idealna w sensie Detlefsena).

(ETAP 5) Dowód niesprzeczności (i ewentualne inne dowody metamatematyczne) systemu formalnego. Dowody te są przeprowadzane w metamatematyce, która jest finitystyczna i treściowa (operuje się tu na skończonych znakach).

(ETAP 6) Metamatematyczna (treściowa) ocena („interpretacja") twierdzeń wygenerowanych przez system formalny. Udowodniona wcześniej niesprzeczność tego systemu gwarantuje prawdziwość uzyskanych twierdzeń (na mocy argumentu przypominającego Główny Argument Gallowaya).

Jak widać, tak zarysowany program przypomina metodę Gordana: w trakcie obliczeń wyrażenia zapisane symbolicznie traktujemy jak „pozbawione treści", a ich treściowej oceny dokonujemy jedynie na wstępie (formułując aksjomaty) i na końcu (metamatematycznie oceniając uzyskane wyniki). Podobieństwo to jest jednak złudne. Kluczowa różnica obu ujęć sprowadza się do tego, że Hilbert mówi o stworzeniu systemu aksjomatycznego. System ten – by uwiarygodnić uzyskane w jego ramach wyniki – należy za każdym razem poddać analizie, aby wykazać, iż jest on niesprzeczny, zupełny i rozstrzygalny.

Postulat niesprzeczności jest oczywisty i był powtarzany przez Hilberta przy każdej okazji prezentacji idei systemu formalnego i dowodu. W wykładzie z 1927 roku Hilbert tak przedstawia to zagadnienie, wiążąc je z wprowadzeniem rozróżnienia na matematykę idealną i realną:

W obecnej sytuacji problemowi niesprzeczności można w pełni zaradzić, jako że celem po wprowadzeniu przedmiotów idealnych staje się wykazanie, iż niemożliwe jest otrzymanie dwóch logicznie sprzecznych sądów, np. Y i ~Y. Jak zaznaczałem, zdanie

$$(A \ \& \ {\sim}A) \rightarrow B$$

wynika logicznie z aksjomatów dla negacji. Jeśli zastąpimy w nim A sądem Y, a B nierównością $0 \neq 0$, to otrzymamy:

$$(Y \ \& \ {\sim}Y) \rightarrow (0 \neq 0).$$

Gdy mamy już tę formułę, możemy wywieść formułę $0 \neq 0$ z Y i ~Y. By dowieść niesprzeczności, musimy więc jedynie wykazać, że $0 \neq 0$ nie można uzyskać z naszych aksjomatów poprzez zastosowanie obowiązujących reguł, a zatem że $0 \neq 0$ nie jest dowiedlne. A jest to zadanie, które mieści się w dziedzinie intuicji, tak jak np. w dziedzinie treściowej teorii liczb mieści się zadanie dowiedzenia, że pierwiastek kwadratowy z 2 jest liczbą niewymierną. (...) Sformalizowany dowód – tak jak liczebnik – jest konkretnym, poznawalnym obiektem, który można zakomunikować w całości. To, że ostatnią formułą dowodu jest „$0 \neq 0$", jest także własnością dowodu, którą można ustalić konkretnie. Taki dowód można przeprowadzić, co uzasadnia wprowadzenie naszych idealnych sądów. Jednocześnie łatwo dostrzec, że pozwala to także na rozwiązanie problemu (...) dowiedzenia niesprzeczności aksjomatów arytmetyki[34].

[34] D. Hilbert, *The Foundation of Mathematics*, dz. cyt.

Warto podkreślić, że proponowany przez Hilberta dowód niesprzeczności arytmetyki ma być dowodem metamatematycznym, tj. że istotna jego część opiera się na rozważaniach „treściowych", które jednak wykorzystują jedynie metody finitystyczne.

Drugim postulatem Hilberta odnośnie do systemu formalnego jest jego zupełność. Wymóg ten został po raz pierwszy zdefiniowany precyzyjnie w heidelberskich wykładach Hilberta z 1917 roku:

> Spójrzmy teraz na problem zupełności. Nazwiemy rozważany system aksjomatów zupełnym, jeśli zawsze uzyskamy sprzeczny system aksjomatów, jeśli tylko dodamy formułę, której nie da się wywieść z dotychczasowego systemu podstawowych formuł[35].

Problem zupełności wymaga dłuższego komentarza. Już we wcześniejszych pismach i wypowiedziach Hilberta można odnaleźć postulat zupełności, choć sformułowany nieformalnie bądź ograniczony do jednej dziedziny matematycznej i przedstawiony jako aksjomat. I tak w *Grundlagen der Geometrie* wprowadzony został aksjomat V(2), który stwierdza, że niemożliwe jest rozszerzenie systemu punktów, linii i płaszczyzn poprzez dodanie nowych obiektów tak, by inne aksjomaty pozostały

[35] D. Hilbert, *Prinzipien der Mathematik*, wykład z 1917 roku, cyt. za: W. Sieg, *Hilbert's Programs: 1917–1922*, „Department of Philosophy" 1997, Paper 540, http://repository.cmu.edu/philosophy/540.

spełnione[36]. W 1905 roku Hilbert sformułował podobny aksjomat dla liczb rzeczywistych. W tym samym dziele postawił ogólne pytanie o zupełność: czy system aksjomatów wystarcza, by dowieść wszystkich „faktów" badanej teorii?[37]

Łatwo zauważyć, że pojęcie zupełności sformułowane przez Hilberta w 1917 roku jest własnością systemu formalnego (jest zatem pojęciem metamatematycznym). Co więcej, zdefiniowana własność to tzw. zupełność (syntaktyczna) w sensie Posta. Należy ją odróżnić od tzw. negacyjnej zupełności syntaktycznej definiowanej w sposób następujący:

> System S nazywamy zupełnym w sensie negacyjnym, jeżeli dla każdej formuły A systemu S (tj. wyrażonej w języku systemu S) albo A, albo ~A jest twierdzeniem systemu S.

Łatwo zrozumieć, dlaczego Hilbert posługuje się pojęciem zupełności w sensie Posta, a nie zupełności negacyjnej. Jego postulat ma odnosić się do wszelkich systemów formalnych, w tym do systemów logicznych. W systemach takich, np. w rachunku zdań bądź w rachunku predykatów, zupełność negacyjna w sposób trywialny nie jest spełniona (np. ani *p*, ani ~*p* nie są twierdzeniami rachunku zdań).

[36] Wydaje się zatem, że taki wymóg zupełności miał charakter systemowy, a nie metalogiczny, w przeciwieństwie do poglądów z 1917 roku.

[37] Por. R. Zach, *Hilbert's Finitism*, dz. cyt.

Hilbert nie formułuje także wymogu zupełności semantycznej (pełności), tzn. że wszystkie formuły systemu S, które są prawdziwe (dla określonego modelu), są jego twierdzeniami. Nie ma to związku, jak można by przypuszczać, z faktem, że wyraźne rozróżnienie między semantyką a syntaktyką nastąpiło dopiero wraz z pracami Alfreda Tarskiego w latach trzydziestych XX wieku. Badania historyków wskazują[38], że w szkole Hilberta odróżniano pojęcia zupełności syntaktycznej i semantycznej jeszcze przed rokiem 1920. Wydaje się raczej, że wymóg zupełności semantycznej nie został sformułowany w ramach programu Hilberta, gdyż nie współgrał on z formalistycznym charakterem tego programu; problem prawdziwości tez arytmetyki pojawia się dopiero na poziomie metamatematycznej oceny twierdzeń systemu formalnego, już po udowodnieniu twierdzenia o niesprzeczności, zupełności itd. Można jednak przyjąć, że dla Hilberta zupełność syntaktyczna (w sensie Posta) miała gwarantować zupełność semantyczną[39].

Trzeba jeszcze dodać, że wymóg zupełności można traktować jako precyzację jednego z aspektów postulatu Hilbertowskiego, który wynika z odrzucenia *ignorabimus* i który nazwaliśmy (P2):

(P2) Można dowieść wszelkich twierdzeń matematycznych.

Możemy zatem zapisać:

(P2.1) System formalny powinien być zupełny w sensie Posta.

---

38 Por. R. Zach, *Hilbert's Program*, dz. cyt.

39 Tamże.

Podobnie rzecz się ma z trzecim wymogiem sformułowanym przez Hilberta, tj. z rozstrzygalnością. Tak jak w przypadku zupełności Hilbert nawiązywał do rozstrzygalności już w wykładach z 1905 roku. Jednak, jak twierdzi Zach[40], pierwszym, który precyzyjnie wyraził ten postulat, był Heinrich Behmann, który w swej pracy habilitacyjnej z 1921 roku pisał:

> Należy wskazać ogólny zbiór instrukcji, na których podstawie da się określić, w skończonej liczbie kroków, poprawność bądź fałszywość dowolnego twierdzenia sformułowanego za pomocą środków logicznych[41].

Najsłynniejsze sformułowanie *Entscheidungsproblem* pochodzi od Hilberta i Wilhelma Ackermanna z *Grundzuge der theoretischen Logik* z 1928 roku:

> *Entscheidungsproblem* zostanie rozwiązany, gdy ktoś wskaże procedurę, która pozwoli na ustalenie w skończonej liczbie operacji, czy dane wyrażenie logiczne jest co do zasady prawdziwe bądź spełnialne. Rozwiązanie *Entscheidungsproblem* ma fundamentalne znacznie dla teorii tych wszystkich dziedzin, których twierdzeń dowodzić można logicznie ze skończonego zbioru aksjomatów[42].

---

[40] Tamże.
[41] Cyt. za: tamże.
[42] D. Hilbert, W. Ackermann, *Grundzuge der theoretischen Logik*, New York 1946.

Jak wspominaliśmy, postulat rozstrzygalności można uważać za doprecyzowanie (P2):

(P2.2) System formalny powinien być rozstrzygalny.

Warto jednak zauważyć, że istnieje pewna różnica między wymogiem zupełności a wymogiem rozstrzygalności[43]. Ten pierwszy pojawiał się początkowo w pismach Hilberta jako aksjomat systemów formalnych (np. geometrii). Dopiero od około 1918 roku zaczęto go traktować jako metamatematyczny wymóg nałożony na system formalny. Rozstrzygalność nigdy nie była ujmowana jako aksjomat. Co więcej, problem rozstrzygalności formułowany jest przez Hilberta i jego uczniów bardziej jako pytanie, a nie jako postulat, który musi zostać spełniony przez system formalny.

3. Podmiot matematyczny

Tak rozumiany program Hilberta presuponuje pewne tezy odnośnie do cech, które musi spełniać podmiot uprawiający matematykę. Niektóre z tych własności są związane z samą ideą systemu formalnego. By móc skonstruować taki system i się nim posługiwać, podmiot musi potrafić co najmniej:

---

[43] Choć można rozumieć wymóg zupełności jako wymóg rozstrzygalności. Mianowicie teoria jest zupełna, gdy nie istnieją w niej wyrażenia nierozstrzygalne.

(P1) Identyfikować i reidentyfikować znaki.
(P2) Manipulować znakami.
(P3) Stosować reguły manipulacji znakami.
(P4) Reaplikować te reguły (potencjalnie wiele razy).

Trzecia presupozycja jest najciekawsza. Czym jest bowiem reguła manipulacji znakami? Weźmy dla przykładu regułę *modus ponens*:

A → B
A

B

gdzie A i B to metajęzykowe zmienne oznaczające dowolne, poprawnie zbudowane wyrażenia danego systemu formalnego. A i B odnoszą się zatem do *potencjalnie nieskończenie wielu* wyrażeń. Mówiąc inaczej, umiejętność zastosowania reguły to umiejętność manipulowania – w taki sam sposób – potencjalnie nieskończenie wieloma symbolami. Jest to, jak się wydaje, bardzo mocna cecha podmiotu matematycznego. Podobna sytuacja zachodzi w przypadku presupozycji P4: podmiot musi mieć zdolność do potencjalnie nieskończenie wielu zastosowań tej samej reguły.

Dodatkowe własności podmiotu wiążą się z rozumowaniami treściowymi, a zatem zarówno z finitystycznymi rozumowaniami matematycznymi, które mają prowadzić do sformułowania aksjomatów, jak i z metamatematyczną oceną uzyskanych w ramach systemu wyników. Podmiot Matematyczny musi zatem:

(P5) Postrzegać treściowo finitystyczne przedmioty matematyczne.

(P6) Potrafić przyporządkować tym przedmiotom znaki, a także umieć „odkodować" te przedmioty ze znaków.

Wszystko to wskazuje, że matematyka nie jest dla Hilberta „wolną grą symboli"; choć system formalny potrzebny jest po to, by uniknąć problemów z nieskończonością aktualną, nie wyczerpuje on matematyki.

Co ciekawe, Hilbert wypowiedział się *explicite* na temat Podmiotu Matematycznego. W nieopublikowanym wykładzie pt. *Logische Prinzipien des mathematischen Denkens* z 1905 roku, zanotowanym przez Ernsta Hellingera, Hilbert postulował istnienie nauki metodologicznie wcześniejszej od matematyki i nawet sformułował w przybliżeniu jeden z jej aksjomatów. Ów aksjomat nazwał Aksjomatem Myślenia (Aksjomatem Istnienia Inteligencji):

> Mam zdolność do myślenia *rzeczy* i oznaczania ich za pomocą prostych znaków (*a*, *b*, X, Y...) w tak całkowicie charakterystyczny sposób, że mogę je zawsze rozpoznać bez wątpliwości. Mój umysł operuje tymi oznaczonymi rzeczami na pewne sposoby, wedle pewnych praw, i jestem w stanie rozpoznać te prawa przez samoobserwację i doskonale je opisać[44].

[44] Cyt. za: M. Hallet, *Hilbert's Axiomatic Method and the Laws of Thought*, [w:] *Mathematics and Mind*, red. A. George, Oxford 1994.

Ta wypowiedź Hilberta wymaga krótkiego komentarza. Po pierwsze, podmiot ten doskonale „wpasowuje się" w finitystyczne tezy filozofii Hilberta. Można by wręcz powiedzieć, że opisany powyżej podmiot posiada dokładnie te własności, które są konieczne do „widzenia w intuicji" systemu formalnego rozumianego jako system skończonych symboli, dowodzenia (finitystycznie) twierdzeń metamatematycznych o tych symbolach, dokonywania treściowej, metamatematycznej oceny twierdzeń wytworzonych w ramach systemu formalnego itd. Z drugiej strony podmiot taki nie jest w stanie oceniać poprawnie (być pewny prawdziwości) twierdzeń infinitystycznych.

Po drugie, Hilbertowski Podmiot Matematyczny nosi wyraźny rys kantowski. Widać to jasno, gdy porówna się propozycję Hilberta z podobnym, na pierwszy rzut oka, „aksjomatem" nauki uprzedniej wobec matematyki, który sformułował w *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* z 1873 roku Ernst Schröder. „Aksjomat" ten, „jeden jedyny", jak określa go sam autor, to „aksjomat trwałości znaków". Głosi on:

> We wszystkich naszych derywacjach i konkluzjach znaki pozostają w naszej pamięci i – co może ważniejsze – na papierze (…). Bez tej zasady ustalonej w drodze dedukcji i generalizacji na podstawie bogatego doświadczenia jakakolwiek indukcja byłaby iluzoryczna, jako że dedukcja zaczyna się w chwili, gdy – po „przebraniu" własności przedmiotów w znaki – analiza przedmiotów zostaje zastąpiona analizą znaków[45].

[45] E. Schröder, *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra fur Lehrer und Studirende*, Leipzig 1873.

Ten Schröderowski „aksjomat" został wyśmiany przez znanego filozofa neokantowskiego Leonarda Nelsona. Zdaniem Nelsona takie znaki, którymi miałaby operować matematyka, byłyby „śladami kredy na tablicy. By znaleźć wnioskowania powszechnie ważne, matematyka potrzebuje pewnych warunków wstępnych odnośnie do stałości jej znaków; warunki te muszą być same apodyktycznie ważne. Jeśli przedmiotami matematyki byłyby ślady kredy na tablicy, matematyka potrzebowałaby apodyktycznie pewnego aksjomatu, twierdzącego, że ślady te są trwałe i że można postawić je w dowolnym miejscu na tablicy. I aksjomat ten – jako apodyktyczne twierdzenie – byłby twierdzeniem *a priori*. Wyobraźcie to sobie: wiedza *a priori* o wiecznie trwałej kredzie! Ktoś, kto uważa, że można obyć się bez ugruntowania matematyki na czystej intuicji czasu, musi w zamian związać los wiedzy apriorycznej z losem kredy i tablicy"[46]. Krytyka Nelsona wymierzona w „metafizykę kredy" jest w gruncie rzeczy krytyką takich prób ugruntowania matematyki, które zamiast do struktur podmiotu transcendentalnego odwołują się do empirii.

Nelson słuchał wykładów Hilberta w 1905 roku i wydaje się, że nie miał powodów, by krytykować Hilbertowski „aksjomat myślenia", tak jak to uczynił z postulatem Schrödera. Transcendentalność Hilbertowskiego podmiotu widać na dwóch poziomach. Po pierwsze, przedmioty, które podmiot matematyczny „widzi", nie mają charakteru empirycznego. Dotyczy

---

[46] L. Nelson, *Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik*, „Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften" 1959, nr 34, s. 140.

to zarówno (treściowych) przedmiotów matematycznych, jak i znaków, którymi przedmioty te zastępujemy; nie jest to jednak przy tym kontemplacja obiektów platońskich. Po drugie, podmiot matematyczny jest zdolny do rozumienia i stosowania reguł – i to stosowania ich potencjalnie nieskończenie wiele razy.

Czym w takim razie różni się Hilbertowski Podmiot Matematyczny od Kantowskiego Podmiotu Transcendentalnego? Można zaryzykować twierdzenie, że – na najogólniejszym poziomie – niczym. Główna różnica między Kantem a Hilbertem sprowadza się do tego, że rozumienie, czym jest matematyka, zmieniło się w ciągu XIX wieku w zasadniczy sposób. Dla Kanta paradygmatem wiedzy matematycznej wciąż była geometria Euklidesa: i arytmetyka, i algebra miały swoje zakorzenienie w intuicji przestrzeni. Pokazuje to dobitnie Lisa Shabel, która – analizując podręcznik do matematyki Christiana Wolffa, z którego najprawdopodobniej uczył swych studentów Kant – wykazuje, że dla myślicieli XVIII wieku arytmetyka była ugruntowana na relacjach geometrycznych, algebra zaś nie stanowiła w ogóle odrębnej dyscypliny matematycznej, a jedynie narzędzie wykorzystywane w rozważaniach geometrycznych i arytmetycznych[47]. Tymczasem – jak ilustruje to dobitnie przywołana na początku tego artykułu historia problemu Gordana – dla Hilberta arytmetyka i algebra były już całkiem samodzielnymi, niesprowadzalnymi do geometrii dziedzinami matematyki. Tę

[47] Por. L. Shabel, *Kant on the ‘Symbolic Construction’ of Mathematical Concepts*, „Studies in the History and Philosophy of Science” 1998, t. 29, nr 4, s. 589–621.

różnicę między Kantem a Hilbertem można też zobrazować, przywołując sposób, w jaki rozumieli oni aksjomaty. Kant pisze:

> Matematyka jest zdolna do posiadania aksjomatów, gdyż za pomocą konstrukcji pojęć w danych naocznych przedmiotu może jego cechy powiązać z sobą *a priori* i bezpośrednio, np. że trzy punkty leżą zawsze w jednej płaszczyźnie. Zasada syntetyczna nie może natomiast nigdy być bezpośrednio pewna jedynie na podstawie pojęć[48].

I gdzie indziej:

> Zasady dyskursywne są czymś innym niż intuitywne, tzn. aksjomaty. Tamte domagają się zawsze jeszcze dedukcji, bez której te mogą zupełnie się obyć, a ponieważ te są właśnie z tego powodu oczywiste, czego zasady filozoficzne przy całej ich pewności nie mogą przecież nigdy udawać, więc nieskończenie wiele brak do tego, by jakiekolwiek twierdzenie syntetyczne czystego i transcendentalnego rozumu było tak oczywiste, jak zdanie „dwa razy dwa jest cztery"[49].

Dla Kanta zatem aksjomaty są twierdzeniami absolutnie pewnymi (bo *apriorycznymi*), które są oparte na bezpośrednim oglądzie intuicyjnym. Jako takie jednak są, po pierwsze,

---

[48] I. Kant, *Krytyka czystego rozumu*, tłum. R. Ingarden, Kęty 2006, B761.
[49] Tamże.

treściowe i, po drugie, nie odgrywają *żadnej istotnej roli inferencyjnej*. W gruncie rzeczy bez aksjomatów można by się obejść, jako że każde twierdzenie matematyczne udowadniamy – ostatecznie – dokonując odpowiedniej konstrukcji w naoczności. Zresztą monadyczna logika, którą dysponował Kant, byłaby nieprzydatna do wyprowadzania nietrywialnych twierdzeń matematycznych z tak rozumianych aksjomatów[50]. Tymczasem Hilbert przyznaje aksjomatom – które można potraktować jako ciąg nic nieznaczących symboli – rolę zgoła odmienną. Idea systemu aksjomatycznego jest sposobem na to, by pokazać powiązania między prawdami matematycznymi i lepiej je zrozumieć.

Te rozbieżności między Kantowskim a Hilbertowskim rozumieniem matematyki nie powinny przesłaniać istotnych podobieństw. I Kant, i Hilbert twierdzą, że matematyk nie zajmuje się ani obiektami empirycznymi, ani „czysto platońskimi". Obaj – jeden *explicite*, a drugi *implicite* – postulują istnienie podmiotu o charakterze *transcendentalnym*, którego cechy, przekraczające zdolności jakiegokolwiek podmiotu empirycznego, stanowią warunek konieczny uprawiania matematyki.

* * *

Jeśli nasze ustalenia są poprawne, to filozofia matematyki Hilberta zakłada bardzo silną metafizykę. Jest to *ukryta metafizyka*

[50] Por. B. Brożek, A. Olszewski, *The Mathematics of the Transcendental Ego*, „Copernicus Center Reports", t. 2, Kraków 2011 i literatura tam cytowana.

Podmiotu Matematycznego, który, choć z pewnymi zastrzeżeniami, można utożsamiać z Kantowskim Podmiotem Transcendentalnym. Nie powinno to jednak zaskakiwać. Elementy Kantowskie odgrywały kluczową, choć nieraz dobrze „ukrytą" rolę w wielu koncepcjach filozoficznych powstałych w pierwszej połowie XX wieku. Znakomitego przykładu dostarczają tu poglądy Rudolfa Carnapa. W *Der logische Aufbau der Welt* i w *Logical Syntax of Language* podjął on bezkompromisową próbę wyrugowania metafizyki z filozofii. W rozwiniętej wersji jego koncepcji, zgodnie z zasadą tolerancji, istniała możliwość wyboru dowolnego języka, który to wybór konstytuuje sposób pojmowania świata. Żaden język nie jest jednak w tym kontekście uprzywilejowany. Ten projekt Carnapa poniósł klęskę, którą Stanisław Wszołek podsumowuje w sposób następujący:

> [Carnap] był ukrytym kantystą. (…) [Jego] zamierzenia okazały się chybione. Okazały się takimi nie tylko dlatego, że postulat neutralności jest utopijny, ale także dlatego, że Carnap, zwalczając metafizykę m.in. Kanta, ciągle pracuje w ramach kantowskiego programu. Inaczej mówiąc, w Carnapowskim rozumieniu konstruowania lub konstytuowania, jak również w jego formalnym podejściu do kwestii filozoficznych, nie ma żadnej neutralności, gdyż logika kantyzmu przenika wszystkie projekty Carnapa. (…) Wybór systemu językowego, podobnie jak u Kanta, jest praktycznym wyborem na poziomie transcendentalnym. W tym kontekście „transcendentalny" znaczy tyle, że użytkownik języka decyduje o regułach na podstawie wartości, które kierują

jego wyborami. Oczywiście użytkownik języka nie jest neutralny. (…) Podmiot konstruujący nie jest podmiotem empirycznym, bo ten sam jest „owocem” konstrukcji. [Carnap mówi], że podmiot byłby empiryczny, gdyby „życie” i „oddychanie” były terminami w systemie semantycznym. A zatem jeśli podmiot nie ma charakteru empirycznego, to jaki jest jego status? Możliwa spójna odpowiedź każe przypisać mu transcendentalny charakter[51].

Bibliografia

Bernays P., *Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: Über Zahlen als Zeichen*, „Mathematische Annalen” 1923, nr 90.

Corry L., *David Hilbert and the Axiomatization of Physics*, Dordrecht 2004.

Dadaczyński J., *Arytmetyka u początku abstrakcyjnego pojmowania geometrii przez Hilberta*, „Filozofia Nauki” 2012, nr 3.

Detlefsen M., *Hilbert's Program: An Essay on Mathematical Instrumentalism*, Dordrecht 1986.

Frege G., *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena 1903, t. 2.

From Frege to Godel: A Sourcebook in Mathematical Logic, red. J. Van Heijenoort, Cambridge, MA 1879–1931.

Galloway D.W., *Finitism: An Essay on Hilbert's Programme*, praca doktorska, MIT 1991.

[51] S. Wszołek, *Nieusuwalność metafizyki*, Kraków–Tarnów 1998, s. 370.

Gordan P., *Ueber einen Satz von Hilbert*, „Mathematische Annalen" 1893, vol. 42.

Hilbert D., Ackermann W., *Grundzuge der theoretischen Logik*, New York 1946.

Hilbert D., *Mathematical Problems: Lecture Delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900*, „Bulletin of the American Mathematical Society" 1902, nr 6.

Hilbert D., *Über das Unendliche*, „Mathematische Annalen" 1926, nr 95.

Kitcher P., *Hilbert's Epistemology*, „Philosophy of Science" 1976, nr 43.

Mathematics and Mind, red. A. George, Oxford 1994.

McLarty C., *Theology and Its Discontents: the Origin Myth of Modern Mathematics*, http://people.math.jussieu.fr/~harris/theology.pdf.

Murawski R., *Rozwój programu Hilberta*, „Wiadomości Matematyczne" 1993, t. 30.

Nelson, *Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik*, „Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften" 1959, nr 34.

Olszewski A., *Matematyka czy teologia? Hilbert, Gordan i początki formalizmu*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 2012, t. LI.

Olszewski A., *Teza Churcha. Kontekst historyczno-filozoficzny*, Kraków 2009.

Panza, *Mathematical Proofs*, „Synthese" 2003, nr 1–2.

Peckhaus V., *The Pragmatism of Hilbert's Programme*, „Synthese", November 2003, nr 1–2, z. 137.

Schröder E., *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra fur Lehrer und Studirende*, Leipzig 1873.

Sieg W., *Hilbert's Programs: 1917–1922*, „Department of Philosophy" 1997, Paper 540, http://repository.cmu.edu/philosophy/540.

Tait W., *Finitism*, „Journal of Philosophy" 1981, nr 78.

The Genesis of General Relativity, red. J. Renn, t. 4, Dordrecht 2006.

Wiener H., *Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 1890/1891, nr 1.

Wszołek S., *Nieusuwalność metafizyki*, Kraków–Tarnów 1998.

Zach R., *Hilbert's Finitism*, dysertacja doktorska, Berkeley 2001.

Zach R., *Hilbert's Program*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/.

Gottlob Frege o liczbie
Przyczynek do określenia roli, jaką dla filozofów pełni historia matematyki

Gabriela Besler
Instytut Filozofii, Uniwersytet Śląski

Gottlob Frege on numbers
An attempt to determine the role of the history of mathematics in the work of philosophers

Abstract
In this paper I will focus on Frege's six crucial claims on numbers. I begin with indicating the reasons for his interest in this topic and conclude with a reflection on the role of the history of mathematics in the practice of philosophy. Frege believed that the study on numbers is a common task for both philosophers and mathematicians. In this article, priority is given to the philosophical aspect.

Key words:
history of mathematics, number, Gottlob Frege

> [...] gruntowne badania nad pojęciem liczby [*Zahlbegriff*] muszą jednak okazać się w pewnej mierze filozoficzne. Zadanie to jest bowiem wspólne matematyce i filozofii[1].

Wstęp

Ponad czterdziestoletni dorobek naukowy Gottloba Fregego był podporządkowany poszukiwaniu odpowiedzi na filozoficzno-matematyczno-logiczne pytanie „Czym jest liczba?". Powszechnie uważa się, że Frege opracował jedną koncepcję liczby, odwołującą się do równoliczności pojęć, w której szczególne miejsce zajmuje operator „jest liczbą". Okres, w którym pracował nad tym rozwiązaniem, jest traktowany jako szczytowy w rozwoju myśli Fregego; wszystko, co było przed tym – było okresem przygotowawczym, a wszystko, co potem – okresem schyłkowym. W tym tekście skupię się na wyróżnieniu sześciu ważnych, kluczowych wypowiedzi dotyczących liczby. Mój artykuł rozpocznę od informacji na temat powodów zainteresowania się tym tematem przez Fregego, a zakończę refleksją na temat roli historii matematyki w uprawianiu filozofii. Frege uważał, że badanie liczby jest zadaniem wspólnym filozofom i matematykom. Tu pierwszoplanowo traktuję aspekt filozoficzny.

[1] G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Hamburg 1986, s. 6 (*Podstawy arytmetyki. Logiczno-matematyczne badania nad pojęciem liczby*, [w:] F. Brentano, G. Frege, Ch. Thiel, *Próby gramatyki filozoficznej. Antologia*, tłum. i oprac. K. Rotter, Wrocław 1997, s. 89).

Geneza zainteresowania się liczbą jako liczbą

Pytanie o liczbę było pierwszym filozoficznym pytaniem Fregego i okazało się centralnym dla jego filozofii. Wszystko, czego dokonał w filozofii, logice i semantyce, było konsekwencją badania liczby. Za upokarzający uważał brak jasności co do podstawowego przedmiotu zainteresowań matematyki, jakim jest liczba. Jak pisał: przejrzystość podstaw to potrzeba rozumu (*Vernunft*)[2]. Pojęcie liczby uważał za szczególne. Wydaje się, że można wskazać na dwie inspiracje badań Fregego nad liczbą: niezadowolenie z poziomu literatury matematycznej (w tym podręczników) w jego czasach oraz niezadowolenie z charakteru własnych prac awansowych, doktorskiej i habilitacyjnej[3]. Bezpośrednią inspiracją do badania podstaw arytmetyki mogły być dla Fregego niedostatki dostrzeżone w książce Heinricha Seegera pt. *Die Elemente der Arithmetik, für den Schulunterricht bearbeitet* (1874), której recenzję Frege opublikował w 1874 roku[4]. Dotyczyły one mało zrozumiałego dla uczniów sposobu określenia niektórych pojęć matematycznych (np. liczb ujemnych) oraz związanych z nimi praw. Zauważone

[2] Tamże, s. 17 (s. 98).

[3] Tenże, *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen. Dissertation zur Erlangung der Venia Docendi bei der Philosophischen Fakultät in Jena*, Jena 1874, [w:] *Kleine Schriften*, Darmstadt 1967, s. 50–84.

[4] Tenże, [rec.] H. Seeger, *Die Elemente der Arithmetik, für den Schulunterricht bearbeitet*, „Jenaer Literaturzeitung” 1874, Bd. 1, s. 722, [w:] *Kleine Schriften*, Hamburg 1983, s. 85–86.

braki mogły być jednym z bodźców do zajęcia się fundamentalnymi kategoriami arytmetyki oraz źródłem programu logicyzmu[5]. Do realizacji tych zadań Frege przygotowywał się już od swej pierwszej książki, *Begriffsschrift* (1879)[6], poświęconej opracowaniu pewnego języka logicznego (zwanego pismem pojęciowym), wypunktowaniu aksjomatów i pokazaniu zastosowania tego języka do charakterystyki szeregu (*Reihe*). Badanie między innymi tych zagadnień doprowadziło go do głównego zadania jego pracy naukowej: jak zdefiniować liczbę za pomocą pojęć logicznych.

Uporządkowanie ważnych sformułowań dotyczących liczby

W tym artykule zarysowuję drogę, jaką przebył Frege, począwszy od niedostatków zauważonych w określaniu liczby na użytek matematyki i wczesnych prac, poprzez kolejne próby zaradzenia tym zauważonym brakom w matematyce aż do tekstów pisanych na krótko przed śmiercią. Publikował w formie książek lub artykułów, choć pozostawił także teksty niepublikowane,

[5] Zob. T.W. Bynum, *On the Life and Work of Gottlob Frege*, [w:] *Conceptual Notation and Related Articles*, tłum. i oprac. T.W. Bynum, Oxford 1972, s. 9.

[6] G. Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Zürich–New York 1998 (*Ideografia. Język formalny czystego myślenia wzorowany na języku arytmetyki* [*Przedmowa*, §§ 1–13], [w:] F. Brentano, G. Frege, Ch. Thiel, *Próby gramatyki filozoficznej*..., dz. cyt., s. 45–85).

ale przygotowane do druku, oraz teksty, których nie przygotował do publikacji. Snuł ponadto listowne dyskusje z matematykami i filozofami pracującymi nad podobnymi zagadnieniami w jego czasach. Niektóre z tych materiałów nie przetrwały drugiej wojny światowej.

Intensywne badania, jakie prowadził Frege, zaowocowały trzema książkami (w tym jedną wydaną w dwóch tomach) i licznymi artykułami[7]. Analizując ich treść, wyodrębniłam sześć ważnych sformułowań dotyczących określenia liczby, mimo że zazwyczaj przywołuje się jedno, odwołujące się do równoliczności pojęć. W literaturze jest najczęściej w ogóle pomijany pomysł łączenia liczby z geometrią, którego Frege nie zdążył już opracować. Uważam, że wszystkie omawiane przeze mnie sformułowania były dla Fregego kolejnymi etapami w szukaniu możliwości uściślenia podstaw arytmetyki

[7] Oto wszystkie pozycje Fregego traktujące bezpośrednio o liczbie. Zastosowano następujące skróty: opublikowane (O), niepublikowane za życia Fregego, ale przygotowane przez niego do druku (NP), niepublikowane i nieprzygotowane do druku (NN). Pełna informacja bibliograficzna znajduje się na końcu artykułu. *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (1879), *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884), *Über Begriff der Zahl* (1891–1892) – NN, *Über Begriff und Gegenstand* (1892) – O, *Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. 1 (1893) – O, *Über der Zahlen des Herrn H. Schubert* (1899) – O, *Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. 2 (1903) – O, *Nachwort* (1903), *Tagebucheintragungen über Begriff der Zahl* – NN, *Zahl* (1924) – NN, *Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften* (1924–1925) – NP, *Zahlen und Arithmetik* (1924) – NN, *Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik* (1924/1925). Ten spis można byłoby uzupełnić listami, które traktowały o tej problematyce.

liczb naturalnych. Pierwszych pięć zarazem określało zręby logicyzmu Fregego (jako stanowiska co do podstaw arytmetyki), przyjmującego, że wszystkie jej główne pojęcia i operacje mogą być zdefiniowane na podstawie pojęć i operacji logicznych. Uważam, że pokazując rozwój poglądów autora, warto zatrzymać się także na tych stopniach jego drogi, które, chociaż mało znane, prowadziły go jednak do przodu. Z tego względu, że najważniejszym momentem w badaniu liczby, jakie prowadził Frege, okazało się znalezienie antynomii w systemie logicznym, w którym była wyrażona jedna z koncepcji liczby, kluczowe sformułowania dotyczące liczby porządkuję następująco:

Okres przed znalezieniem antynomii

1) liczba określana jako funkcja konstytuująca szereg (*Begriffsschrift* i *Anwendungen der Begriffsschrift*, 1879);
2) liczba określana indukcyjnie i zarazem przez relację podpadania pod pojęcie (*Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884);
3) liczba określana przez relację równoliczności pojęć, wyrażoną za pomocą słów, a nie symbolicznie (*Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884);
4) liczba określana przez relację równoliczności pojęć, ale wyrażoną za pomocą pisma pojęciowego (*Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. 1, 1893; Bd. 2, 1903);

Okres po znalezieniu antynomii

5) liczba określana przez relację równoliczności wraz z próbami ominięcia antynomii (*Nachwort*, [w:] *Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. 2, 1903, s. 253–265);
6) liczba określana przez oparcie arytmetyki liczb naturalnych nie na logice, ale na geometrii (*Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik*, 1924/1925).

Podane przez Fregego określenie liczby umożliwiało określenie poszczególnych liczb: 0, 1, 2 itd. W określeniach 1, 4 i 5 kluczową rolę odgrywał zapis za pomocą Fregego pisma pojęć. Z tego względu, że celem mojego artykułu nie jest prezentacja języka logiki Fregego (temat zbyt obszerny), te sformułowania podam tylko w języku naturalnym.

Liczba określana jako funkcja konstytuująca szereg

W 1879 roku Frege opublikował *Begriffsschrift*, w którym sformułował syntaktykę i semantykę dla rachunku zdań oraz rachunku predykatów pierwszego i drugiego stopnia. Posługując się takimi narzędziami, zdefiniował pojęcie szeregu (za pomocą funkcji konstytuującej szereg) i następnika w szeregu oraz relację następowania. W dalszej kolejności w *Anwendungen der Begriffsschrif* (1879) określił dodatnią liczbę całkowitą indukcyjnie jako funkcję konstytuującą szereg, przy czym posłużył się następującymi terminami pierwotnymi: liczba, następstwo, 0 i 1. Oto parafraza logicznego zapisu Fregego: „a jest dodatnią liczbą całkowitą, jeżeli należy do szeregu zaczynającego się od 0 i konstytuowanego przez powiększanie o 1[8]”.

Na tym sformułowaniu Frege nie poprzestał, lecz prowadził swe badania dalej, co spowodowane było między innymi tym, że więcej obiektów da się policzyć (zindywidualizowane, materialne, niematerialne, następujące po sobie w czasie), niż ustawić w szereg, a więc powyższe określenie liczby radykalnie ogranicza jej zastosowanie.

Liczba określana indukcyjnie i zarazem przez relację podpadania pod pojęcie

Pierwsze określenie liczby, związane z *Begriffsschrift*, było dokonane za pomocą narzędzi logicznych i wyrażone w języku symbolicznym. Ze względu jednak na to, że język logiczny, jakim posługiwał się Frege, odstraszał wielu potencjalnych czytelników, postanowił z niego zrezygnować na rzecz języka naturalnego. Uważał, że tym sposobem rozszerzy zakres oddziaływania swej koncepcji. Następny etap poszukiwania precyzyjnego określenia, czym jest liczba, znalazł wyraz w początkowych paragrafach *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884). Tam

[8] Zob. G. Frege, *Anwendungen der Begriffsschrift*, „Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft” 1879, nr 13, [w:] *Begriffsschrift*…, dz. cyt., s. 90.

indukcyjne określenie liczby zostało istotnie zmodyfikowane przez zastosowanie (niestosowanej wcześniej) relacji podpadania obiektu pod pojęcie. Ten drugi istotny sposób określenia liczby można byłoby nazwać przejściowym z tego względu, że z jednej strony autor odwołuje się do (tak typowego dla definicji indukcyjnej) następnika, a z drugiej pojawia się element, który już wkrótce okaże się kluczowy przy definiowaniu opartym na równoliczności: relacja podpadania pod pojęcie. Nim przejdę do przedstawienia określenia przejściowego, odnotuję parę informacji o ważnym odróżnieniu *Zahl* od *Anzahl* wprowadzonym w *Die Grundlagen der Arithmetik*, a więc w dojrzałym okresie badań nad liczbą. Trudno wskazać drogę, która doprowadziła go do konieczności przyjęcia takiego rozwiązania. Poniżej przedstawię czytelnikowi, jak rozumiał on te dwa słowa, bliskoznaczne w potocznym języku niemieckim. Frege pisał:

> [...] liczba [Zahl – przyp. G.B.], którą zajmuje się arytmetyka, musi być traktowana nie jako niesamodzielny atrybut, lecz rzeczownikowo (różnica ta odpowiada różnicy między „błękitny" a „kolor nieba"). Liczba [Zahl – przyp. G.B.] jawi się więc jako rozpoznawalny przedmiot, chociaż nie fizyczny ani nawet przestrzenny, czy taki, który moglibyśmy sobie jakoś wyobrazić[9].
>
> Liczby zachowują się […] całkiem inaczej niż indywidua jakiegoś gatunku zwierząt, gdyż są w określony sposób uszerego-

[9] Tenże, *Die Grundlagen der Arithmetik*..., dz. cyt., § 106, s. 105 (*O pojęciu liczby*..., dz. cyt., s. 201).

> wane przez naturę, a każda utworzona jest w jej tylko właściwy sposób i ma swoją odrębność, która daje o sobie znać szczególnie wyraźnie w przypadku 0, 1 i 2[10].

Zahl to obiekt idealny, jedna z poszczególnych liczb, na przykład 3, 4 itd.[11] *Anzahl* jest liczebnością zbioru (dziś powiemy: mocą zbioru, liczbą kardynalną) i daje odpowiedź na pytanie, ile jest obiektów pewnego rodzaju. *Anzahl* jest predykatem drugiego rzędu, orzekanym o pojęciach pierwszego rzędu; było odnoszone albo do zakresu pojęcia, albo do ogólnego pojęcia liczby. Z kolei liczebniki są pomyślane jako nazwy własne liczb-obiektów, nie jako predykaty.

Frege uważał, że pytanie o liczbę jest zadaniem wspólnym dla matematyków i filozofów[12]. Wprowadzone rozróżnienie na *Zahl* i *Anzahl* pozwalało mu pokazać filozoficzną głębię zagadnienia, uzupełnioną potem opisem logicznym.

Przejściowe określenie liczby brzmi następująco:

> Pojęciu F przysługuje liczba [Zahl – przyp. G.B.] (n + 1), gdy istnieje taki przedmiot a podpadający pod F, że pojęciu „podpadający pod F, lecz nie a" przysługuje liczba [Zahl – przyp. G.B.] n[13].

---

[10] Tamże, § 10, s. 24 (*Podstawy arytmetyki*..., dz. cyt., s. 105).
[11] Tamże, § 18, s. 32 (s. 113).
[12] Tamże, s. 6 (s. 89).
[13] Tamże, § 55, s. 66 (*O pojęciu liczby*..., dz. cyt., s. 177). Wydaje się, że Frege powinien użyć tu słowa *Anzahl*, które od początku książki jest łączone z pojęciem. Z drugiej jednak strony wcześniej pisał, iż liczby pojęte jako nieprzestrzenne i nieczasowe przedmioty tworzą

Jako narzędzia użyto tu relacji podpadania pod pojęcie, relacji przysługiwania i funktora negacji. W domyśle przyjęto, że obiekty mogą podpadać pod pojęcia własność pojęcia w tradycyjnym rozumieniu) oraz możliwość określenia zakresu pojęcia (przy tradycyjnym rozumieniu pojęcia).

Mając takie narzędzie, Frege następująco określał zero: „[...] pojęciu przysługuje liczba 0, gdy dla każdego a jest prawdą, że a pod to pojęcie nie podpada”[14].

W podobny sposób została określona liczba jeden:

> [...] pojęciu F przysługuje liczba 1, gdy nie dla każdego a jest prawdą, że a nie podpada pod F, i gdy ze zdań „a podpada pod F” i „b podpada pod F” wynika, że a jest tym samym co b[15].

Podstawową zaletą tej strategii było to, że pozwalała osiągnąć liczbę „własnymi siłami również wówczas, gdy nie mamy jej oglądu”[16]. Dzięki takiej metodzie liczbę 437 986 można zdefiniować na podstawie odwołania do jej poprzednika i powiększenia o 1, chociaż nie mamy jej oglądu[17]. Mimo wszystko Frege nie był jednak zadowolony z powyższego rozwiązania i poda-

---

szereg, a „pozycje w szeregu liczbowym nie są równoważne (*gleichwertig*) jak miejsca w przestrzeni”. Tamże, § 10, s. 24 (*Podstawy arytmetyki*…, dz. cyt., s. 105).

[14] Tamże.

[15] Tamże.

[16] Tamże, § 6, s. 18 (*Podstawy arytmetyki*..., dz. cyt., s. 99).

[17] Tamże.

nych określeń zera i jedynki[18], a to niezadowolenie warunkowało jego dalsze badania.

Liczba określana w odwołaniu do równoliczności pojęć, wyrażona bez użycia symbolizmu logicznego

Zasygnalizowane powyżej braki spowodowały dalsze poszukiwania. Zasadniczym celem *Die Grundlagen der Arithmetik* było określenie liczby w odwołaniu do równoliczności zakresów dwóch pojęć i zastosowanie tak zwanej zasady Hume'a, którą Frege znał z tekstu Hume'a, zacytowanego przez Petera Baumanna w drugim tomie z 1869 roku:

> Jeżeli dwie liczby są takie, że jedna z nich zawiera jednostkę, która odpowiada każdej jednostce drugiej, to twierdzimy, że są one równe[19].

Przy tym sformułowaniu liczby bardzo ważne okazało się wcześniej sygnalizowane rozróżnienie na *Zahl* i *Anzahl*, co przypomnę jeszcze jednym cytatem:

[18] Więcej na ten temat zob. G. Besler, *Gottloba Fregego koncepcja analizy filozoficznej*, Katowice 2010, s. 170.
[19] G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*..., dz. cyt., § 63, s. 71 (*O pojęciu liczby*..., dz. cyt., s. 181).

> Jeśli równie dobrze mogę nazwać przedmiot zielonym i czerwonym, jest to oznaką tego, że przedmiot ten nie jest właściwym nośnikiem zieleni. [...] Podobnie przedmiot, któremu równie dobrze mogę przypisać różne liczby [Zahl – przyp. G.B.], nie jest właściwym nośnikiem liczby [Zahl – przyp. G.B.][20].

A zatem liczba (*Zahl*) jest przedmiotem (idealnym). Ten wątek filozofii Fregego wzbudzał wiele emocji. Przywołam tu następujące sformułowanie Michaela Dummetta, ważnego komentatora pism Fregego, który przekonanie co do istnienia przedmiotów matematycznych porównywał do wiary w Boga: wierzy się lub nie[21] i na tym możliwość racjonalnego dyskursu by się kończyła.

Ważne jest także, by dookreślić, jak Frege rozumiał pojęcie. Wprawdzie przyrównał pojęcie do funkcji wyraźnie dopiero w artykule *Funkcja i pojęcie* z 1891 roku, czyli siedem lat po wydaniu *Die Grundlagen der Arithmetik*, wydaje się jednak, że już w 1884 roku pojęcie było rozumiane na wzór funkcji jednoargumentowej (*einfacher Begriff*) lub dwuargumentowej (*Beziehungsbegriff*)[22]. Tym sposobem z pojęciem nie łączyła się konkretna treść (w zasadzie nigdy pojęcia nie łączono z konkretną treścią, zawsze pojęcie miało naturę ogólną) i miało ono „jedynie

---

[20] Tamże, § 22, s. 35 (*Podstawy arytmetyki*..., dz. cyt., s. 116).

[21] M. Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, London 1995, s. 307.

[22] G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*…, dz. cyt., § 70, s. 78 n. (*O pojęciu liczby*…, dz. cyt., s. 186).

formę logiczną"[23]. To nowe rozumienie pojęcia było szczególnie istotne przy omawianym tu określeniu liczby, w odwołaniu się do równoliczności zakresów pojęć.

Poniższy fragment jest trzecim, najpełniejszym określeniem liczby:

> Liczba [*Anzahl* – przyp. G.B.] przysługująca pojęciu F jest to zakres pojęcia „pojęcie równoliczne z pojęciem F", przy czym pojęcie F nazywamy równolicznym z pojęciem G, jeżeli istnieje możliwość wzajemnie jednoznacznego przyporządkowania [przedmiotów podpadających pod pojęcie F przedmiotom podpadającym pod pojęcie G – przyp. G.B.][24].

W definicji tej wyraźnie zaznaczono, że liczebność (*Anzahl*) jest predykatem drugiego stopnia, orzekanym o dwóch pojęciach pierwszego stopnia, których zakresy są równoliczne[25]. Tak określona liczebność była punktem kluczowym logicyzmu Fregego. Celem badawczym *Die Grundlagen der Arithmetik* było zdefiniowanie albo uznanie za niedefiniowalne *Anzahl*[26].

---

[23] Tamże, § 70, s. 79 (*O pojęciu liczby…*, dz. cyt., s. 187). Por. G. Frege, *Funktion und Begriff*, [w:] *Kleine Schriften…*, dz. cyt., s. 125–142 (*Funkcja i pojęcie…*, dz. cyt., s. 18–44).

[24] Tenże, *Grundlagen der Arithmetik…*, dz. cyt., § 107, s. 106 (*O pojęciu liczby...*, dz. cyt., s. 202).

[25] Otwartym problemem pozostaje ontologiczna relacja pomiędzy *Zahl* (obiekt idealny) i *Anzahl* (pojęcie drugiego stopnia). Frege nie podejmował tego problemu.

[26] Tamże, § 4, s. 16 (*Podstawy arytmetyki…*, dz. cyt., s. 97).

Po zdefiniowaniu liczby jako *Anzahl* Frege definiował poszczególne liczby: 0, 1, itd. Użyte tu pojęcia pierwotne to zakres, pojęcie, a narzędziami są: relacja jedno-jednoznacznego przyporządkowania, odnoszenie się pojęcia do obiektu[27].

Słabą stroną omawianego tu określenia liczby było jedynie to, że zostało ono sformułowane w języku naturalnym, a nie precyzyjnym języku logiki, dokładniej: Fregego piśmie pojęciowym, przedstawionym w pierwszej książce, *Begriffsschrift*… (rozbudowanym *w Grundgesetze der Arithmetik*). Ten brak Frege uzupełnił parę lat później, publikując pierwszy tom wspomnianych *Grundgesetze der Arithmetik*.

Liczba określana w odwołaniu do relacji równoliczności pojęć i wyrażana za pomocą symbolizmu logicznego

Następnym etapem rozwoju była budowa systemu logicznego (w języku Fregego: posłużenie się „pismem pojęć”), z określonymi aksjomatami, regułami i definicjami terminów pierwotnych, w którym definiowane były: liczba naturalna, zero, jedynka, następnik w ciągu, inne liczby naturalne. Z takim zamysłem powstały dwa tomy *Grundgesetze der Arithmetik*[28],

[27] Więcej zob. G. Besler, *Gottloba Fregego koncepcja*…, dz. cyt., s. 163–189.

[28] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. Band 1 und 2. In moderne Formelnotation transkribiert und mit*

istotnie rozbudowujące pomysły z 1884 roku. Dla przykładu, Frege wprowadził oznaczenie na *Anzahl*: skośną kreskę przebiegającą zapisaną cyfrę z lewej strony do prawej. Ponownie podkreślał rozróżnianie między poszczególnymi liczbami (*Zahl*) 3, 4 itd., a ogólnym pojęciem liczebności (*Anzahl*). W konsekwencji liczba (*Zahl*) 1 różni się więc od liczebności (*Anzahl*) 1[29]. W drugim tomie *Anzahl* jest określana jako odpowiedź na pytanie, ile jest obiektów pewnego rodzaju[30]. W *Grundgesetze der Arithmetik* zamiast o równoliczności pojęć jest mowa o identyczności zakresów wartości funkcji. Tym sposobem wydawało się, że liczba będzie określona z nieznaną dotąd precyzją.

Można powiedzieć, że w omawianej pozycji jest określany operator „jest liczbą". Należy dodać, że u Fregego używanie operatorów wiązało się z jego fundamentalnym rozróżnieniem ontologicznym, mianowicie odróżnieniem przedmiotów (rozumianych na wzór argumentów dla funkcji) od pojęć (rozumianych na wzór funkcji)[31]. Rolą operatora było przekształcenie zapisu funkcji, czyli formuły funkcyjnej, w nazwę odpowiedniego rodzaju przedmiotu, rodzaj przedmiotu zależał zaś od rodzaju

---

einem ausführlichen Sachregister versehen von Thomas Müller, Bernhard Schröder und Rainer Stuhlmann-Laeisz, Paderborn 2009 (Bd. 1 Aufl. 1, Jena 1893; Bd. 2 Aufl. 1, Jena 1903).

29 Tamże, Bd. 1, § 41, s. 75.

30 Tamże, Bd. 2, § 157, s. 452.

31 To rozróżnienie zostało wprowadzone w 1891 roku w artykule *Funktion und Begriff…*, dz. cyt., s. 22–31. W *Grundgesetze der Arithmetik* Frege także się nim posługuje (zob. np. G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik…*, dz. cyt., Bd. 1, § 2, s. 29).

użytego w danym przypadku operatora. Przyjęcie takiego rozwiązania było konieczne dla Fregego, bo funkcje, jako elementy niezupełne, nie były przedmiotami i nie można było napisać: $f = g$. Przebieg wartości funkcji był natomiast czymś zupełnym w sobie (a więc przedmiotem) i przebiegi dwóch funkcji mogły być sobie równe. Uważał, że w ten sposób podał kryterium identyczności zakresów dwóch pojęć: pojęcia będą miały identyczne zakresy wtedy, gdy w ich zakresach będą te same przedmioty. W *Grundgesetze*... występują dwa ważne operatory:

1) operator abstrakcji (operator na oznaczenie przebiegu wartości funkcji) – symbol: samogłoska alfabetu greckiego z przydechem;
2) operator deskrypcji (operator zastępowania zaimka określonego) – tworzy z funkcji propozycjonalnej nazwę jedynego przedmiotu spełniającego tę funkcję.

Określenie liczby, jakie pojawiło się w *Grundgesetze*..., jest istotnie związane z tzw. piątym aksjomatem, który mówi o równoliczności zbiorów, co można przedstawić tak: dwie funkcje mają identyczne przebiegi swych wartości wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego argumentu przyjmują tę samą wartość[32]. We wprowadzeniu do tej książki Frege tak ujął swój nowy sposób określenia liczby: „*Liczbę [Anzahl] wyjaśniłem stosunkiem równoliczności, a ten przyporządkowaniem jednoznacznym*"[33].

[32] Tamże, Bd. 1, § 47, s. 79.
[33] Tamże, Bd. 1, s. 26.

Jako przykład pojęć posiadających ten sam zakres można podać trójbok i trójkąt, a wtedy aksjomat piąty brzmiałby następująco: funkcja *f* – ilość kątów w (pewnym) trójboku – jest identyczna z funkcją *g* – ilością kątów w (pewnym) trójboku, gdy zakres wartości funkcji *f* jest identyczny z zakresem wartości funkcji *g*. Ogół przedmiotów spełniających funkcję *f* jest identyczny z ogółem przedmiotów spełniających funkcję *g*, w obu przypadkach jest to liczba 3. A zatem zbiory wartości dwóch funkcji: funkcji *f* – ilość kątów w (pewnym) trójboku, oraz funkcji *g* – ilość kątów w (pewnym) trójboku, są sobie równe. W tym sensie aksjomat piąty stanowi użyteczną „strukturę" przy określaniu poszczególnych liczb naturalnych. *Grundgesetze*... to interesująca pozycja dla badaczy filozoficznego zaplecza Fregego.

Liczba określana w odwołaniu do relacji równoliczności pojęć wraz z próbami uniknięcia antynomii

Wyżej przedstawione ujęcie liczby Frege przyjmował do czasu, gdy w 1903 roku otrzymał list od Bertranda Russella, w którym została przedstawiona możliwość zbudowania antynomii (podobnej do antynomii Russella, o klasie wszystkich klas, która nie jest swoim własnym elementem) na podstawie charakterystyki funkcji, jaką Frege przedstawił w swej pierwszej książce, *Begriffsschrift*[34]. Opierając się na niej, Frege zauważył, że antynomię można zbudować także na podstawie aksjomatu systemu przedstawionego w pierwszym tomie *Grundgesetze der Arithmetik*, opublikowanym dziesięć lat wcześniej, którego drugi tom był w 1903 roku akurat drukowany. Antynomia była generowana między innymi ze względu na brak określonej dziedziny funkcji. By zaradzić powstałej sytuacji, Frege poprzedził aksjomat piąty ograniczeniem tej dziedziny: funkcja nie może być swoim własnym elementem (funkcja nie może należeć do swej dziedziny). Tym sposobem powstało kolejne ważne sformułowanie równolicznościowego określenia liczby, przedstawione w *Nachwort*, dodatku do *Grundgesetze der Arithmetik*[35]. Warto dodać, że na tym etapie Frege uważał, iż określenie liczby przez odwołanie się do równoliczności pojęć jest nadal aktualne, a liczby (*Zahl*) powinny być rozumiane jako idealne obiekty logiczne.

[34] Zob. B. Russell, *List do G. Fregego*, [w:] *Filozofia matematyki…*, dz. cyt., s. 221–222; G. Frege, *List do B. Russella*, [w:] tamże, s. 203–204.

[35] G. Frege, *Nachwort*, [w:] *Grundgesetze der Arithmetik…*, dz. cyt., Bd. 2, s. 549–563.

Liczba określana w odwołaniu do geometrii

W ostatnim, emerytalnym okresie swego życia Frege podjął kolejną, nową i oryginalną próbę ugruntowania arytmetyki liczb naturalnych na podstawie geometrii[36]. Ten projekt nowego rozumienia natury arytmetyki i liczby nie został już jednak dopracowany, niemniej jednak wart jest opisu i usystematyzowania. W literaturze jest raczej pomijany.

Ostatnią próbę określenia liczby najlepiej charakteryzuje następująca wypowiedź Fregego:

> Musiałem porzucić mniemanie, że arytmetyka jest gałęzią logiki i że stosownie do tego wszystko w arytmetyce musi być dowiedzione w sposób czysto logiczny. Po drugie, musiałem porzucić mniemanie, że arytmetyka nie potrzebuje przejmować od intuicji żadnej podstawy uzasadnienia[37].

---

[36] To ujęcie liczby jest przedstawione w czterech dokumentach, z których tylko jeden był przez Fregego przygotowywany do druku: *Tagebucheintragungen über Begriff der Zahl* – NN, *Zahl* (1924) – NN, *Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften* (1924–1925) – NP, *Zahlen und Arithmetik* (1924) – NN, *Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik* (1924/1925). Ta tematyka nie pojawia się w korespondencji Fregego z tego okresu.

[37] G. Frege, *Neuer Versuch der Grundlagen der Arithmetik*..., dz. cyt., s. 298–302. Podaję za: I. Dąmbska, *Idee kantowskie w filozofii matematyki XX wieku*, „Archiwum Historii Filozofii i Myśli Społecznej" 1978, t. 24, s. 196.

Dramatyczność przytoczonego wyznania uwidacznia się w konfrontacji z przekonaniem, jakie filozof i logik z Jeny żywił jeszcze kilka lat wcześniej, w 1919 roku:

> [....] podanie liczby [Zahlangabe – przyp. G.B.] zawiera wypowiedź o pojęciu, zatem w języku logicznie doskonałym zdanie, które podaje liczbę, winno składać się z dwu części: ze znaku pojęcia, o którym liczebność [Zahlaussage – przyp. G.B.] jest orzekana, oraz ze znaku pewnego pojęcia drugiego stopnia[38].

O tym ostatnim stadium badań Fregego pisała Izydora Dąmbska:

> Droga, którą teraz obrał, ma charakter przede wszystkim epistemologiczny i [....] jest ona czymś w rodzaju, za przykładem Kanta przeprowadzonej, „Krytyki matematycznego i logicznego rozumu"[39].

Poniżej zbiorę tezy Fregego z nieopublikowanego za życia Fregego tekstu zatytułowanego *Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik* (1924/1925)[40], gdzie nowe ujęcie liczby jest zaledwie zarysowane.

---

[38] G. Frege, *Aufzeichnungen für Ludwig Darmstaedter* [1919], [w:] *Nachgelassene Schriften*..., dz. cyt., s. 277 (*Szkic dla Darmstaedtera*, [w:] *Pisma semantyczne*..., dz. cyt., s. 139).

[39] I. Dąmbska, *Idee kantowskie*..., dz. cyt., s. 195.

[40] G. Frege, *Neuer Versuch der Grundlegung*..., dz. cyt., s. 298–302.

Prezentację tego stanowiska rozpoczyna Frege od wątku epistemologicznego, pisząc, że źródłem poznania w arytmetyce i geometrii nie jest poznanie zmysłowe, ale pewna forma poznania *a priori*, nazywana przez niego geometrycznym źródłem poznania (*geometrische Erkenntnisquelle*), w której ma też udział logiczne źródło poznania (*logische Erkenntnisquelle*)[41]. Geometryczne źródło poznania jest w najmniejszym stopniu narażone na zanieczyszczenia i za jego pośrednictwem są poznawane aksjomaty (w rozumieniu Euklidesa, a nie Hilberta) geometrii[42]. Jako przykład niemożliwości oparcia się w matematyce na poznaniu zmysłowym podaje niemożliwość zmysłowego poznania tego, że liczb całkowitych jest nieskończona ilość[43].

Wyrażenie zdania jest odróżnione od samej myśli, a myśl może być wyrażona przez różne zdania[44]. Frege wypowiadał się także na temat rozwoju percepcji liczby w rozwoju umysłowym człowieka i pisał o liczbach kształtowanych (przez rodziców i nauczycieli) w umysłach dzieci, nazywając je *Kleinkinder-Zahlen*[45]. Liczba ciągle jest rozumiana jako przedmiot (*Gegenstand*, *Ding*), ale nie natury fizycznej[46]. W tym okresie Frege ciągle wiąże badanie natury liczby z badaniami języko-

41 Tenże, *Erkenntnisquellen der Mathematik*…, dz. cyt., s. 287.
42 Tamże, s. 292; tenże, *Neuer Versuch der Grundlegung*…, dz. cyt., s. 298.
43 Tamże, s. 299.
44 Tenże, *Erkenntnisquellen der Mathematik*…, dz. cyt., s. 288.
45 Tenże, *Zahlen und Arithmetik* (1924), s. 296 n.
46 Tenże, *Tagebucheintragungen über Begriff*…, dz. cyt., s. 282 n.; tenże, *Über Begriff der Zahl*, dz. cyt., s. 282 n.; tenże, *Neuer Versuch der Grundlegung*…, dz. cyt., s. 299; tenże, *Zahl*, s. 284–285.

wymi, w szczególności struktury zdania będącego wypowiedzią o liczbie, a liczbę odróżnia od cyfry (*Zahlzeichen*)[47].

Oto sformułowanie Fregego pokazujące nowy sposób określenia liczby:

> Ta liczba, która w ten sposób określa wielkość pewnego kąta, jest tą liczbą, którą się otrzymało, kiedy łuk [o środku w punkcie K – przyp. G.B.] wycięty przez swoje ramiona mierzy się promieniem z punktu K [dzieli się przez promień z punktu K – przyp. G.B.]. Tu w każdym przypadku jest ustalone, jaką liczbę ma się na uwadze, kiedy dany znak „sinus" jest dopełniony przez pewną liczbę rzeczywistą. Zakłada się jedynie, że wiadomo, w jaki sposób kąt jest powiązany z swoim sinusem[48].

Tak określona liczba łatwo pozwala Fregemu przedstawić poszczególne liczby. Dla przykładu, liczba 1 to przypadek, w którym długość łuku i długość ramienia są sobie równe, a liczba 2, czyli łuk jest dwa razy dłuższy niż promień[49]. Łatwo skonstruować także liczbę 0 (czego Frege już nie zrobił): to przypadek, w którym długość łuku wynosi 0 niezależnie od długości promienia. Gdyby uwzględnić kierunek mierzenia łuku, mamy sposób określenia także liczb ujemnych. W konsekwencji można otrzymać więc wszystkie liczby rzeczywiste!

---

[47] Tenże, *Tagebucheintragungen über Begriff…*, dz. cyt., s. 282–283; tenże, *Über Begriff der Zahl*, dz. cyt., s. 282.

[48] Tenże, *Erkenntnisquellen der Mathematik…*, dz. cyt., s. 291 (tłumaczenie własne).

[49] Tamże.

Gdzie jest potrzebna historia matematyki?

Aby więc zrozumieć niektóre prądy filozofii współczesnej, trzeba sięgnąć do ich matematycznych korzeni, a to już historia matematyki. Omawiane tu zmagania Fregego z precyzyjnym określeniem liczby to przykład pokazujący, że historia matematyki jest potrzebna w profesjonalnym uprawianiu filozofii, i to nie tylko w historii filozofii, ale także w filozofii uprawianej systematycznie. W swym ostatnim okresie twórczości naukowej Frege wypowiedział zdanie, pod którym do dziś wielu się podpisze:

> Filozof, który nie ma nic wspólnego z geometrią, jest tylko do połowy filozofem, a matematyk, który nie ma w sobie żadnej żyłki filozoficznej, jest tylko do połowy matematykiem. Te dwie nauki oddzieliły się od siebie ze szkodą dla obydwu[50].

Powyższy cytat jest zarazem głosem za istotowym powiązaniem filozofii z matematyką, a w konsekwencji historii filozofii z historią matematyki. Wielu matematyków było zarazem wielkimi filozofami, począwszy od starożytnych pitagorejczyków, a skończywszy na XX wieku. Prócz Gottloba Fregego warto wspomnieć takie postaci, jak: Platon, Descartes, Leibniz, Bernard Bolzano, Edmund Husserl, Bertrand Russell. Ponadto od zawsze wielkim tematem filozoficznym była liczba: jej defi-

[50] Tamże, s. 293 (tłumaczenie własne).

nicja, sposób istnienia i poznania, związki z innymi bytami. Historia matematyki dostarcza natomiast bogatej wiedzy na temat pojmowania tych zagadnień przez matematyków (niekoniecznie filozofujących). Co więcej, filozofia i matematyka wielokrotnie wzajemnie się inspirowały, co można przenieść na grunt historii obu dziedzin. Matematyka (w tym jej historia) inspiruje filozofów różnorako, także niefrasobliwym przechodzeniem nad problemami filozoficznymi oraz nieszukaniem odpowiedzi na narzucające się pytania, np. co do sposobu istnienia przedmiotów matematycznych. Nie można przecenić jej roli w badaniu kontekstu odkrycia wielkich tez filozoficznych. Dodam, że filozofia z matematyką ma wspólne dążenie do ścisłości i filozof chętnie sięga do ksiąg matematycznych, by szukać tam i uczyć się sposobów jej wyrażania. Dodatkowo historia matematyki może być interesującym źródłem badania sposobów metaprzedmiotowego określenia jej przedmiotu badania, przyjmowanej metody i podejmowanych zadań. Historia matematyki jest kopalnią wiedzy na powyższe tematy i na temat historii zmagania się wielkich umysłów z tymi zagadnieniami. Wiele problemów z pogranicza historii matematyki i historii filozofii można przedstawić jako pasjonujące i na poły sensacyjne (w pozytywnym tego słowa znaczeniu) opowieści[51].

Filozofia ma nad matematyką (co najmniej) jedną niekwestionowaną przewagę: ugruntowaną refleksję nad sposobami

[51] Zob. J. Derbyshire, *Obsesja liczb pierwszych. Bernhard Riemann i największy nierozwiązany problem w matematyce*, tłum. R. Kirwiel, M. Kulas, Poznań 2009.

uprawiania historii filozofii i związanymi z tym problemami wymagającymi rozstrzygnięcia[52], czego matematyce raczej brakuje. Zastanawiając się nad rolą i koncepcją historii matematyki, a także inspirując się filozofią historii filozofii, można postawić parę pytań. Czy historyk matematyki ma obowiązek (a może prawo?) dokonać doskonalszego zapisu, niż to wynika z tekstu, jakim dysponuje? Wszak wielu słynnych historyków filozofii tak czyni. Czy historykowi matematyki wolno widzieć więcej niż matematykowi, którego dorobek opracowuje? Wiadomo, że niektóre idee są widziane dopiero przez następców. Na przykład Platon byłby zapewne zdziwiony tym, co dziś wyczytujemy z jego pism. Jak pisał Hegel: „Sowa Minerwy wylatuje o zmierzchu". Czy widzi się ciągłość w rozwoju matematyki, a jej dzieje są przedstawiane jako jedna całość, zaś zadaniem historyka jest zobaczyć jedność w jej rozwoju? Czy rozwój matematyki przedstawia się z uwzględnieniem tego, że tworzyli ją ludzie z „krwi i kości", żyjący w konkretnych uwarunkowaniach społecznych?[53] Czy na dzieje matematyki patrzy się z perspektywy swej własnej matematyki (w filozofii taka postawa jest nieuchronna)? Historia matematyki traktuje bardziej o problemach matematycznych czy też o osobach ją uprawiających? Czy historia matematyki pełni funkcję służebną w stosunku do

[52] Zob. M. Tyl, *Filozofia – historia – historia filozofii. Filozoficzne konteksty polskiej historiografii filozofii XX wieku*, Katowice 2012.

[53] Jako przykład takiego uprawiania historii filozofii podaję książkę R. Monka, *Ludwig Wittgenstein. Powinność geniusza*, Warszawa 2003.

matematyki? Czy pozycje z historii matematyki są spajane jedną ideą przewodnią? Czy zadaniem historii matematyki jest widzieć pewne prawa rozwoju? Mogłyby nam one odpowiedzieć na pytanie, jak uprawiać matematykę. Czy uprawianie historii matematyki jest receptą na kryzys w matematyce? W filozofii tak nieraz było. Czy można powiedzieć, że historia matematyki nie może być biernym rejestrowaniem przeszłości; wpierw powinna ustalić prawdę historyczną, a potem ją skorygować i nadać jej postać idealną? Czy historia matematyki to hermetyczny dyskurs karmiący się swą własną tradycją? Czy badając zagadnienia z zakresu historii matematyki, odkrywa się tematy nowe, wymagające opracowania matematycznego? Jako filozof, nie matematyk, zbyt słabo znam historię matematyki, by ustosunkować się do wyżej wymienionych zagadnień. Na koniec przywołam wypowiedź Stanisława Leśniewskiego z 1927 roku, napisaną po zapoznaniu się z pewną cytowaną już przeze mnie książką:

> Najbardziej imponującym wcieleniem zdobyczy, osiągniętych w dziejach uzasadniania matematyki w zakresie solidności metody dedukcyjnej, oraz najcenniejszym od czasów greckich źródłem tych zdobyczy są dla mnie dotąd Grundgesetze der Arithmetik Gottloba Fregego[54].

[54] S. Leśniewski, *O podstawach arytmetyki*, „Przegląd Filozoficzny” 1927, nr 30, s. 166.

Ta wypowiedź Leśniewskiego pokazuje jeszcze jeden doniosły cel poznawania historii uprawianej dziedziny: jej znajomość pozwala wartościować nowe prace.

Zakończenie

Frege za upokarzający uważał brak jasności co do podstawowego przedmiotu zainteresowań matematyki. To pilne zadanie traktował jako wspólne dla filozofów i matematyków. Opracowując swoje koncepcje liczby, jednocześnie krytycznie badał rozwiązania przyjmowane przez innych filozofów i matematyków. O wynikach swoich badań powiadamiał jemu współczesnych filozofów i matematyków, prowadził z nimi także dyskusje nad przyjętymi rozwiązaniami. Wydaje się, że wszystko w dorobku naukowym Fregego było podporządkowane poszukiwaniu lepszego ugruntowania matematyki, w tym określeniu, czym jest liczba. Na użytek tego zadania zostały m.in. sformułowane warunki poprawności definicji.

Chociaż Frege nie zmieniał swych poglądów radykalnie, to jednak w ciągu długiej aktywności naukowej ciągle szukał większej precyzji i ścisłości, przechodził z języka formalnego do języka potocznego (i odwrotnie), dokonywał autokrytyki, uwzględniał wyniki dyskusji z innymi uczonymi, rozbudowywał wczesne rozwiązania. Warto więc pokazać ten trudny proces szukania i tworzenia pewnych rozstrzygnięć bądź lepszych sformułowań, napotykania trudności, rozbudowywania swojego warsztatu pracy.

Bibliografia

Cytowane teksty Fregego

Anwendungen der Begriffsschrift, „Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft" 1879, Bd. 13, s. 29–33, [w:] *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Zürich–New York 1998.

Aufzeichnungen für Ludwig Darmstaedter [1919], [w:] *Nachgelassene Schriften*, Hamburg 1983, s. 277 (*Szkic dla Darmstaedtera*, [w:] *Pisma semantyczne*, tłum. B. Wolniewicz, Warszawa 1997).

Begriffsschrift und andere Aufsätze, Zürich–New York 1998. Wydanie polskie: *Ideografia. Język formalny czystego myślenia wzorowany na języku arytmetyki* (*Przedmowa*, §§ 1–13), [w:] F. Brentano, G. Frege, Ch. Thiel, *Próby gramatyki filozoficznej. Antologia*, tłum. i oprac. K. Rotter, Wrocław 1997).

Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften (1924–1925), [w:] *Nachgelassene Schriften*, Hamburg 1983.

Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. Band 1 und 2. In moderne Formelnotation transkribiert und mit einem ausführlichen Sachregister versehen von Thomas Müller, Bernhard Schröder und Rainer Stuhlmann-Laeisz, Paderborn 2009.

Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Hamburg 1986.

Fragmenty z „Grundlagen der Arithmetik" (1884) (fragm. *Wprowadzenia* i §§ 3, 53, 55–57, 60, 62, 106), [w:] G. Frege, *Pisma semantyczne*, tłum. B. Wolniewicz, Warszawa 1977.

O pojęciu liczby (fragm. *Wprowadzenia*, §§ 55–91, 106–109), [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, oprac. R. Murawski, Poznań 1986.

Podstawy arytmetyki. Logiczno-matematyczne badania nad pojęciem liczby (*Wprowadzenie*, §§ 1–28), [w:] F. Brentano, G. Frege, Ch. Thiel, *Próby gramatyki filozoficznej. Antologia*, tłum. i oprac. K. Rotter, Wrocław 1997.

Funktion und Begriff, Jena 1891, [w:] *Kleine Schriften*, Darmstadt 1967. Wydanie polskie: *Funkcja i pojęcie*, [w:] *Pisma semantyczne*, tłum. B. Wolniewicz, Warszawa 1977.

List do B. Russella, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, oprac. R. Murawski, Poznań 1986.

Nachwort, [w:] *Grundgesetze der Arithmetik*, 1993.

Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik (1924/1925), [w:] *Nachgelassene Schriften*. *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen. Dissertation zur Erlangung der Venia Docendi bei der Philosophischen Fakultät in Jena*, Jena 1874, [w:] *Kleine Schriften*, Darmstadt 1967.

[rec.] Seeger H, *Die Elemente der Arithmetik, für den Schulunterricht bearbeitet*, „Jenaer Literaturzeitung" 1874, Bd. 1, s. 722, [w:] *Kleine Schriften*, Darmstadt 1967.

Tagebucheintragungen über Begriff der Zahl, [w:] *Nachgelassene Schriften*, Hamburg 1983.

Über Begriff der Zahl (1891–1892), [w:] *Nachgelassene Schriften*, Hamburg 1983.

Über der Zahlen des Herrn H. Schubert, Jena 1899, [w:] *Kleine Schriften*, Darmstadt 1967.

Zahl (1924), [w:] *Nachgelassene Schriften*, Hamburg 1983.

Zahlen und Arithmetik (1924), [w:] *Nachgelassene Schriften*, Hamburg 1983.

Wydania zbiorowe

Brentano F., Frege G., Thiel Ch., *Próby gramatyki filozoficznej. Antologia*, tłum. i oprac. K. Rotter, Wrocław 1997.

Conceptual Notation and Related Articles, tłum. i oprac. T.W. Bynum, Oxford 1972.

Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych, oprac. R. Murawski, Poznań 1986.

Kleine Schriften, Darmstadt 1967.

Nachgelassene Schriften, Hamburg 1983.

Pisma semantyczne, tłum. B. Wolniewicz, Warszawa 1977.

Pozostałe cytowane pozycje

Besler G., *Gottloba Fregego koncepcja analizy filozoficznej*, Katowice 2010.

Bynum T.W., *On the Life and Work of Gottlob Frege*, [w:] *Conceptual Notation and Related Articles*, tłum. i oprac. T.W. Bynum, Oxford 1972.

Dąmbska I., *Idee kantowskie w filozofii matematyki XX wieku*, „Archiwum Historii Filozofii i Myśli Społecznej" 1978, t. 24, s. 167–213.

Derbyshire J., *Obsesja liczb pierwszych. Bernhard Riemann i największy nierozwiązany problem w matematyce*, tłum. R. Kirwiel, M. Kulas, Poznań 2009.

Dummett M., *Frege: Philosophy of Mathematics*, London 1991.

Leśniewski S., *O podstawach arytmetyki*, „Przegląd Filozoficzny" 1927, nr 30, s. 164–206.

Monk R., *Ludwig Wittgenstein. Powinność geniusza*, Warszawa 2003.

Russell B., *List do G. Fregego*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, oprac. R. Murawski, Poznań 1986.

Tyl M., *Filozofia – historia – historia filozofii. Filozoficzne konteksty polskiej historiografii filozofii XX wieku*, Katowice 2012.

Elementy logiki w polskiej szkole matematycznej
Wkład Stanisława Leśniewskiego

Lidia Obojska
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach
Wydział Nauk Ścisłych

Elements of Logic in the Polish School of Mathematics
The contribution of Stanisław Leśniewski

Abstract

In the presented paper we would like to focus on the scientific activity of the one of the members of the Warsaw School of Logic. It is supposed that the world famous formalisms of Polish logicians were mainly stimulated by Stanisław Leśniewski. If this is true, Leśniewski can be considered as the main ideologist of Warsaw School.

The first part of this paper is dedicated to a very brief presentation of the history of Polish logic in the period 1910-1939. Next, we present the main ideas of the Warsaw School of Logic and in particular the contribution of Stanisław Leśniewski: his original system of three theories: protothetics, ontology and mereology and their novelty in comparison with classical thought. Finally, we try to show the influence of Leśniewski's innovative ideas on other members of the school.

Keywords:
symbolic language, functors, antinomy, Leśniewski's systems

Jest wiele powodów, dla których warto zapoznać się z postacią Stanisława Leśniewskiego. Po pierwsze, ze względu na znaczenie jego systemów: prototetyki, ontologii i mereologii. Po drugie, z uwagi na wpływ jego idei na innych członków warszawskiej szkoły logicznej, np. na Jana Łukasiewicza czy Alfreda Tarskiego. Po trzecie, z powodu jego niekonwencjonalnego i precyzyjnego sposobu zapisu i interpretacji symboli. Oraz ostatecznie, a może przede wszystkim, ze względu na geniusz być może „głównego »ideologa« naukowego szkoły warszawskiej":

> Cokolwiek mówić będą znawcy o jego dziełach, oceniając je porównawczo i wedle sprawdzianów rozwijającej się potężnie nauki, dla mnie jedno pozostanie prawdą niesporną. Na podstawie długiego doświadczenia twierdzę, że był to człowiek genialny, jedyny człowiek genialny, z którym los pozwolił mi się zetknąć w obcowaniu ongi niemal codziennym[1].

[1] T. Kotarbiński, *Garstka wspomnień o Stanisławie Leśniewskim*, [w:] tegoż, *Szkice z historii filozofii i logiki*, Warszawa 1979, s. 307.

> [...] można przypuszczać, że sławne na cały świat formalizmy logików ze szkoły warszawskiej były stymulowane głównie przez Leśniewskiego. Jeżeli to przypuszczenie jest trafne, to Leśniewski może być uznany za głównego „ideologa" naukowego szkoły warszawskiej[2].

Dlatego w niniejszym artykule w części pierwszej nakreślimy bardzo krótki zarys historii logiki w Polsce w okresie międzywojennym. Następnie ukażemy główne idee warszawskiej szkoły logicznej. Część trzecia zostanie poświęcona wkładowi Stanisława Leśniewskiego w dziedzinę logiki, a część ostatnia – wpływowi idei Leśniewskiego na innych przedstawicieli szkoły.

1. Zarys historii logiki w Polsce na przełomie XIX i XX wieku

Tadeusz Kotarbiński w odczycie wygłoszonym w Rzymie w 1959 roku[3] mówi, że „Historia pism traktujących o logice liczy w Polsce nie mniej i nie więcej niż 460 lat". Można by zacząć od komentarza *Organonu* Jana z Głoskowa z 1499 roku, po podręcznik logiki Mikołaja z Wrocławia, *Dialectica Ciceronis* (1604) Adama Bursjusza, *Logica selectis disputationibus*

[2] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, Warszawa 1985, s. 152–153.

[3] T. Kotarbiński, *Logika w Polsce, jej oryginalność i obce wpływy*, [w:] tegoż, *Szkice*..., dz. cyt., s. 229.

et quaestionibus illustrata en in duos distributa (1618) Marcina Śmigleckiego, *Logikę, czyli pierwsze zasady sztuki myślenia* (1802) Étienne'a de Condillaca czy przekłady i spolszczenia *Logiki* (1878) Alexandra Baina i *Systemu logiki* (1879) Johna Stuarta Milla[4].

Termin „algebra logiki" pojawił się w Polsce po raz pierwszy pod koniec XIX wieku w pracy Stanisława Piątkiewicza *Algebra w logice* (1884) oraz w dziele Samuela Dicksteina *Pojęcia i metody matematyki* (1871). Z kolei pierwszy wykład poświęcony algebrze logiki wygłosił Kazimierz Twardowski w 1898/1899 roku we Lwowie. Twardowski, będąc uczniem Franza Brentana, odwoływał się przede wszystkim do idei logicznych swojego nauczyciela, ale nie brakowało w jego wykładach także nowych elementów, np. algebry Boole'a. Prawdopodobnie to właśnie w tych wykładach uczestniczył Jan Łukasiewicz, późniejszy założyciel (obok Leśniewskiego) warszawskiej szkoły logicznej[5].

Zanim powstała warszawska szkoła logiczna, w Krakowie istniał ośrodek logiki matematycznej[6]. Był on związany z postacią Stanisława Zaremby – matematyka, dla którego logika

---

[4] Tamże, s. 229–239. Ogólny zarys historii logiki można znaleźć także w monografii E. Żarneckiej-Biały, *Historia logiki dawniejszej*, Kraków 1995.

[5] J. Woleński, *Geneza warszawskiej szkoły logicznej*, [w:] *Matematyka przełomu XIX i XX wieku: nurt mnogościowy*, red. J. Mioduszewski, Katowice 1992, s. 26–34.

[6] J. Woleński, *Towarzystwo Naukowe Warszawskie i rozwój logiki w Polsce*, http://www.tnw.waw.pl/hist_ja_wol.html (15.08.2012).

była zawsze podporządkowana matematyce. Bezpośrednio logiką zajmował się Jan Śleszyński. W 1919 roku objął on katedrę logiki na Uniwersytecie Jagiellońskim[7], a w 1925 wydał dwa tomy *Teorii dowodu*, które były „znakomitym przedstawieniem historii logiki i nowoczesnym wykładem samej dyscypliny"[8]. Logikę uprawiał także Leon Chwistek, który pracował nad teorią typów logicznych Whiteheada i Russella i „który w ten sposób utorował drogę kolejnym udoskonaleniom wprowadzonym przez Ramseya"[9]. Ciekawy jest fakt, że prace Chwistka sprzed I wojny światowej były na o wiele wyższym poziomie niż prace Łukasiewicza. Artykuł *Zasada sprzeczności w świetle najnowszych badań Bertranda Russella* (1912) w porównaniu z pracą Łukasiewicza *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa* (1910) był nowocześniejszy pod względem logiki; Łukasiewicz powoływał się na Louisa Couturata, a Chwistek – na Russella[10]. Podobnie wykład Śleszyńskiego wygłoszony w 1918 roku dotyczący mereologii Leśniewskiego[11] zawierał już kompletną formalizację teorii opartą na ideach Giuseppe Peano[12]. Niestety wraz z odejściem

---

[7] Trzeba zaznaczyć, że była to pierwsza taka katedra na świecie.

[8] Tamże, s. 2.

[9] J.M. Bocheński, *Formale Logik*, Freiburg–München 1956, s. 462, [w:] T. Kotarbiński, *Szkice…*, dz. cyt., s. 253.

[10] J. Woleński, *Geneza warszawskiej szkoły logicznej*, dz. cyt., s. 28.

[11] Chodzi o pierwsze przedstawienie mereologii Leśniewskiego, czyli o idee z 1916 roku wyłożone w pracy *O ogólnej teorii mnogości*, „Filozofia Nauki" [dalej: FN] 1999, nr 3–4, s. 173–208.

[12] J. Woleński, *Towarzystwo Naukowe Warszawskie…*, dz. cyt., przypis 4.

Śleszyńskiego na emeryturę (1924) zlikwidowano katedrę logiki, a sam Chwistek odszedł do Lwowa. Prace z zakresu logiki kontynuowali nadal Jan Herzberg, Władysław Hetper oraz Jan Skarżeński, ale już we Lwowie.

Początek szkoły lwowsko-warszawskiej jest utożsamiany z faktem objęcia profesury na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie przez Kazimierza Twardowskiego (1895). Ideą Twardowskiego było odrodzenie życia filozoficznego w kraju, dlatego po przyjeździe do Lwowa założył Polskie Towarzystwo Filozoficzne (1904) oraz przyczynił się do wydania czasopism „Przegląd Filozoficzny" (1904) i „Ruch Filozoficzny" (1911). Zainicjował ponadto zjazdy filozoficzne. Jego ogromnym pragnieniem było stworzenie prawdziwie naukowej szkoły filozoficznej. W 1902 roku doktoryzował się u niego Jan Łukasiewicz, a rok wcześniej Władysław Witwicki. Do tego grona należeli jeszcze Kazimierz Ajdukiewicz, Tadeusz Czeżowski, Tadeusz Kotarbiński oraz Zygmunt Zawirski. W 1910 roku dołączył z Monachium Stanisław Leśniewski, który przyjechał do Lwowa na doktorat, oraz z Berlina Władysław Tatarkiewicz. Była to grupa filozofów, która odegrała szczególną rolę nie tylko w polskiej filozofii, ale przede wszystkim w logice[13]. Rysem charakterystycznym tej szkoły było przekonanie Twardowskiego, że elementem prawdziwie naukowej filozofii jest kultura logiczna. Ciekawe, że sam Twardowski nie był pasjonatem lo-

[13] J. Skoczyński, J. Woleński, *Historia filozofii polskiej*, Kraków 2010, s. 399.

giki matematycznej, niemniej jednak był na bieżąco w kwestii jej rozwoju i podczas swoich wykładów informował o jej nowościach.

Logiką w Polsce zajmowali się filozofowie, a nie matematycy, jak to było w innych ośrodkach na świecie, co oczywiście miało wpływ na pierwszą tematykę podejmowanych prac[14]. W 1910 roku ukazała się praca Łukasiewicza dotycząca zasady sprzeczności u Arystotelesa[15], będąca prodromem wielu osiągnięć na polu logiki (badań dotyczących logiki dwuwartościowej, ich aksjomatyzacji, logik wielowartościowych, problemów związanych z poprawnością definiowania, systemów Leśniewskiego)[16] oraz początkiem rozwoju zainteresowań logicznych w grupie lwowskiej, które ostatecznie nadały formę szkole warszawskiej. Jeszcze przed I wojną światową dołączył do tego grona Zygmunt Janiszewski, który wcześniej działał w Warszawie, organizując różne kursy naukowe. W kursach tych uczestniczyli również Kotarbiński i Leśniewski. To ta pierwsza grupa uczonych[17] zaczęła tworzyć tzw. lwowsko-warszawską szkołę filozoficzną; lwowsko-warszawską, gdyż w jej istnieniu można wyróżnić dwa okresy: okres lwowski – do 1918 roku, oraz okres warszawski związany z reaktywacją Uniwersytetu

---

[14] J. Woleński, *Geneza warszawskiej szkoły logicznej*, dz. cyt., s. 27.

[15] J. Łukasiewicz, *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa. Studium krytyczne*, Kraków 1910.

[16] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 78.

[17] Trzeba też wspomnieć o Wacławie Sierpińskim i innych matematykach skupionych we Lwowie.

Warszawskiego i odzyskaniem niepodległości. W taki sposób nawiązała się współpraca między Lwowem a Warszawą, między logikami i filozofami[18].

2. Warszawska szkoła logiczna

W 1915 roku został reaktywowany Uniwersytet Warszawski. Na stanowiska profesorów powołano filozofów: Jana Łukasiewicza oraz Władysława Tatarkiewicza, a potem Tadeusza Kotarbińskiego i Stanisława Leśniewskiego. Pierwszy objął katedrę filozofii, a drugi filozofii matematyki (obaj na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym)[19]. Zaczęło wzrastać zainteresowanie logiką, na co niewątpliwie miał wpływ Zygmunt Janiszewski.

W 1918 roku Zygmunt Janiszewski napisał artykuł do „Nauki Polskiej", w którym zamieścił manifest programowy odrodzenia polskiej matematyki. W tym samym czasopiśmie ukazały się artykuły Twardowskiego i Kotarbińskiego dotyczące potrzeb filozofii polskiej[20]. Janiszewski zaproponował, by jeden z ośrodków akademickich stał się jego centrum (chodziło tu o Uniwersytet Warszawski, chociaż drugim takim ośrodkiem był Lwów)

[18] Pomimo szerokich zainteresowań logiką we Lwowie Woleński uważa jednak, że nie można mówić o tamtejszej szkole logicznej w okresie przed I wojną światową.
[19] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 19.
[20] J. Skoczyński, J. Woleński, *Historia filozofii polskiej*, dz. cyt., s. 402.

oraz aby skupić badania polskich matematyków na aktualnych problemach z tej dziedziny, tzn. na teorii mnogości, topologii i jej zastosowaniach, a ponadto aby powstało czasopismo matematyczne o charakterze międzynarodowym[21]. Również sam Janiszewski zajmował się logiką. W 1915 roku napisał rozdział poświęcony logice i filozofii matematyki dla *Poradnika dla samouków*. Jak podaje Jan Woleński[22], nie wiadomo skąd wzięły się te zamiłowania do logiki u Janiszewskiego, gdyż nie mogły one pochodzić ani z okresu studiów za granicą, ani od Łukasiewicza, ale na pewno przygotowały żyzny grunt dla badań nad logiką. Dzięki temu w sposób naturalny logika zajęła swoje miejsce obok matematyki jako jej autonomiczna część[23].

Warszawska szkoła matematyczna powstała jako wspólne dzieło filozofów i matematyków (J. Łukasiewicz, S. Leśniewski, W. Sierpiński, S. Mazurkiewicz, Z. Janiszewski). Fakt ten podkreśliła rada programowa nowo powołanego czasopisma „Fundamenta Mathematicae" składająca się z matematyków i logików. W dość krótkim czasie Warszawa stała się prężnym ośrodkiem badań w zakresie nie tylko matematyki, ale przede wszystkim logiki. Dlatego zaczęto mówić o warszawskiej szkole logicznej. W 1919 roku do grona profesorów dołączył Stanisław Leśniewski. Z czasem poszerza się ono o Alfreda Tarskiego, Stanisława Jaśkowskiego, Adolfa Lindenbauma, Mosesa Pres-

[21] J. Woleński, *Towarzystwo Naukowe Warszawskie…*, dz. cyt., s. 4.
[22] J. Woleński, *Geneza warszawskiej szkoły logicznej*, dz. cyt., s. 30–31.
[23] Zob. tamże, s. 30.

burgera, Jerzego Słupeckiego, Bolesława Sobocińskiego i Mordechaja Wajsberga. Druga grupa członków szkoły warszawskiej skupiła się wokół osoby Kotarbińskiego, nie będziemy jednak wchodzić w jej szczegóły. Wydała ona równie wielkich uczonych w różnych dziedzinach, począwszy od filozofii, po językoznawstwo, metodologię nauk, semantykę, filologię, historię sztuki, psychologię, pedagogikę, o czym pisze Woleński w swojej monografii[24].

Warszawska szkoła pod kierunkiem Łukasiewicza i Leśniewskiego zajmowała się przede wszystkim logiką matematyczną, tzn. logiką formalną, semantyką i metodologią nauk, stąd w krótkim czasie wyodrębniła się ona jako warszawska szkoła logiczna. Ośrodek we Lwowie skupił się głównie na matematyce, choć nie brakowało tutaj elementów logiki (w 1930 roku Chwistek został profesorem logiki matematycznej). W 1936 roku powstał także ośrodek w Krakowie (już inny od tego poprzedniego) z Józefem Marią Bocheńskim, ks. Janem Salamuchą, Janem Franciszkiem Drewnowskim i Bolesławem Sobocińskim, koncentrując się na badaniach nad zastosowaniami logiki do scholastyki[25].

Cechą charakterystyczną warszawskiej szkoły logicznej było traktowanie logiki jako autonomicznej dyscypliny naukowej oraz pluralizm filozoficzny. Twardowski dbał, by jego uczniowie znali świetnie filozofię, historię oraz mieli dobre

---

[24] Tamże.

[25] J. Skoczyński, J. Woleński, *Historia filozofii polskiej*, dz. cyt., s. 404.

przygotowanie w jednej z dziedzin szczegółowych (najlepiej matematyczno-przyrodniczej[26]), natomiast poglądy filozoficzne były prywatną sprawą każdego, np. Łukasiewicz wielokrotnie zmieniał swoje stanowisko – od nominalizmu po neoplatonizm[27], Tarski zaś nazywał siebie radykalnym antyplatonistą[28]. Jeśli chodzi natomiast o ogólną postawę filozoficzną Twardowskiego dotyczącą metodologii oraz krytyki psychologizmu, to była ona podzielana przez większość członków szkoły warszawskiej[29].

Fenomenem szkoły warszawskiej było powołanie na profesorów matematyki dwóch filozofów. Jak przypuszcza Woleński, właśnie to sprzyjające środowisko dla logiki sprawiło, że powstała warszawska szkoła logiczna, co nie nastąpiło w innych ośrodkach badawczych, np. w Krakowie, gdzie logika była tylko narzędziem w rękach matematyków, przez których była uprawiana[30].

Ten niesamowity rozwój logiki sprawił, że w latach trzydziestych Warszawa stała się światowej rangi ośrodkiem badań nad logiką[31]. Niestety wojna przerwała ten rozwój. Rok 1939

[26] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 33.

[27] Tamże, s. 183.

[28] A.B. Feferman, S. Feferman, *Alfred Tarski.* Życie i logika, Warszawa 2009, s. 75.

[29] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 25.

[30] J. Woleński, *Geneza warszawskiej szkoły logicznej*, dz. cyt., s. 33.

[31] Tamże.

uważa się za koniec szkoły lwowsko-warszawskiej. Nie odrodziła się ona po wojnie, choć ci, którzy przeżyli, nadal kontynuowali jej badania. Woleński przypuszcza, że szkoła kalifornijska z Tarskim na czele powstała w Berkeley była chyba najznaczniejszym ośrodkiem utworzonym po II wojnie światowej oraz że to właśnie ona miała typowe cechy warszawskiej szkoły logicznej[32].

3. Stanisław Leśniewski i elementy logiki[33]

Krytyka *Principia Mathematica*

Stanisław Leśniewski zetknął się z logiką symboliczną w dodatku logicznym dołączonym do artykułu Łukasiewicza *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*. Tak wspomina to wydarzenie:

> W roku 1911 (za moich lat studenckich) wpadła mi w ręce książka p. Jana Łukasiewicza o zasadzie sprzeczności u Arystotelesa. Z książki tej, która wywarła w swoim czasie znaczny wpływ na

[32] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 29.

[33] Nie będziemy wymieniać wszystkich osiągnięć szkoły warszawskiej, zaczynając od Łukasiewicza i jego logik dwuwartościowych, ich pełnej formalizacji, logik wielowartościowych, metalogiki Tarskiego, teorii systemów dedukcyjnych i teorii prawdy, ale skoncentrujemy się tylko na osobie Stanisława Leśniewskiego i jego wkładzie w badania nad logiką.

> rozwój intelektualny szeregu polskich „filozofów" i „filozofujących" uczonych mojego pokolenia, a dla mnie osobiście stanowiła rewelację pod niejednym względem, dowiedziałem się po raz pierwszy o istnieniu na świecie „logiki symbolicznej" p. Bertranda Russella oraz jego „antynomii", dotyczącej „klasy klas nie będących własnymi elementami"[34].

Dzięki analizie tego dzieła odkrywa nieścisłości w symbolice użytej przez Alfreda N. Whiteheada i Russella oraz postanawia skorygować ich teorię typów. Czytając *Principia…*, tak je komentuje:

> Z charakteru wątpliwości semantycznej natury, jakie opanowywały mnie przy bezskutecznych przez czas dłuższy próbach czytania prac pisanych przez „logistyków", może sobie każdy z łatwością zdać sprawę, jeżeli np. zanalizuje uważnie komentarze, w które pp. Whitehead i Russell zaopatrują poszczególne typy wyrażeń występujących w „teorii dedukcji", i rozważy przy tej sposobności, ile w rzeczonych komentarzach tkwi wyrafinowanego okrucieństwa względem czytelnika przyzwyczajonego do jakiej takiej wagi do tego, co czyta[35].

I tak na przykład dla zdania typu „$\vdash$:$q.\supset.pVr$" Leśniewski podaje 17 interpretacji, analizując kolejno znaczenie znaku

[34] S. Leśniewski, *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny" [dalej: PF] 1927, R. XXX, z. 2–3, s. 169.
[35] Tamże, s. 170.

asercji „⊢" oraz znaku negacji[36]. Ta krytyka dzieła logików angielskich oraz jego własne przemyślenia doprowadziły go do rozróżnienia pomiędzy językiem a metajęzykiem. Wprawdzie komentarze te spisał dopiero w 1927 roku, ale sprawiły one, że z początkowej krytyki i niechęci do języka symbolicznego logiki[37] u Leśniewskiego rodzi się idea, by stworzyć swój własny, precyzyjny język symboliki i zastosować go do systemów dedukcyjnych. Chodzi przede wszystkim o mereologię (ogólną teorię zbiorów) – teorię, która powstała jako pierwsza, choć jest nadbudowana nad prototetyką (rachunkiem zdań) i ontologią (rachunkiem nazw):

> Pod wpływem rozmów, które prowadziłem w Warszawie w r. 1920 z p. dr. Leonem Chwistkiem, dzisiaj profesorem logiki w uniwersytecie lwowskim, zdecydowałem się na wprowadzenie do swojej praktyki naukowej jakiegoś języka „symbolicznego", opartego o wzory stworzone przez „logików matematycznych", zamiast języka potocznego, jakim się do owego czasu z upartą premedytacją posługiwałem, starając się, jak i tylu innych, o ujarzmienie tego języka potocznego pod względem „logicznym" i nagięcie go do teoretycznych celów, do których nie został stworzony[38].

---

[36] J. Woleński, *Szkoła lwowsko-warszawska w polemikach*, Warszawa 1997, s. 65–67.
[37] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 134–136.
[38] S. Leśniewski, *O podstawach matematyki*, PF 1931, R. XXXIV, z. 2–3, s. 154–155, [w:] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 137.

Krytyka *Principia Mathematica* doprowadziła także Leśniewskiego do stworzenia swojej teorii typów. Jak podaje Woleński[39], źródłem była dla niego teoria kategorii Arystotelesa oraz teoria kategorii znaczeniowych Husserla. W 1922 roku sformułował teorię typów semantycznych, czyli wyrażeń, w której każde wyrażenie, a więc skończony ciąg napisów, należy tylko do jednej kategorii, tzn. albo do zdań, albo do nazw, albo do funktorów[40]. Formalne przedstawienie teorii wprowadził jednak dopiero Ajdukiewicz w 1935 roku.

Leśniewski, jako nominalista, brał pod uwagę tylko konkretne skończone ciągi napisów (tzn. jest tylko tyle wyrażeń, ile zostało zapisanych[41]), dlatego jego język został nazwany „konstruktywnym językiem nominalizmu". Posługiwano się nim długo w szkole warszawskiej, choć rodziły się wątpliwości, czy jest on najbardziej odpowiedni w momencie odkrycia logik wielowartościowych (Łukasiewicz) oraz badań nad metajęzykiem (Tarski)[42].

Łukasiewicz, zajmując się aksjomatyką rachunku zdań, dostrzegł w *Principia Mathematica* dwie tezy równoważnoś-

---

[39] J. Woleński, *Stanisław Leśniewski i jego rola w historii logiki*, Warszawa 1987, s. 220.

[40] Jak podaje Woleński, termin 'funktor' został wprowadzony przez Kotarbińskiego.

[41] R. Murawski, *Filozofia matematyki i logiki w Polsce międzywojennej*, Toruń 2011, s. 99.

[42] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 141.

ciowe[43], ale jak twierdzi Woleński[44], to Leśniewski jako pierwszy przedstawił aksjomatykę dla równoważnościowego rachunku zdań (1929)[45] oraz podał dla niego proste kryterium syntaktyczne, według którego „*x* jest tezą tego rachunku, jeśli zawiera nieparzystą liczbę wystąpień funktora *E*[46] oraz parzystą liczbę wystąpień każdej zmiennej".

Powracając jeszcze do artykułu Łukasiewicza z 1910 roku, w części historycznej autor wykazał, że nawet sam Arystoteles miał wątpliwości co do swojej zasady sprzeczności, którą usiłował poprzeć dowodami, a z drugiej strony uznawał ją za niedowodliwą. Nie umknęło to oczywiście krytyce Łukasiewicza[47], który wykazał, że w Arystotelesowej dwuwartościowej logice są pewne luki, a następnie sam je wykorzystał, wprowadzając trzecią wartość. Leśniewski natomiast bronił dwuwartościowości logiki Arystotelesa, choć był okres, że także i on zajmował się logikami wielowartościowymi[48], kwestionując jednak zasadę wyłączonego środka. W artykule *Krytyka logicznej zasady wy-*

[43] W notacji beznawiasowej Łukasiewicza jeśli za *E* przyjmiemy funktor równoważności, tezy te przyjmą następującą formę: *Epp* oraz *EEpqEqp*, tzn. $p \leftrightarrow p$ oraz $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$.

[44] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 102, przypis 34.

[45] *EEEprEqpErq*, *EEpEqrEEpqr* – S. Leśniewski, *Grundzüge eines neuen System der Grundlagen der Mathematik*, § 1–11, „Fundamenta Mathematicae" [dalej: FM] 1929, R. XIV, [w:] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 102.

[46] Funktor *E* to funktor równoważności.

[47] T. Kotarbiński, *Szkice*…, dz. cyt., s. 220.

[48] R. Murawski, *Filozofia matematyki i logiki*…, dz. cyt., s. 105.

łączonego środka (1913)[49] zdecydowanie odrzucił istnienie uniwersaliów i przedmiotów idealnych, zamieszczając dowód ich nieistnienia, a w pracy z 1927 roku[50] powrócił do tego dowodu, omijając jednak pojęcie cechy i ostatecznie negując istnienie zarówno cech, jak i relacji[51].

Ważnym tematem poruszanym przez Leśniewskiego, nie tylko w związku z logikami wielowartościowymi Łukasiewicza, był problem funkcji intencjonalnych. Leśniewski dążył do tego, by wyeliminować wszelkie wyrażenia i funktory intencjonalne z języka i je „uekstensjonalnić". Stąd ontologia Leśniewskiego jest teorią całkowicie ekstensjonalną. Wiadomo, że istniała pewna teoria „dezintencjonalizacji", o której wspomina Sobociński w swojej korespondencji z Bocheńskim (list z roku 1956), oraz konkretne metody eliminacji, jednak nieznane są szczegóły, w jaki sposób to się dokonywało[52].

Jest jeszcze jedna praca z tego okresu, uważana chyba za najważniejszą, a dotycząca prawdy[53], w której Leśniewski dokonał analizy zdań temporalnych. To tutaj na skutek dyskusji z Kotarbińskim na temat determinizmu Leśniewski poddał pod dyskusję zasadę wyłączonego środka, sugerując trzecie rozwią-

---

49 S. Leśniewski, *Krytyka logicznej zasady wyłączonego środka*, PF 1913, R. XVI, s. 315–352.

50 S. Leśniewski, *O podstawach matematyki*, dz. cyt., s. 183.

51 R. Murawski, *Filozofia matematyki i logiki…*, dz. cyt., s. 104.

52 J. Woleński, *Szkoła lwowsko-warszawska w polemikach*, dz. cyt., s. 70–72.

53 S. Leśniewski, *Czy prawda jest tylko wieczna czy też wieczna i odwieczna*, „Nowe Tory" 1913, nr 18, s. 493–528.

zanie. I to właśnie ta lektura stała się źródłem inspiracji dla Łukasiewicza dla logik wielowartościowych[54].

W 1915 roku Leśniewski wyjechał do Moskwy i kontynuował badania nad antynomią Russella. W 1916 ukazała się pierwsza praca dotycząca ogólnej teorii mnogości. Był to początek trójsystemu Leśniewskiego i mówi się, że to okres (1911–1916) jego prac „przedlogistycznych"[55]. W 1919 roku Leśniewski zmienił kierunek swoich badań, tak pisząc do Twardowskiego: „Uwierzyłem, że należy zmienić kierunek podróży i jechać ze stacji ontologa przez teorię mnogości do stacji logika, nie zaś *via versa*, jak przypuszczałem dotąd"[56]. I tak zaczyna systematyczne prace nad swoją teorią.

Systemy Leśniewskiego

Leśniewski stworzył trzy systemy: prototetykę, ontologię oraz mereologię. Dwa pierwsze to teorie logiczne, mereologia natomiast to ogólna teoria zbiorów. Leśniewski skonstruował swoje systemy bardzo starannie, dopuszczając tworzenie wciąż nowych obiektów oraz definiując wszystko z taką precyzją, że zyskał opinię „pierwszego logika, który w całkowicie poprawny sposób sformułował reguły definiowania w systemach dedukcyjnych"[57].

[54] J. Woleński, *Stanisław Leśniewski i jego rola w historii logiki*, dz. cyt., s. 215.
[55] R. Jadczak, *Mistrz i jego uczniowie*, Warszawa 1997, s. 105.
[56] List S. Leśniewskiego do prof. K. Twardowskiego, 15 IV 1919, FN 1999, z. 1–2, s. 120.
[57] J. Woleński, *Szkoła lwowsko-warszawska w polemikach*, dz. cyt., s. 143.

Leśniewski traktował definicje jako tezy systemu oraz uważał, że aksjomaty powinny zawierać jak najmniejszą ilość pojęć z różnych kategorii semantycznych. Ponadto wymagał, by aksjomaty miały specjalną formę, tzw. formę kanoniczną: jeden aksjomat w postaci równoważności o kwantyfikatorach zewnętrznych wiążących tylko zmienne po lewej stronie równoważności[58]. Inną charakterystyką systemów Leśniewskiego było to, że nie występowały w nich zmienne wolne, kwantyfikatory zaś miały oryginalną interpretację[59].

Prototetyka to uogólniony rachunek zdań. Jak wspomina Kotarbiński[60]:

> Leśniewski nazwał prototetyką część logiki zawierającą zmienne, których wartości ukonstytuowane są przez funktory. To znaczy w praktyce wykładu, że wolno za symbol zmienny podstawić bądź znak koniunkcji, bądź alternatywy, bądź implikacji etc. W ten sposób otrzymuje się tezy ogólniejsze od twierdzeń rachunku zdań[61].

Pierwotny model został przedstawiony za pomocą równoważności (1929). Ważnym przyczynkiem do wyłożenia

---

[58] Tamże.

[59] Tzn. zapis $\forall x$, Fx oznacza „dla każdego podstawienia za x w Fx, Fx”, a kwantyfikator szczegółowy – „dla pewnego”.

[60] T. Kotarbiński, *Logika w Polsce, jej oryginalność i obce wpływy*, dz. cyt., s. 251.

[61] J. Słupecki, *St. Leśniewski's Protothetics*, „Studia Logica” [dalej: SL] 1953, R. I.

całej teorii był rezultat Tarskiego (1923)[62], który zdefiniował negację i koniunkcję za pomocą równoważności oraz kwantyfikatora ogólnego. Tak więc jedynym terminem pierwotnym jego systemu był funktor równoważności. Trzeba jednak dodać, że dla Leśniewskiego systemy oparte na negacji i alternatywie (czy na negacji i implikacji) były różne, dokładnie inaczej niż w klasycznym rachunku zdań[63].

Najkrótszy aksjomat prototetyki[64], z którego można wyprowadzić wszystkie prawa dwuwartościowego rachunku zdań, stosując reguły odrywania i podstawiania za pomocą definicji oraz reguły dotyczącej działań na kwantyfikatorach, znalazł Sobociński w 1945 roku[65], a w 1953 Słupecki[66] wykazał zupełność prototetyki elementarnej, takiej w której kwantyfikatory wiążą zmienne zdaniowe i zmienne funktorowe pierwszego rzędu. Ponadto w tak zdefiniowanej prototetyce można udowodnić zasadę dwuwartościowości, dlatego Leśniewski tak przy niej obstawał[67].

---

62 A. Tarski, *O wyrazie pierwotnym logistyki*, PF 1923, R. XXVI, z. 1–2, s. 68–89.

63 J. Woleński, *Stanisław Leśniewski i jego rola w historii logiki*, dz. cyt., s. 218.

64. $[pq] :: p \leftrightarrow q. \leftrightarrow \therefore [f]:. f(pf(p[u].u)). \leftrightarrow :[r]: f(qr). \leftrightarrow .q \leftrightarrow p$ Kropki wskazują na porządek operowania kwantyfikatorów.

65 B. Sobociński, *Z badań nad aksjomatyką Stanisława Leśniewskiego*, „Roczniki Naukowe” [dalej: RN] 1953, R. IV; J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 145.

66 J. Słupecki, *St. Leśniewski's Protothetics*, dz. cyt.

67 J. Woleński, *Stanisław Leśniewski i jego rola w historii logiki*, dz. cyt., s. 220.

Ontologia powstała w latach 1919–1920 i może być traktowana jako uogólniony rachunek nazw z funktorem „jest” jako pierwotnym[68], ale według Leśniewskiego teoria ta opisuje „pewnego rodzaju »ogólne zasady bytu«”[69], gdzie „spójka ‘jest’ brana jest w znaczeniu zasadniczym”[70], jako nazwy tylko jednej kategorii, a nie imiona własne czy orzeczniki[71]. Według Kotarbińskiego:

> [...] ontologia jest obszernym ustopniowanym systemem teorematów coraz bardziej abstrakcyjnych i skomplikowanych. By go zbudować, Leśniewski wynalazł bardzo oryginalną klasyfikację słów i wyrażeń, z których składają się twierdzenia tego systemu. Każde wyrażenie przynależy do określonej kategorii semantycznej zależnie od składników jego struktury. Obok zdania i nazwy wyróżniamy „funktor”, czyli wyrażenie, które wiąże nazwy bądź zdania złożone z dwóch zdań (np. „jeżeli to”), funktory tworzące nazwę z dwóch nazw (np. „i” między nazwami, np. „ojciec i przyjaciel”) etc. Ta klasyfikacja uchwytna formalnie ma w oczach mistrzów logistyki znaczną przewagę nad klasyfikacją kategorii semantycznych Husserla, która w próbach zastępowania pewnych wyrażeń przez inne odwołuje się do poczucia sensu i nonsensu[72].

---

68 J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 145.

69 Tamże, s. 147.

70 Tamże.

71 J. Woleński, *Stanisław Leśniewski i jego rola w historii logiki*, dz. cyt., s. 221.

72 T. Kotarbiński, *Logika w Polsce, jej oryginalność i obce wpływy*, dz. cyt., s. 252.

> […] różni się ona od zwykłego rachunku predykatów w następujący sposób: zasada rachunku predykatów nie dopuszcza pod grozą nonsensu użycia jako orzecznika imienia własnego mogącego oznaczać podmiot w zdaniu prostym o podmiocie jednostkowym (i na odwrót), podczas gdy w ontologii jest to dopuszczalne. Ontologia Leśniewskiego ma różne zalety, a między innymi tę, że bardziej niż zwykły rachunek predykatów zdaje się harmonizować zarówno z sylogistyką Arystotelesa, jak i z praktyką mowy potocznej[73].

Możliwa jest także teoriomnogościowa interpretacja ontologii, ale ponieważ Leśniewski, będąc nominalistą, nie uznawał przedmiotów abstrakcyjnych, stąd jego pierwotna intuicja nie mogła zmierzać w tym kierunku[74]. Wynika to z faktu, że ontologia jest teorią prawdziwą w każdej dziedzinie, jest pierwszym systemem „logiki wolnej"[75]. Dodatkowo kwantyfikator szczegółowy nie jest kwantyfikatorem egzystencjalnym, a Leśniewski definiuje sens terminów 'przedmiot' oraz 'istnieje'. Dlatego Woleński uważa[76], że teoria ta jest „metafizycznie" neutralna i stąd możliwa jest jej teoriomnogościowa interpretacja.

Mereologia to ostatni z systemów Leśniewskiego, choć powstał jako pierwszy, bo w 1916 roku. Nie jest to teoria logiczna,

---

[73] Tamże, s. 251.
[74] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 147.
[75] Tamże.
[76] Tamże, s. 148, przypis 29.

ale uogólniona teoria zbiorów, inaczej – teoria zbiorów kolektywnych.

> Jest to teoria stosunku części do całości takiej jak zbiór […], przy czym część pojmuje się jako fragment w takim samym sensie, w jakim ręka stanowi fragment ciała ludzkiego, a trzonek fragment noża[77].

Analizując antynomię Russella, klasy wszystkich klas niebędących swoimi własnymi elementami, Leśniewski doszedł do wniosku, że cały problem tkwi w błędnym pojęciu terminu „zbiór". Tu zrodziła się propozycja zbioru kolektywnego, gdzie relacją pierwotną jest relacja części[78], a nie jak u Georga Cantora – relacja przynależności. Zatem każdy obiekt, także zbiór mereologiczny, jest częścią siebie, dlatego jest swoim własnym elementem. O tym, jak powstała mereologia, tak wspomina Kotarbiński:

> I oto zdarzyło się, że Leśniewski (a było to bodaj tuż niemal przed pierwszą wojną światową) podjął się odczytu o antynomii Russella w cyklu odczytów publicznych [...]. Otóż przygotowując się do owego odczytu, nasz prelegent w pewnej chwili stwierdził, że obmyślona przezeń krytyka omawianej antynomii zawiera błąd, „leży w gruzach", jak zwykle był mawiać w podobnych przypadkach.

[77] T. Kotarbiński, *Logika w Polsce, jej oryginalność i obce wpływy*, dz. cyt., s. 252.

[78] Chodzi tu oczywiście o część niewłaściwą, nazywaną przez Leśniewskiego *ingrediensem*.

Prawdziwa rozpacz! Za parę godzin odczyt, słuchacze się zejdą, sytuacja grozi kompromitacją. Postanowił tedy maksymalnie wytężyć uwagę, pomagając sobie chrupaniem czekolady. A rezultat był taki, że wedle jego własnej diagnozy z czekolady urodziła się mereologia. Bo czyż nie jest jasne, że chociaż coś, co jest M-em, jest przeto elementem klasy M-ów, jednak bynajmniej nieprawda, że coś, co jest elementem klasy M-ów, samo też musi być M-em z tej racji! A takiego właśnie wadliwego kroku dopuszcza się Russell w konstrukcji swojej antynomii[79]. I dalej tłumaczy, na czym ten błąd polega: Błąd to oczywisty, bo weźmy pod uwagę na przykład szachownicę, notoryczną klasę jej własnych pól. Każde pole szachownicy jest jej elementem, elementem klasy jej pól. Ale ta sama szachownica jest też notorycznie klasą ośmiopolowych pasm prostokątnych. Chociaż jednak każde pole naszej szachownicy jest elementem tej szachownicy, a przeto jest elementem klasy owych jej pasm prostokątnych, nie jest ono bynajmniej żadnym z tych pasm![80]Ponieważ zatem w mereologii „żaden przedmiot nie jest klasą klas nie podporządkowanych sobie, to wyrażenie 'klasa klas nie podporządkowanych sobie' nie oznacza żadnego przedmiotu, wszelkie więc zdanie, w które wyrażenie to wchodzi jako podmiot, jest zdaniem fałszywym"[81]. Skoro takiego przedmiotu nie ma, paradoks Russella nie występuje.

---

[79] T. Kotarbiński, *Garstka wspomnień o Stanisławie Leśniewskim*, dz. cyt., s. 299.

[80] Tamże, s. 300.

[81] S. Leśniewski, *Czy klasa klas, nie podporządkowanych sobie, jest podporządkowana sobie?*, PF 1914, R. XVII, z. 1, s. 63–75.

Aby nie pozostać tylko w kręgach polskich, za namową Twardowskiego Leśniewski w 1929 roku przedstawił swój trójsystem w nieco skróconej formie w języku niemieckim na łamach czasopisma „Fundamenta Mathematicae" pt. *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagender Mathematik*. Wydrukowana została jednak tylko pierwsza część jego pracy[82]. Leśniewski pracował nad całą teorią 23 lata i niestety nie wszystkie wyniki opublikowano oraz nie wszystkie się zachowały. Część wyników próbował zrekonstruować Sobociński, ale duża partia tych rękopisów zaginęła.

4. Wpływ Stanisława Leśniewskiego na twórczość niektórych przedstawicieli szkoły warszawskiej

Wpływ Stanisława Leśniewskiego na twórczość Czesława Lejewskiego, Jerzego Słupeckiego czy Bolesława Sobocińskiego jest raczej oczywisty. Wszyscy trzej logicy to wierni kontynuatorzy idei Leśniewskiego: Lejewski kontynuował prace w zakresie mereologii i ontologii[83], Słupecki – w zakresie prototetyki

[82] R. Jadczak, *Mistrz i jego uczniowie*, dz. cyt., s. 108.
[83] Cz. Lejewski, *Consistency of Leśniewski's Mereology*, *Logic and Existence*, *On Leśniewski's Ontology*, [w:] *Leśniewski's Systems. Ontology and Mereology*, red. J.T. Srzednicki, V.F. Rickey, Nijhoff International Philosophical Series, t. 13, Hague–Wrocław 1984.

i mereologii[84], a Sobociński zajmował się wszystkimi systemami[85]. W praktyce wszyscy zajmowali się wszystkim.

Kotarbiński pisał:

> Najwięcej wszelako nauczyłem się bez wątpienia od prof. dr. Stanisława Leśniewskiego. […] cała moja myśl przesycona jest do głębi wpływami tego niezwykłego umysłu, z którego bezcennych darów los przychylny pozwolił mi przez szereg lat korzystać w obcowaniu niemal codziennym. Jestem niewątpliwie uczniem kolegi Leśniewskiego […][86].

I jak dodaje Ryszard Jadczak, Kotarbiński posłużył się ideami Leśniewskiego na użytek swojego reizmu: „[…] reizm wygrał wielki los, natknąwszy się na znakomity wynalazek w po-

[84] J. Słupecki, *St. Leśniewski's Protothetics*, dz. cyt., s. 44–111; tegoż, *S. Leśniewski's Calculus of Names*, SL 1955, R. III, s. 7–72; tegoż, *Towards a Generalized Mereology of Leśniewski*, SL 1958, R. VIII, s. 131–154.

[85] B. Sobociński, *O kolejnych uproszczeniach aksjomatyki „ontologii" prof. S. Leśniewskiego*, „Fragmenty Filozoficzne" 1934, s. 143–160; tegoż, *L'analyse de l'antinomie russelienne par Leśniewski*, „Methodos" 1949, R. 1–2, z. 1, 2, 3, 6–7, s. 94–107, 220–228, 308–316, 237–257; tegoż, *Z badań nad aksjomatyką prototetyki Stanisława Leśniewskiego*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Naukowego" [dalej: RN] 1954, R. IV, s. 18–20; tegoż, *Studies in Leśniewski's Mereology*, RN 1954, R. V, s. 34–48.

[86] T. Kotarbiński, *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, Wrocław–Warszawa–Kraków 1961, s. 9–10, [w:] R. Jadczak, *Mistrz i jego uczniowie*, dz. cyt., s. 109.

staci Ontologii. […] Otrzymał aparaturę gotową z wytworami świetnie funkcjonującymi”[87].

Bardzo ważny jest także wpływ idei Leśniewskiego na działalność Tarskiego i Łukasiewicza.

Alfred Tarski[88]. Woleński przypuszcza, że pierwsze idee semantyczne sformułowane przez Tarskiego pochodzą właśnie od Leśniewskiego. Wynika to z filozofii Leśniewskiego, dla którego formalizacja była środkiem, a nie celem:

> Trudzę się przedstawieniem różnych teorii dedukcyjnych, aby w szeregu sensownych zdań wyrazić szereg myśli, które posiadam na ten czy inny temat i aby jedne zdania wyprowadzić z innych w taki sposób, aby to było w zgodzie z zasadami wnioskowania, które uważam za „intuicyjnie” obowiązujące. Nie znam innej skutecznej metody, aby zaznajomić czytelnika z moimi „logicznymi intuicjami”, aniżeli metoda „formalizacji” odnośnych [do] teorii dedukcyjnych, które pod wpływem „formalizacji” w żadnej mierze nie przestają się składać z sensownych zdań, będących dla mnie intuicyjnie ważnymi. Metodę polegającą na przemycaniu poprzez matematyczną dedukcję opartą o „intuicyjną” bazę różnych tajemnic logicznych uważam w każdym razie za znacznie mniej celowy sposób[89].

---

[87] T. Kotarbiński, „Studia Filozoficzne” 1958, z. 4, [w:] R. Jadczak, *Mistrz i jego uczniowie*, dz. cyt., s. 110.
[88] Tu trzeba wspomnieć, że Tarski był doktorantem Leśniewskiego.
[89] S. Leśniewski, *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, § 1–11, FM 1929, R. XIV, s. 78, [w:] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 138.

Leśniewski dbał o precyzję języka, pojęć i wypowiedzi oraz o łączność wszystkiego z rzeczywistością[90]. Woleński podaje, że objaśnienia terminologiczne z definicjami pojęć Leśniewskiego zajmują w monografii Eugene'a C. Luschei z 1962 roku 120 stron[91], a Henryk Hiż tak się wyraża na ten temat:

> Przez dwa lata chodziłem na jego wykłady i seminaria. […] Przez jeden semestr czytało się tam artykuł Łukasiewicza *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls*[92]. Odbywało się to tak, że czytało się jedno zdanie, tłumaczyło na polski, po czym Leśniewski podawał interpretację tego zdania i wywodził na tablicy, że jest nie do przyjęcia. Wtedy podawał drugą interpretację tego zdania, z której wyciągał okropne wnioski. I tak dalej. I tak dalej[93].

Jan Łukasiewicz. Wspomnieliśmy wcześniej, że Łukasiewicz zajmował się dogłębną analizą klasycznego rachunku zdań[94].

---

[90] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 138–139.

[91] Tamże, s. 133.

[92] Chodzi o artykuł Łukasiewicza dotyczący głównych intuicji filozoficznych i formalnych leżących u podstaw logiki wielowartościowej, z którą to Leśniewski całkowicie się nie zgadzał. Artykuł ten został opublikowany w „Sprawozdaniach Towarzystwa Naukowego Warszawskiego" w 1930 roku.

[93] H. Hiż, *Garstka wspomnień kibica matematyków*, „Wiadomości Matematyczne" 2000, R. XXXVI, s. 54.

[94] Łukasiewicz stworzył specjalną symbolikę, tzw. *beznawiasową*, w której funktory występują przed argumentami i której pomysł po-

Idea, by zdefiniować rachunek zdań ze zmiennymi funktorami, najprawdopodobniej pochodzi od Leśniewskiego, który po raz pierwszy zastosował zmienne funktory w swojej prototetyce[95]. Dlatego Łukasiewicz wprowadza do logiki wyrażenie *Vp (verum od p)* jako *Vp = Epp* oraz *EVpEpp*. Pierwsze to definicja zapisana w metajęzyku, a drugie – teza[96]. Dla Łukasiewicza definicje to metajęzykowe skróty, dla Leśniewskiego – to tezy systemu[97].

W tak skonstruowanym rachunku zdań, gdzie za zmienną *f* w wyrażeniu *fx* (*x* jest wyrażeniem) można podstawić dowolną wartość, tak aby całość miała sens, Łukasiewicz wprowadza swoje reguły podstawiania, inne od Leśniewskiego, tzn. przyjmuje, że w miejsce *f* można wpisać dowolną zmienną, czyli po prostu pominąć samo *f*. Okazuje się, że w ten sposób można sformułować definicje za pomocą implikacji i zaksjomatyzować rachunek zdań w nowy sposób. W 1951 roku Carew A. Meredith udowodnił, że prawa klasycznego rachunku zdań oraz prawa zdań z kwantyfikatorami i zmiennymi funktorowymi wynikają z tezy, którą znał Leśniewski[98]. Tak o tym wspominał Łukasiewicz:

---

chodził od Leona Chwistka. Symbolika ta stosowana była w szkole warszawskiej ze względu na swoją ekonomię – brak kropek i nawiasów, jednak nie wszyscy jej używali. Leśniewski pozostał przy swojej notacji nawiasowej z uwzględnieniem kropek, jak w *Principia Mathematica* Russella i Whiteheada. Zob. J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 93.

95 Tamże, s. 104.

96 Tamże, s. 103.

97 Tamże.

98 Tamże, s. 104–106.

> Wyprowadzenie z tej tezy całego rachunku zdań przy pomocy reguły podstawiania, odrywania i reguł dla kwantyfikatorów należy uznać za arcydzieło sztuki dedukcyjnej[99].

Zakończenie

Leśniewski pisał niewiele, a to, co pisał, dotyczyło głównie jego własnych systemów. Większość z jego rękopisów niestety została zniszczona podczas wojny albo zaginęła. Trzeba jednak przyznać, że jego dogłębne analizy i polemiki prowadzone na łamach „Przeglądu Filozoficznego" stymulowały innych myślicieli do pogłębionej refleksji. Dyskusje na temat zasady sprzeczności, zdań kategorycznych, warunkowych, definicji nie były łatwe, ale też Leśniewski nie był łatwym partnerem do rozmów, choć jak pisał Łukasiewicz w swoim *Dzienniku*: „był to jeden z najgenialniejszych umysłów, jakie Polska wydała"[100]. Część wyników próbowali odtworzyć Sobociński, Lejewski, Słupecki, Hiż, Grzegorczyk, ale co „chodziło" po głowie tego geniusza, jak mawiał jeden z nich, raczej nie jesteśmy już w stanie się dowiedzieć. Łukasiewicz zawdzięcza Leśniewskiemu „co znaczy myśleć ściśle"[101], ale dla wszystkich logików warszawskich Leś-

[99] Tamże, s. 106.
[100] J. Łukasiewicz, *Dzienniki*, s. 28, [w:] J. Woleński, *Szkoła lwowsko-warszawska w polemikach*, dz. cyt., s. 53.
[101] Tamże, s. 61.

niewski był niewątpliwie wielką postacią logiki[102]. I skoro jego dorobek to „arcydzieło sztuki dedukcyjnej", to jego autor rzeczywiście musiał być człowiekiem nieprzeciętnym.

Bibliografia

Feferman B., Feferman S., *Alfred Tarski. Życie i logika*, Warszawa 2009.

Hiż H., *Garstka wspomnień kibica matematyków*, „Wiadomości Matematyczne" 2000, R. XXXVI, s. 53–59.

Jadczak R., *Mistrz i jego uczniowie*, Warszawa 1997.

Kotarbiński T., *Szkice z historii filozofii i logiki*, Warszawa 1979.

Lejewski Cz., *Consistency of Leśniewski's Mereology*, *Logic and Existence*, *On Leśniewski's Ontology*, [w:] *Leśniewski's Systems. Ontology and Mereology*, red. J.T. Srzednicki, V.F. Rickey, Nijhoff International Philosophical Series, t. 13, Hague–Wrocław 1984.

Leśniewski S., *Krytyka logicznej zasady wyłączonego środka*, „Przegląd Filozoficzny" 1913, R. XVI, s. 315–352.

Leśniewski S., *Czy prawda jest tylko wieczna czy też wieczna i odwieczna*, „Nowe Tory" 1913, z. 18, s. 493–528.

Leśniewski S., *Czy klasa klas, nie podporządkowanych sobie, jest podporządkowana sobie?*, „Przegląd Filozoficzny" 1914, R. XVII, z. 1, s. 63–75.

[102] Tamże, s. 153.

Leśniewski S., *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny" 1927, R. XXX, z. 2–3, s. 164–206.

Leśniewski S., *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny" 1931, R. XXXIV, z. 2–3, s. 142–170.

Leśniewski S., *O ogólnej teorii mnogości*, „Filozofia Nauki" 1999, z. 3–4, s. 173–208.

Łukasiewicz J., *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa. Studium krytyczne*, Kraków 1910.

Murawski R., *Filozofia matematyki i logiki w Polsce międzywojennej*, Toruń 2011.

Skoczyński J., Woleński J., *Historia filozofii polskiej*, Kraków 2010.

Słupecki J., *St. Leśniewski's Protothetics*, „Studia Logica" 1953, R. I, s. 44–111.

Słupecki J., *S. Leśniewski's Calculus of Names*, „Studia Logica" 1955, R. III, s. 7–72.

Słupecki J., *Towards a Generalized Mereology of Leśniewski*, „Studia Logica" 1958, R. VIII, s. 131–154.

Sobociński B., *O kolejnych uproszczeniach aksjomatyki „ontologii" prof. S. Leśniewskiego*, „Fragmenty Filozoficzne" 1934, s. 143–160.

Sobociński B., *L'analyse de l'antinomie russelienne par Leśniewski*, „Methodos" 1949, R. 1–2, z. 1, 2, 3, 6–7, s. 94–107, 220–228, 308–316, 237–257.

Sobociński B., *Z badań nad aksjomatyką prototetyki Stanisława Leśniewskiego*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Naukowego" 1954, R. IV, s. 18–20.

Sobociński B., *Studies in Leśniewski's Mereology*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Naukowego" 1954, R. V, s. 34–48.

Tarski A., *O wyrazie pierwotnym logistyki*, „Przegląd Filozoficzny" 1923, R. XXVI, z. 1–2, s. 68–89.

Woleński J., *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, Warszawa 1985.

Woleński J., *Stanisław Leśniewski i jego rola w historii logiki*, Warszawa 1987.

Woleński J., *Geneza warszawskiej szkoły logicznej*, [w:] *Matematyka przełomu XIX i XX wieku: nurt mnogościowy*, red. J. Mioduszewski, Katowice 1992.

Woleński J., *Towarzystwo Naukowe Warszawskie i rozwój logiki w Polsce*, http://www.tnw.waw.pl/hist_ja_wol.html. Woleński J., *Szkoła lwowsko-warszawska w polemikach*, Warszawa 1997. Żarnecka-Biały E., *Historia logiki dawniejszej*, Kraków 1995.

Prace z równań różniczkowych w „Pamiętniku Akademii Umiejętności w Krakowie”

Jan Koroński
Instytut Matematyki
Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki
Politechnika Krakowska

Papers concerning differential equations in the Memoirs of the Academy of Arts and Sciences in Cracow

Abstract

This paper concerns the general characteristics of the Academy of Arts and Sciences in Cracow and the Memoirs of the Academy of Arts and Sciences in Cracow. Moreover, in the context of the global development of the theory of differential equations we present in this paper the articles of Alojzy Jan Stodółkiewicz (1856-1934), Władysław Zajączkowski (1837-1898), Jan Rajewski (1857-1906), Wawrzyniec Żmurko (1824-1889) and Edward Władysław Skiba (1843-1911) on differential equations, which were published in the Memoirs of the Academy of Arts and Sciences in Cracow.

Key words:
differential equations, Memoirs of the Academy of Arts and Sciences in Cracow, papers on differential equations in Memoirs of the Academy of Arts and Sciences in Cracow

1. Ogólna charakterystyka Akademii Umiejętności w Krakowie

Akademia Umiejętności w Krakowie powstała w 1872 roku w wyniku przekształcenia działającego wcześniej Towarzystwa Naukowego Krakowskiego (1815–1872), które ściśle współpracowało z Uniwersytetem Jagiellońskim. Towarzystwo Naukowe Krakowskie założono 24 lipca 1815 roku z inicjatywy Jerzego Samuela Bandeckiego – bibliotekarza i bibliografa, filologa oraz historyka językoznawstwa i drukarstwa. Inicjatywę tę poparł ówczesny rektor Uniwersytetu Jagiellońskiego Walenty Litwiński. Do 1852 roku kolejni rektorzy UJ byli prezesami TNK. W tym towarzystwie do 1840 roku w TNK istniało sześć następujących wydziałów: teologii, prawa, medycyny, matematyki, literatury oraz gospodarstwa, wiadomości technicznych i wszelkich kunsztów. Po roku 1840 liczba wydziałów została zmniejszona do czterech. Od 1817 do 1872 roku TNK wydawało „Rocznik Towarzystwa Naukowego Krakowskiego z Uniwersytetem Krakowskim Połączonego". W 1852 roku zawieszono działalność TNK, które reaktywowano w 1857 roku jako Cesarsko-Królewskie Towarzystwo Naukowe Krakowskie.

W 1872 roku, jak to już wyżej stwierdziliśmy, ck TNK zostało przekształcone w Akademię Umiejętności.

Oficjalna uroczystość otwarcia odbyła się w 1873 roku w obecności cesarza Franciszka Józefa. Na uwagę zasługuje fakt przekazania w 1893 roku Akademii Umiejętności w Krakowie zbioru Biblioteki Polskiej w Paryżu. Po pierwszej wojnie światowej w 1918 roku Akademia Umiejętności została przekształcona w Polską Akademię Umiejętności. Do 1952 roku PAU miała ogółem 676 członków krajowych i 264 zagranicznych. Po drugiej wojnie światowej jej niezależność nie była możliwa do zaakceptowania przez ówczesne władze komunistyczne PRL. Już w 1948 roku władze te ogłosiły, że powołają Polską Akademię Nauk. Tymczasem Polską Akademię Umiejętności programowo niszczono finansowo, a także poprzez blokowanie jej wydawnictw i kontaktów z zagranicą oraz poprzez cenzurę. Na zorganizowanym przez władze komunistyczne I Kongresie Nauki Polskiej w 1951 roku zlikwidowano PAU i Towarzystwo Naukowe Warszawskie, które działało od 1907 roku i stanowiło kontynuację działalności Towarzystwa Przyjaciół Nauk w Warszawie założonego w 1800 roku. Polska Akademia Nauk została powołana ustawą o Polskiej Akademii Nauk z 30 października 1951 roku. Cały majątek PAU skonfiskowano i przekazano wraz z wydawnictwami Polskiej Akademii Nauk. Na początku PAN była korporacją uczonych, jednak w 1960 roku została przekształcona w rządową instytucję centralną. Aż do 1990 roku sprawowała ogólną pieczę nad nauką w Polsce i zarządzała siecią instytutów naukowych. W latach 1957–1958 grupa uczonych próbowała reaktywować PAU. Władze pod wpływem tych prób zgodziły się na utworzenie w Krakowie oddziału PAN. Dopiero w 1990 roku PAN straciła status instytucji rządowej, stając się ponownie korporacją uczonych i siecią instytutów naukowych. Powołany wówczas Komitet Badań Naukowych przejął funkcję sprawowania kontroli nad nauką na poziomie rządu. Odbudowa PAU była możliwa dopiero po zmianie ustroju w 1989 roku. PAU została odtworzona przez grupę członków na podstawie dawnego statutu, z zachowaniem ciągłości organizacyjnej i uwzględnieniem tradycyjnych form działania.

2. Spis prac naukowych w „Pamiętniku Akademii Umiejętności w Krakowie"

„Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie" był kontynuacją „Rocznika Towarzystwa Naukowego Krakowskiego z Uniwersytetem Krakowskim Połączonego", którego wydrukowano 44 tomy od 1817 do 1872 roku. Pierwszy tom „Pamiętnika Akademii Umiejętności w Krakowie" wydrukowano w 1874 roku, a ostatni osiemnasty tom – w 1894 roku. Ogółem w „Pamiętniku" opublikowano 123 prace naukowe, w tym 43 prace z matematyki, a pozostałe 80 prac z różnych dziedzin przyrodniczych. Wśród prac matematycznych 11 prac dotyczyło równań różniczkowych, które są głównym celem niniejszego opracowania. Poniżej podamy spis wszystkich prac osiemnastu tomów „Pamiętnika AU w Krakowie".

Tom I (1874)

1. A. Biesiadecki: *Anatomija patologiczna gruczołów skórnych*
2. Wł. Zajączkowski: *O całkach osobliwych zwyczajnych równań różniczkowych rzędu jakiegokolwiek*
3. W. Żmurko: *O styczności stożków obrotowych*
4. J.N. Franke: *Badania analityczne nad ruchem ciał stałych*
5. Wł. Gosiewski: *Przyczynek do teoryi równowagi i ruchu ciała sztywnego*
6. E.W. Skiba: *Teoryja matematyczna pochłaniania światła*
7. E. Janczewski: *Poszukiwania nad wzrostem wierzchołkowym korzeni roślin okrytoziarnowych*
8. G. Piotrowski: *O chyżości rozchodzenia się światła w solach*
9. F. Strzelecki: *O czystości powietrza*
10. E.W. Skiba i K. Olszewski: *Wpływ temperatury na przewodnictwo galwaniczne wody*

Tom II (1876)

1. E. Janczewski: *Poszukiwania nad powstawaniem korzonków u roślin ziarnowych*
2. Dr A. Alth: *Rzecz o pochodzeniu belemnitów z mięczaków głowonogich oskorupionych*
3. Dr Oskar Fabian: *Obliczanie wartości szeregów nieskończonych, zwłaszcza szeregów bardzo słabéj zbieżności*
4. W. Żmurko: *Przyczynek do rachunku przemienności ze szczególném uwzględnieniem znamion największości i najmniejszości całek oznaczonych*
5. Dr Iz. Kopernicki: *O czaszkach z kurhanów pokuckich*

6. D. Zbrożek: *Teoryja planimetru biegunowego*
7. Fr. Mertens: *O funkcji oskulacyjnéj Profesora Żmurki*
8. Dr J. Rostafiński: *Historyja rozwoju wydętki krzonkowłosej*
9. Prof. dr Karliński: *O okresowych zmianach ciepłoty powietrza w Krakowie*

Tom III (1877)

1. Dr Wł. Zajączkowski: *Teoryja ogólna rozwiązań osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych*
2. W. Żmurko: *O ważności i zastósowaniu funkcji oskulacyjnéj w rachunku przemienności, oraz odpowiedź na uwagi Dra Mertensa dotyczące tego przedmiotu*
3. Dr Fr. Kamieński: *Anatomija porównawcza pierwiosnkowatych (z 10 tablicami)*
4. W. Żmurko: *O ważności i zastósowaniu funkcji oskulacyjnéj w rachunku przemienności, część druga (dokończenie)*
5. Jan N. Franke: *O niektórych zagadnieniach kinematyki na zasadzie ruchu powierzchni skośnych*
6. Dr Ed. Skiba: *Przyczynek do teoryi strun*
7. J. Tetmajer: *Teoryja rozwinięcia funkcyj niewyraźnych*
   Wstęp
   Część pierwsza: O szeregach w ogólności
   Część druga: Rozwój funkcji wyraźnych
   Część trzecia: Rozwój funkcji niewyraźnych
   Rozdział I: Wzory ogólne do rozwinięcia funkcji niewyraźnych (ciąg dalszy téj rozprawy w IV tomie „Pamiętnika Akademii" str. 1)

Tom IV (1878)

1. J. Tetmajer: *Teoryja rozwinięcia funkcyj niewyraźnych. Część trzecia* (część I i II, tudzież rozdział I części III są zamieszczone w III tomie „Pamiętnika Akademii” str. 155–188)
2. Z. Kahane: *Budowa tasiemca nastroszonego (Taenia perfoliata Göze) jako przyczynek do anatomii i histologii ogniwców (Cestodes)*
3. Dr Henryk Kadyi: *O oku kreta pospolitego (talpa europea) pod względem porównawczo-anatomicznym*
4. Dr D. Wierzbicki: *Ruch dzienny prężności pary i wilgotności powietrza w Krakowie* (Część I pracy większéj pod tytułem: *Peryjodyczne zmiany prężności pary i wilgotności powietrza w Krakowie*. Część druga zamieszczoną zostanie w tomie V „Pamiętnika Akademii”)
5. Dr L. Nowakowski: *Przyczynek do morfologii i systematyki skoczków (Chytridiaceae)*

Tom V (1880)

1. Józef Tetmajer: *Rozwiązanie równań trzechwyrazowych*
2. Dr A. Rehman: *Geobotaniczne stosunki południowéj Afryki* (Tabl. I, II i III)
3. Dr D. Wierzbicki: *Peryjodyczne zmiany prężności pary i wilgotności powietrza w Krakowie. Część druga* (Tabl. IV i V)
4. Józef Tetmajer: *Dodatek do rozwiązania trygonometrycznego równań dwuwyrazowych*
5. Prof. dr Gustaw Piotrowski: *O stosunku między ciężarem gatunkowym a składem chemicznym ciał stałych nieorganicznych*

6. Prof. dr Bronisław Radziszewski: *Badania nad zjawiskami fosforescencyj ciał organicznych i uorganicznych*

Tom VI (1881)

1. Dr Alojzy Alth: *Wapień Niżniowski i jego skamieliny (z 12 tablicami)*
2. Ignacy Szyszłowicz: *O zbiornikach olejków lotnych w królestwie roślinném (z 7 tablicami)*
3. Dr Władysław Zajączkowski: *Teoryjka wyznaczników o p wymiarach*

Tom VII (1882)

1. Prof. Włodzimierz Brodowski: *Przyczynek do anatomii patologicznéj wątroby (z 1 tablicą)*
2. Jan Nep. Franke: *O inwolucyi sześciu prostych, uważanych jako osi skrętów chwilowych*
3. Dr Izydor Kopernicji: *O kościach i czaszkach Ainosów (z 4 tablicami*)
4. Władysław Kretkowski: *O przekształceniach pewnych wielomianów jednorodnych drugiego stopnia*
5. Dr Ludwik Birkenmajer: *O kinetycznéj równowadze elipsoidy nieobrotowéj pod wpływem grawitacji i siły odśrodkowéj*
6. Dr Fr. Kamieński: *Narzędzia odżywcze Korzeniówki (Monotropa Hypopitys) (z 3 tablicami)*
7. Dr Emil Godlewski: *Studyja nad oddychaniem roślin*
8. Dr Kazimierz Olearski: *O elektrycznych oscylacjach*
9. Władysław Kretkowski: *O rozwiązywaniu równań algebraicznych ogólnych za pomocą całek oznaczonych*

10. Władysław Kretkowski: *O niektórych wzorach rachunku różniczkowego*
11. Jan Nep. Franke: *Teoryjka analityczna komplexów śrub chwilowych*

Tom VIII (1883)

1. Władysław Kulczyński: *Opisy nowych gatunków pająków z Tatr, Babiéj Góry i Karpat Szląskich (Tablica I, II i III)*
2. Edward i Władysław Natansonowie: *O przyciąganiu się atomów i ruchu ich w cząsteczkach gazów*
3. Dr Wawrzyniec Żmurko: *O całkowaniu równań różniczkowych linijnych rzędu drugiego o współczynnikach linijnych*
4. Eugeniusz Dziewulski: *Zagęszczenia optyczne mięszanin wody i alkoholu (Tab. IV, V, VI i VII)*
5. A.J. Stodółkiewicz: *Zastosowanie sposobu Bertranda do całkowania równania różniczkowego o różniczkach zupełnych z wielu zmiennymi*
6. A.J. Stodółkiewicz: *Całkowanie układów równań różniczkowych o różniczkach zupełnych*
7. Dr Leon Nowakowski: *Entomophthoreae. Przyczynek do znajomości pasożytnych grzybków sprawiających pomór owadów (Tab. VIII, IX, X, XI i XII)*

Tom IX (1884)

1. Dr Władysław Zajączkowski: *O zamianie funkcyi całkowitéj i jednorodnéj stopnia 2go na sumę kwadratów*
2. Władysław Kretkowski: *Dowód pewnego twierdzenia tyczącego się dwóch wyznaczników ogólnych*

3. Dr Józef Puzyna: *O pozornie dwuwartościowych określonych całkach podwójnych*
4. Dr Stefan Puzyna: *Przebieg roczny ciepłoty powietrza w Krakowie obliczony na podstawie pięćdziesięcioletnich spostrzeżeń (1826–1875) sposobem nowym, prostszym i ściślejszym niż dotąd używane. (Tablica I)*
5. A.J. Stodółkiewicz: *O całkowaniu równań różniczkowych linijnych rzędu drugiego, mających współczynniki linijne, przy pomocy kwadratur*
6. Jan Rajewski: *O całkowaniu równań różniczkowych linijnych rzędu drugiego, w postaci* $(c_2x^2 + b_2x + a_2)y'' + (b_1x + a_1)y' + a_0y = 0$
7. Dr Emil Godlewski: *Przyczynek do teoryi krążenia soków u roślin. (Tablica II)*
8. Dominik Zbrożek: *Zastosowanie wyznaczników w teoryi najmniejszych kwadratów*

Tom X (1885)

1. Dr A. Jaworski: *O swobodnym rozplemie wnętrznym (endogenezie) komórek Tab. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX)*
2. Dr Stefan Kuczyński: *Porównanie co do ścisłości sześciu wzorów służących do obliczania przebiegu rocznego ciepłoty w miejscu daném*
3. F. Mertens: *O niezmiennikach jednéj i dwóch form dwulinijowych alternujących*
4. M. Raciborski: *Opisy nowych desmidyjów polskich (Tab. X, XI, XII, XIII i XIV)*

Tom XI (1885)

1. Godfryd Ossowski: *Jaskinie okolic Ojcowa pod względem paleoetnologicznym (z 2 tablicami litografowanemi Tab. II i III i 6 fotodrukowanemi Tab. I, IV, V, VI, VII i VIII). Do str. 45 dodaną jest tablica drukowana z napisem: „Obraz chronologiczny budowy geologicznéj i zabytków zawartych w namuliskach jaskiń zbadanych na ziemiach polskich po rok 1848”*
2. Dr J. Rostafiński: *De plantis quae in „Capitulari de villis et curtis imperialibus” Caroli Magni commemorantur. Jako materyjał do historyi hodowli roślin w Polsce*
3. Jan Nep. Franke: *O wyrównaniu chyżości biegu nieustannego machin parowych*
4. Władysław Kulczyński: *Pająki zebrane na Kamczatce przez Dra Dybowskiego. (Tablica IX, X i XI)*

Tom XII (1886)

1. F. Mertens: *O utworach niezmienniczych form kwadratowych*
2. Jan Nep. Franke: *O kręceniu się ciała stałego około punktu*
3. Dr Władysław Szajnocha: *O kilku gatunkach ryb kopalnych z Monte-Bolca pod Weroną, znajdujących się w gabinecie geologicznym Uniwersytetu Jagiellońskiego (Tablica I, II, III i IV)*
4. Dr Wawrzyniec Żmurko: *Uzasadnienie niektórych ważniejszych uproszczeń algebraicznéj rachuby oparte na bliższém rozważaniu algebraicznego dzielenia*
5. S. Dickstein: *O niektórych własnościach funkcyj alef*
6. S. Dickstein: *O twierdzeniu Crocchiego*

7. Dr J. Kopernicji: *Czaszki Ainów według nowych materyjałów (Tablica V, VI i VII)*
8. S. Dickstein: *Dowód dwóch wzorów Wrońskiego*
9. A.J. Stodółkiewicz: *O dwóch szczególnych układach równań różniczkowych o różniczkach zupełnych*

Tom XIII (1887)

1. Dr med. Konrad Rumszewicz: *Mięśnie śródoczne u ptaków (Tablica I, II i III)*
2. Dr Ludwik Birkenmajer: *Nowa teoryja kształtu i grawitacyi Ziemi*
3. Władysław Kretkowski: *O wyznaczeniu kuli przecinającej pod tym samym kątem ilekolwiek kul danych i o zagadnieniach podobnych*
4. Władysław Kretkowski: *O pewnych zagadnieniach geometrii kulistej*
5. Dr W. Antoni Gluziński: *O fizyjologicznem i leczniczem działaniu siarkanu sparteiny (Tablica IV, V i VI)*
6. Władysław Zajączkowski: *Teoryja Fuchsa równań różniczkowych linijowych i jednorodnych z jedną zmienną niezależną*
7. A.W. Witkowski: *O kilku przypadkach ruchu cieczy, zależnych od spójności*

Tom XIV (1888)

1. Dr Józef Puzyna: *O zastosowaniu uogólnionych form interpolacyjnych Lagrange'a (Tab. I)*
2. Dr Stanisław Żurakowski: *Dowód twierdzenia H. Wrońskiego*

3. Dr A. Walentowicz: *O przypadku dwupłciowości obustronnej u świni (Hermaphroditismus bilateralis) (Tab. II i III)*
4. Dr W. Teisseyre: *Studyja paleontologiczne I. Proplanulites novum genus (Tab. IV i V)*
5. Franciszek Tomaszewski: *Przyczynek do znajomości stałej dielektrycznej płynów (Tab. VI)*
6. Prof. J. Rostafiński: *Porównanie tak zwanych zielników Falimirza, Spiczyńskiego i Siennika*
7. Prof. J. Rostafiński: *Nasza literatura botaniczna XVI wieku oraz jej autorowie lub tłomacze*
8. Prof. W. Żmurko: *O powierzchniach sprzężonych z powierzchniami rzędu drugiego*

Tom XV (1888)

1. H. Kadyi: *O naczyniach krwionośnych rdzenia pacierzowego (Tablice I–X)*
   Wstęp
   I. Literatura
   II. Metoda badania
   III. O pniach tętniczych i żytnych zaopatrujących rdzeń
   IV. O naczyniach krwionośnych opony miękkiej
   V. O rozgałęzieniach naczyń krwionośnych w rdzeniu
   VI. O naczyniach włosowatych rdzenia
   VII. Poglądy morfologiczne na naczynia krwionośne rdzenia
   VIII. W kwestyi naczyń limfatycznych rdzenia
   IX. Objaśnienie tablic
2. Władysław Satke: *Ciepłota w Tarnopolu*

3. Adolf Beck: *O pobudliwości różnych miejsc tego samego nerwu (Tab. XI)*

Tom XVI (1889)

1. Dr Gustaw Piotrowski: *Przyczynek do nauki o unerwieniu naczyń*
2. S. Dickstein: *Kilka twierdzeń o funkcyjach alef*
3. Prof. Franciszek Mertens: *O wyznaczniku, którego elementami są wartości n! funkcyj całkowitych*
4. Prof. Emil Dunikowski: *O gąbkach cenomańskich z warstwy fosforytowej Podola galicyjskiego (z trzema tablicami)*
5. Prof. Władysław Szajnocha: *Pholadomyocardia Jelskii n.g., n.sp. (z tablicą)*
6. Dr G. Piotrowski: *Wpływ ciśnienia w jamie brzusznej na tętno i parcie ościenne krwi (z dwiema tablicami)*
7. St. Czapliński i Al. Rosner: *O drogach, któremi tłuszcz i mydło dostają się z jelit do obiegu ogólnego (z dwiema tablicami)*
8. Dr G. Piotrowski: *O pobudliwości i zdolności przewodzenia stanu czynnego w nerwach i mięśniach (z trzema tablicami)*
9. Franciszek Tondera: *Opis flory kopalnej pokładów węglowych Jaworzna, Dąbkowy i Sierszy (z dwiema tablicami)*

Tom XVII (1890)

1. Dr Gustaw Piotrowski: *O pobudliwości i zdolności przewodzenia stanu czynnego w nerwach i mięśniach*
2. Józef Puzyna: *O pewnem twierdzeniu F. Foliego*
3. Dr Józef Siemiradzki: *O mięczakach głowonogich brunatnego jura w Popielanach na Żmudzi (z czterema tablicami)*

4. M. Raciborski: *Nowe desmidyje (z czterema tablicami)*
5. Dr Józef Siemiradzki: *O faunie kopalnej warstw brunatnego jura w Popielanach na Żmudzi*
6. Władysław Gosiewski: *O ciśnieniu kinetycznem w płynie nieściśliwym i jednorodnym*
7. Władysław Gosiewski: *O naturze ruchu wewnątrz elementu płynnego*
8. F. Mertens: *O funkcyjach całkowitych układu mn zmiennych, tworzących m wierszy i n kolumn*
9. Jan Rajewski: *O całkach nieregularnych równań różniczkowych linijowych*
10. Tadeusz Wiśniowski: *Mikrofauna iłów ornatowych okolicy Krakowa. Część I. Otwornice górnego Kellowayu we Grojcu (z trzema tablicami)*

Tom XVIII (1894)

1. Dr J. Siemiradzki: *Fauna kopalna warstw oxfordzkich i kimerydzkich w okręgu krakowskim i przyległych częściach Królestwa Polskiego. Część I. Głowonogi. (Z pięcioma tablicami i licznemi rycinami w tekscie)*
2. Dr J. Siemiradzki: *Fauna kopalna warstw oxfordzkich i kimerydzkich w okręgu krakowskim i przyległych częściach Królestwa Polskiego. Część II. Ślimaki, małże, ramionopławy i szkarłupnie*
3. Maryan Raciborski: *Flora kopalna ogniotrwałych glinek krakowskich. Część I. Rodniowce (Archaegoniatae) (z dwudziestoma dwiema tablicami)*

3. Prace z równań różniczkowych w „Pamiętniku Akademii Umiejętności w Krakowie"

Prace z zakresu równań różniczkowych w „Pamiętniku Akademii Umiejętności w Krakowie" opublikowało pięciu następujących matematyków: Alojzy Jan Stodółkiewicz (1856–1934) – cztery prace, Władysław Zajączkowski (1837–1898) – trzy prace, Jan Rajewski (1857–1906) – dwie prace i po jednej pracy Wawrzyniec Żmurko (1824–1889) oraz Edward Władysław Skiba (1843–1911).

Dziesięć z jedenastu prac z równań różniczkowych opublikowanych w „Pamiętniku" można podzielić pod względem tematycznym na trzy grupy. Grupę pierwszą stanowi pięć prac dotyczących zwyczajnych równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego. Ich autorami są: Wawrzyniec Żmurko – t. VIII (1883), Alojzy Jan Stodółkiewicz – t. IX (1884), Jan Rajewski – t. IX (1884) i t. XVII (1990) oraz Władysław Zajączkowski – t. XIII (1887). Prace Stodółkiewicza i Rajewskiego z tomu IX nawiązują do pracy Żmurki z tomu VIII, natomiast praca Rajewskiego z tomu XVII nawiązuje do pracy Zajączkowskiego z tomu XIII. Grupa druga prac dotyczy równań różniczkowych o różniczkach zupełnych i tu należy zaliczyć trzy prace Stodółkiewicza – dwie z nich znajdują się w tomie VIII (1883), a trzecia w tomie XII (1886). Grupę trzecią stanowią dwie prace Zajączkowskiego o całkach osobliwych równań różniczkowych opublikowane w tomach I (1874) i III (1877). Jedenasta praca autorstwa Edwarda Skiby zamieszczona w tomie III (1877) dotyczy równania cząstkowego typu hiperbolicznego, a mianowicie równania struny.

Poniżej krótko scharakteryzujemy wymienione wyżej prace.

3.1. Prace Władysława Zajączkowskiego o całkach osobliwych dla równań różniczkowych zwyczajnych:

I. *O całkach osobliwych zwyczajnych równań różniczkowych rzędu jakiegokolwiek*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. I (1874),

II. *Teoryja ogólna rozwiązań osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. III (1877).

Rozwiązaniami osobliwymi dla równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego zajmowali się Gottfried Wilhelm Leibniz (1694), Brook Taylor (1715), Alexis Clairaut (1734), Leonhard Euler (1756), który podał sposób odróżnienia rozwiązania osobliwego od szczególnego, Pierre Simon de Laplace (1772), który podał sposób wyprowadzenia rozwiązania osobliwego z samego równania różniczkowego, i Joseph-Louis Lagrange, który w pracy *Leçons sur le calcu des fonctions* wykazał związek między rozwiązaniem osobliwym a rozwiązaniem zupełnym[1].

[1] W. Zajączkowski, *Teoryja ogólna rozwiązań osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. III, 1877, s. 1–23.

Ad I. W pracy *O całkach osobliwych zwyczajnych równań różniczkowych rzędu jakiegokolwiek* Zajączkowski stwierdza, że praca Lagrange'a obejmuje wszystko, co do 1774 roku o rozwiązaniach osobliwych dla równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego było wiadomo, jednak posiada zbyt wiele nieścisłości i braków, których w ówczesnym stanie nauki nie można było tolerować. Praca Lagrange'a nie zawiera np. kryterium odróżnienia rozwiązania osobliwego od szczególnego. Wskazane braki zostały usunięte przez Augustusa De Morgana w *Cambridge Philosophical Transactions* (vol. IX, cz. II) i przez George'a Bolle'a w *A Treatise on Differentia equations* (s. 139–182).

W przypadku równań różniczkowych zwyczajnych rzędów wyższych problem rozwiązań osobliwych był nadal nieuporządkowany. Zajął się tym W. Zajączkowski w omawianej tu pracy. Wykazał on, jaki związek zachodzi między całką osobliwą a całką zupełną i podał dwa sposoby wyprowadzenia całki osobliwej z całki zupełnej. Dalej wyprowadził całkę osobliwą z całki pierwszej, czego nie zrobił Lagrange, gdyż nie rozważał całki pierwszej rozwiązanej co do najwyższej pochodnej. W dalszym ciągu Zajączkowski wyprowadził całkę osobliwą z samego równania różniczkowego, dochodząc do dwóch równań warunkowych, które były znane również Lagrange'owi. Jednak Lagrange nie zauważył, że na podstawie drugiego równania warunkowego można uzyskać całkę osobliwą, o ile zajdzie pewien dodatkowy warunek niezerowania się pewnego wyznacznika. Ten dodatkowy warunek w przypadku równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego sformułował De Morgan. W końcowej części Zajączkowski wskazał kryterium pozwalające odróżnić rozwiązanie szczególne od rozwiązania osobliwego dzięki uogólnieniu pewnego twierdzenia Boole'a, które wcześniej udowodnił Augustin-Louis Cauchy (zob. Moigno, *Calcu intégral*, vol. II, s. 445).

Ad II. We wstępie do pracy *Teoryja ogólna rozwiązań osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych* Zajączkowskiego, czytamy co następuje:

> W rozprawie o całkach osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych rzędu jakiegokolwiek, zamieszczonej w tomie pierwszym „Pamiętnika Akademii Umiejętności", starałem się uzupełnić niedostatki i usunąć niedokładności, jakie się napotyka w pracach geometrów, którzy pisali o tym przedmiocie. Już po wydrukowaniu téj pracy spostrzegłem, że teoryja całek osobliwych jednego równania różniczkowego zwyczajnego rzędu jakiegokolwiek z dwiema zmiennymi jest przypadkiem szczególnym daleko ogólniejszéj teoryi rozwiązań osobliwych układu jednoczesnych równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego, i z téj teoryi ogólniejszej daje się wyprowadzić sposobem o wiele jaśniejszym i ściślejszym.

W tej pracy Zajączkowski najpierw udowodnił istnienie rozwiązań osobliwych i pokazał, jaki związek zachodzi między rozwiązaniami osobliwymi i mnożnikiem Jacobiego układu jednoczesnych[2] równań oraz podał sposób wyprowadzenia rozwiązań osobliwych z rozwiązań zupełnych. Następnie przeanalizował własności geometrii (n + 1) wymiarowej i zaprezentował, jakie jest znaczenie geometryczne rozwiązań osobliwych układu jednoczesnych[3] równań różniczkowych rzędu pierwszego. W dalszym ciągu uogólnił twierdzenie Darboux o rozwiązaniach osobliwych i przedstawił sposób na wyprowadzenie rozwiązań osobliwych z samych równań różniczkowych. W ostatniej części pracy Zajączkowski, wykorzystując wyniki uzyskane w tej pracy, zastosował je do równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n-tego rozważanego w pracy *O całkach osobliwych zwyczajnych równań różniczkowych rzędu jakiegokolwiek* i w ten sposób uzupełnił wyniki uzyskane w tej pracy.

3.2. Praca Edwarda Skiby: *Przyczynek do teoryi strun*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie", t. III (1877)

Edward Władysław Skiba urodził się 24 września 1843 roku. Był fizykiem teoretykiem. Studiował w latach 1861–1862 matematykę i filozofię na Uniwersytecie Jagiellońskim, a od 1862 do 1867 studiował na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Szkoły Głównej Warszawskiej. Studia kontynuował w Heidelbergu. Po powrocie do kraju w 1869 roku uzyskał w UJ stopień dok-

[2] Tamże.
[3] Tamże.

tora filozofii na podstawie pracy *Z teorii zjawisk włoskowatości*. W 1970 roku na podstawie dwóch prac: *Teoria zjawisk włoskowatości* i *Krytyczne przedstawienie mechanicznej teorii ciepła* uzyskał stopień docenta fizyki teoretycznej i docenta mechaniki. Od 1872 roku był profesorem nadzwyczajnym i kierownikiem Katedry Fizyki Matematycznej UJ. Przeszedł na emeryturę w 1880 roku. Zmarł w Krakowie 13 grudnia 1911 roku. W czasie emerytury intensywnie pracował naukowo. Zajmował się mechaniką, termodynamiką i równaniami różniczkowymi.

Praca Edwarda Skiby pt. *Przyczynek do teoryi strun* była czytana na posiedzeniu Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Akademii Umiejętności w Krakowie 20 czerwca 1877 roku. Jej przedmiotem jest ścisłe wyprowadzenie równania struny – nieliniowe w pewnych szczególnych przypadkach. Ścisłe ogólne równanie struny wyprowadził Tadeusz Ważewski ponad 70 lat później, a mianowicie w latach czterdziestych XX wieku. Skiba poddaje krytyce wyprowadzenia równania struny uzyskane przez Gabriela Lamégo w *Leçons sur la théorie de l'élasticité des cors solides* i przez Gustava Roberta Kirchhoffa podane w *Vorlesungen über mathematische Physik*. Zarówno praca Lamégo, jak i Kirchhoffa zawierają zbyt wiele założeń i uproszczeń, które w rzeczywistości są spełnione dla równania struny tylko w nielicznych przypadkach. W swoim wyprowadzeniu równań struny Skiba uwzględnia oprócz drgań poprzecznych również drgania podłużne struny. Równania Lamégo i Kirchhoffa stają się szczególnymi przypadkami równania Skiby po dokonaniu pewnych dodatkowych założeń i uproszczeń.

3.3. Prace Alojzego Stodółkiewicza o równań różniczkowych zupełnych:

I. *Zastosowanie sposobu Bertranda do całkowania równania różniczkowego o różniczkach zupełnych z wielu zmiennymi*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie", t. VIII (1883),

II. *Całkowanie układów równań różniczkowych o różniczkach zupełnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie", t. VIII (1883),

III. *O dwóch szczególnych układach równań różniczkowych o różniczkach zupełnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie", t. XII (1886).

Ad I. W pracy *Zastosowanie sposobu Bertranda do całkowania równania różniczkowego o różniczkach zupełnych z wielu zmiennymi* („Comptes Rendus", vol. 83 [1876]) Stodółkiewicz uogólnił metodę Bertranda rozwiązywania równania zupełnego z 1876 roku na równania zupełne o dowolnej liczbie zmiennych. Teoria rozwiązywania takich równań poparta jest dwoma konkretnymi przykładami.

Ad II. Praca *Całkowanie układów równań różniczkowych o różniczkach zupełnych* zawiera metodę rozwiązywania układu równań różniczkowych zupełnych *n-m* równań różniczkowych postaci. Stodółkiewicz istotnie wykorzystuje w niej warunki całkowalności sformułowane w monografii Władysława Zajączkowskiego *Wykład nauki o równaniach różniczkowych* (Wyd.

Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu, Paryż 1877, s. 499). Teoria rozwiązywania rozważanych tu układów równań jest zilustrowana dwoma konkretnymi przykładami rachunkowymi.

Ad III. W pracy *O dwóch szczególnych układach równań różniczkowych o różniczkach zupełnych* Stodółkiewicz nawiązuje do pracy Paula Appella *Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires* („Comptes Rendus”, vol. 84 [1877]), w której autor podał ciekawy i zręczny sposób rozwiązania pewnego szczególnego układu równań różniczkowych zupełnych o *2n – 1* zmiennych niezależnych. Stodółkiewicz pokazał kolejne dwa układy równań różniczkowych zupełnych o *2n* zmiennych niezależnych, ogólniejszej postaci od układu Appena, które dają się rozwiązać metodą Applla.

3.4. Prace Wawrzyńca Żmurki, Jana Rajewskiego, Alojzego Stodółkiewicza o jednorodnych równaniach różniczkowych zwyczajnych liniowych rzędu drugiego o zmiennych współczynnikach:

I. Wawrzyniec Żmurko: *O całkowaniu równań różniczkowych linijnych rzędu drugiego o współczynnikach linijnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. VIII (1883),

II. A.J. Stodółkiewicz: *O całkowaniu równań różniczkowych linijnych rzędu drugiego, mających współczynniki linijne, przy pomocy kwadratur*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. IX (1884),

III. Jan Rajewski: *O całkowaniu równań różniczkowych linijnych rzędu drugiego, w postaci* $(c_2x^2 + b_2x + a_2)y'' + (b_1x + a_1)y' + a_0y = 0$, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. IX (1884).

Ad I. Przedmiotem pracy Żmurki *O całkowaniu równań różniczkowych linijnych rzędu drugiego o współczynnikach linijnych* jest rozwiązywanie równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego o współczynnikach liniowych postaci:
$(a_2 + x)y'' + (a_1 + b_1x)y' + (a_0 + b_0x)y = 0,$
$a_2y'' + (a_1 + x)y' + (a_0 + b_0x)y = 0,$
$a_2y'' + a_1y' + (a_0 + x)y = 0.$

Za pomocą stosownych podstawień powyższe równania różniczkowe zostają rozpisane na sześć przypadków. Następnie Żmurko analizuje je w kontekście rozwiązywania, dokonując uściśleń i usuwając pewne usterki (np. konieczność użycia szeregów rozbieżnych), którymi obciążone były prace matematyków próbujących wcześniej rozwiązywać równania liniowe o zmiennych współczynnikach. Sprawa wyznaczenia liniowo niezależnych rozwiązań szczególnych dla jednorodnych równań różniczkowych liniowych o zmiennych współczynnikach, czyli sprawa wyznaczenia układów fundamentalnych dla równań różniczkowych liniowych o zmiennych współczynnikach (poza nielicznymi przypadkami, jak np. zwyczajne liniowe równanie Eulera), do teraz jest sprawą nierozwiązaną i jeszcze dzisiaj stanowi przedmiot prac naukowych twórczych matematyków. Żmurko nawiązuje do tekstu Andrzeja Winklera opublikowanego w zeszycie styczniowym „Rocznika Cesarskiej Akademii

Umiejętności” z 1873 roku oraz do dwóch książek Szymona Szpitzera: *Studien über die Integration, linearer Differentialgleichungen* (1860) i *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen* (1878). Sam Żmurko tak charakteryzuje swoją pracę:

> […] Rezultaty w méj rozprawie uwidocznione w paragrafie 3. (34) (41) (42) zupełnie podobne do rezultatów zawartych w *Vorlesungen* etc. Zachodzi tylko ta dosadnia różnica, że moje wzory na mocy do skutku przeprowadzonego dowodna ostawanie się granic x i x' i dla argumentów z odjemnémi składnikami rzetelnémi – nie potrzebują już żadnych jakichkolwiek przysposobień, że moje wzory już bezpośrednio rozwiązują żądane równanie różniczkowe. Wskutek tego dowodu odpadają uciążliwe rozróżnienia równania różniczkowego na rozliczne przypadki według tego, czy składniki rzetelne argumentów A i A' są dodatniémi czy nie […].

Ad II. Praca Stodółkiewicza *O całkowaniu równań różniczkowych linijnych rzędu drugiego, mających współczynniki linijne, przy pomocy kwadratur* bezpośrednio nawiązuje do pracy Żmurki *O całkowaniu równań różniczkowych linijnych rzędu drugiego o współczynnikach linijnych*. Stodółkiewicz analizuje przypadki jednorodnych równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego o współczynnikach liniowych, które dają się rozwiązać poprzez kwadratury. Do pracy dołączony jest konkretny przykład rachunkowy.

Ad III. W pracy *O całkowaniu równań różniczkowych linijnych rzędu drugiego, w postaci* $(c_2x^2 + b_2x + a_2)y'' + (b_1x + a_1)y' + a_0y = 0$

Rajewski rozważa równanie różniczkowe liniowe o zmiennych współczynnikach postaci $(c_2x^2 + b_2x + a_2)y'' + (b_1x + a_1)y' + a_0y = 0$ i analizuje przypadki, w których to równanie różniczkowe daje się sprowadzić do równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego o współczynnikach liniowych rozważanych przez Żmurkę w pracy *O całkowaniu równań różniczkowych linijnych rzędu drugiego o współczynnikach linijnych*, którą omówiliśmy wyżej.

3.5. Prace Władysława Zajączkowskiego i Jana Rajewskiego o równaniach różniczkowych liniowych rzędu *m*-tego o współczynnikach zespolonych w dziedzinie zespolonej:

I. Władysław Zajączkowski: *Teoryja Fuchsa równań różniczkowych linijowych i jednorodnych z jedną zmienną niezależną*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie", t. IX (1887),

II. Jan Rajewski: *O całkach nieregularnych równań różniczkowych linijowych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie", t. XVII (1890).

Ad I. *Teoryja Fuchsa równań różniczkowych linijowych i jednorodnych z jedną zmienną niezależną* jest pracą o charakterze przeglądowym i dotyczy równań różniczkowych liniowych jednorodnych rzędu *m*-tego w dziedzinie zespolonej. Zajączkowski zdecydował się na jej publikację w trosce o spopularyzowanie najnowszych wyników w równaniach różniczkowych w dziedzinie zespolonej wśród matematyków polskich, gdyż ta tematyka była ówcześnie prawie w ogóle nieobecna w polu zainteresowań naukowych matematyków polskich. Praca ta wskazywała na nowy nurt w teorii równań różniczkowych. Coraz bardziej stawało się widoczne, że w teorii równań różniczkowych powinno chodzić nie tyle o kwadraturę danego równania różniczkowego, ile o wyprowadzanie z równania różniczkowego zachowania się i innych własności rozwiązań równań różniczkowych. Wyłaniała się tzw. jakościowa teoria równań różniczkowych. Sam Zajączkowski pisze o tym następująco:

> […] Te prace zainaugurowały nowy kierunek poszukiwań w dziedzinie równań różniczkowych i wywołały nader ożywiony ruch naukowy, osobliwie w Niemczech i we Francji. U nas ten nowy kierunek badań analitycznych zdaje się być mało znany; wszelkie bowiem prace z teoryi równań różniczkowych, jakie u nas pojawiły się w ostatnich latach, nie wyjmując najnowszych, są pisane w duchu dawnej metody i, nie stojąc na gruncie teoryi funkcyi zmiennej zespolonej, nie licują z obecnym stanem tego działu umiejętności matematycznych. Sądziłem więc, że będzie pożyteczna, gdy główniejsze wypadki, do jakich doszli geometrowie zagraniczni przynajmniej w teoryi równań różniczkowych liniowych zestawię, zestawione uporządkuję i trudności, jakżeby się napotkało przy czytaniu prac oryginalnych, wyświecę i ułatwię.
>
> Pracę niniejszą osnułem głównie na rozprawach podstawowych FUCHA, wszakże wprowadziłem wszystkie udoskonale-

> nia, jakie zawdzięczamy bądź to pracom późniejszym tego geometry, bądź też pracom innych geometrów, a w szczególności pracom FROBENIUSA, THOMÉGO i JORDANA, zamieszczonym w BORCHARDTA dzienniku; nadto wiele dowodzeń sam uprościłem. Szczęśliwym będę, jeżeli moje usiłowania przyczynią się do upowszechnienia tych nowych odkryć między naszymi matematykami i pobudzą ich do samodzielnej na tem polu pracy.

Ad II. Praca Rajewskiego *O całkach nieregularnych równań różniczkowych linijowych* jest niewątpliwie odpowiedzią na omawianą powyżej pracę przeglądową Zajączkowskiego o równaniach różniczkowych w dziedzinie zespolonej. Rajewski najpierw bada zachowanie się współczynników jednorodnego liniowego równania różniczkowego rzędu m-tego w otoczeniu punktów istotnie osobliwych rozwiązań szczególnych tego równania. Następnie zajmuje się wyznaczaniem postaci współczynników równania różniczkowego liniowego, którego rozwiązanie ogólne zawiera skończoną liczbę punktów osobliwych. W końcu podejmuje próby wyrażania postaci rozwiązań nieregularnych poprzez tzw. szeregi asymptotyczne lub w postaci przybliżonej, np. poprzez wielomiany.

4. Podsumowanie

Do końca lat trzydziestych XVIII wieku trwał etap początkowy rozwoju równań różniczkowych zwyczajnych[4]. W czasie tego etapu gromadzono materiał dotyczący rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, lecz rezultaty były przypadkowe i fragmentaryczne, a sformułowania problemów niezadowalająco ścisłe. Następny etap rozwoju równań różniczkowych, w czasie którego równania różniczkowe przekształciły się w odrębną dziedzinę analizy matematycznej, trwał około stu lat, gdzieś do lat czterdziestych XIX wieku. Wyróżnikiem tego etapu stały się cztery kierunki badań naukowych. Jednym z nich było poszukiwanie rozwiązań równań nieliniowych, które historycznie badano wcześniej niż równania liniowe[5]. Drugim kierunkiem badań była analiza równań i układów równań liniowych. Wreszcie trzecim kierunkiem było numeryczne (przybliżone) rozwiązywanie równań różniczkowych. Czwarty kierunek badań równań różniczkowych zwyczajnych stanowiło badanie rozwiązań osobliwych. Rozwiązanie osobliwe to takie, które nie daje się otrzymać z rozwiązania ogólnego przez specyfikację stałej dowolnej. Od lat dwudziestych XIX wieku gdzieś do połowy wieku XIX centralnymi problemami równań różnicz-

---

[4] R. Bujakiewicz-Korońska, J. Koroński, *Równania różniczkowe do końca XIX wieku*, Matematyka czasów Weierstrassa – Materiały XV Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2002, s. 125–140.

[5] Tamże.

kowych stały się problem jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych z warunkami początkowymi (ściśle powiązany z teorią rozwiązań osobliwych) oraz problem istnienia rozwiązań równań różniczkowych. Istotny wpływ na rozwój zagadnień granicznych dla równań zwyczajnych miało zainteresowanie się w połowie XIX wieku przez wielu wybitnych matematyków równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Wreszcie w drugiej połowie XIX i na początku XX wieku centralnymi zagadnieniami równań różniczkowych stały się problemy jakościowej teorii równań różniczkowych. Lata trzydzieste XX wieku przyniosły z jednej strony uogólnienie pojęcia pochodnej , a z drugiej gwałtowny rozwój analizy funkcjonalnej, co istotnie wpłynęło na podejście do teorii równań różniczkowych. W XX wieku pojawiły się różne rodzaje rozwiązań równań różniczkowych i różne rodzaje teorii tych samych równań różniczkowych.

Bibliografia

Bujakiewicz-Korońska R., Koroński J., *Równania różniczkowe do końca XIX wieku*, Matematyka czasów Weierstrassa – Materiały XV Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2002, s. 125–140.

Koroński J., *Władysław Zajączkowski (1837–1898) i jego monografia z równań różniczkowych*, „Antiquitates Mathematicae” 2009.

Rajewski J., *O całkowaniu równań różniczkowych linijnych rzędu drugiego, w postaci* $(c_2x^2 + b_2x + a_2)y'' + (b_1x + a_1)y' + a_0y = 0$, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. IX (1884).

Rajewski J., *O całkach nieregularnych równań różniczkowych linijowych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. XVII (1890).

Skiba E., *Przyczynek do teoryi strun*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. III (1877).

Stodółkiewicz A.J., *Zastosowanie sposobu Bertranda do całkowania równania różniczkowego o różniczkach zupełnych z wielu zmiennymi*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. VIII (1883).

Stodółkiewicz A.J., *Całkowanie układów równań różniczkowych o różniczkach zupełnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. VIII (1883).

Stodółkiewicz A.J., *O całkowaniu równań różniczkowych linijnych rzędu drugiego, mających współczynniki linijne, przy pomocy kwadratur*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. IX (1884).

Stodółkiewicz A.J., *O dwóch szczególnych układach równań różniczkowych o różniczkach zupełnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. XII (1886).

Śródka A., Szczawiński P., *Biogramy uczonych polskich. Materiały o życiu i działalności członków AU w Krakowie, TNW, PAU, PAN, cz. III (nauki ścisłe)*, Wyd. Polskiej Akademii Nauk, Wrocław–Warszawa–Kraków–Gdańsk–Łódź 1986.

Śródka A., *Uczeni polscy XIX–XX stulecia*, t. IV: *S–Ż*, Warszawa 1998.

Zajączkowski W., *O całkach osobliwych zwyczajnych równań różniczkowych rzędu jakiegokolwiek*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie", t. I (1874), s. 12.

Zajączkowski W., *Teoryja ogólna rozwiązań osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie", t. III (1877), s. 1–23.

Zajączkowski W., *Wykład nauki o równaniach różniczkowych*, Wyd. Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu, Paryż 1877, s. 904.

Zajączkowski W., *Teorya Fucha równań różniczkowych linijowych i jednorodnych z jedną zmienną niezależną*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie", t. XIII (1887), s. 1–47.

Żmurko W., *O całkowaniu równań różniczkowych linijnych rzędu drugiego o współczynnikach linijnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie", t. VIII (1883).

Prace z równań różniczkowych w „Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu"

Jan Koroński
Instytut Matematyki, Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki, Politechnika Krakowska

Papers on differential equations in the *Memoirs of the Natural Science Society in Paris*

Abstract

This paper concerns the general characteristics of the Natural Science Society in Paris and the *Memoirs of the Natural Science Society in Paris*. Moreover, in the context of the development of the theory of differential equations in the world, we present in this paper the articles of Y. Villarceau (1813), W. Zajączkowski (1837–1898) and W. Folkierski (1842–1904) on differential equations, which were published in *Memoirs of the Natural Science Society in Paris*.

Key words:

differential equations, *Memoirs of the Natural Science Society in Paris*, papers on differential equations in *Memoirs of the Natural Science Society in Paris*

1. Ogólna charakterystyka Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu i jego „Pamiętnika”

Po zamknięciu Szkoły Głównej Warszawskiej związanym z upadkiem powstania styczniowego (1863) Polacy przebywający na emigracji w Paryżu powołali do istnienia Szkołę Wyższą Polską zwaną Szkołą Montparnaską (była zlokalizowana przy bulwarze Montparnasse). Miała ona początkowo charakter zakładu dobroczynnego: swoim uczniom niejednokrotnie zapewniała nieodpłatnie naukę, zakwaterowanie i wyżywienie[1]. Miała zastąpić l’École Polytechnique osobom nieposiadającym obywatelstwa francuskiego, głównie Polakom. Nauczali w niej m.in. Henryk G. Niewęgłowski (1807–1881), Eduardo Juan Habich (1835–1909), Kazimierz Szulc (1869–1871), Adolf E. Sągajło (1806–1877) i Władysław Folkierski (1842–1904). W 1870 roku władze francuskie zamknęły szkołę. Po przymusowym zaprzestaniu działalności Szkoły Montparnaskiej w tym samym roku powstało w Paryżu Towarzystwo Nauk Ścisłych[2]. Jego głównym celem było publikowanie w języku polskim ory-

[1] J. Dianni, A. Wachułka, *Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1963.
[2] Tamże; W. Folkierski, *Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu*, „Prace Matematyczno-Fizyczne” 1895, nr 6, s. 151–175; Z. Pawlikowska-Brożek, *Matematyka*, [w:] *Zarys dziejów nauk przyrodniczych w Polsce*, red. J. Kuryłowicz, F.W. Sawicka, E. Szczepańska, E. Turyn, H. Wojdowska, Wiedza Powszechna, Warszawa 1983; „Studia i Materiały z Dziejów Nauki Polskiej”, seria C, z. 18, Warszawa 1974 (tom poświęcony Towarzystwu Nauk Ścisłych w Paryżu).

ginalnych prac naukowych i dydaktycznych polskich autorów[3]. Towarzystwo istniało do roku 1882 i wydało 12 tomów „Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu" zawierających prace około 40 autorów. Z inicjatywy Towarzystwa opublikowano także 18 tomów dzieł dydaktycznych. Tak obfity dorobek Towarzystwa był możliwy dzięki inicjatywie i finansowemu wsparciu wybitnego mecenasa nauk, Jana Kantego Działyńskiego (1829–1880). „Pamiętnik" zawiera głównie oryginalne prace polskich matematyków (działających zarówno w kraju, jak i na emigracji) z zakresu rachunku różniczkowego i całkowego, równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych, geometrii analitycznej, algebry wyższej z uwzględnieniem nowej wówczas teorii wyznaczników i teorii funkcji analitycznych. Drukowano tu również bardzo rozbudowane recenzje dzieł dydaktycznych. Ponadto sporadycznie publikowano wartościowe prace obcych matematyków, np. pracę habilitacyjną Bernharda Riemanna. Znaczna część prac wydrukowanych w „Pamiętnikach" dotyczyła fizyki, budownictwa, biologii i innych nauk przyrodniczych[4].

[3] W. Więsław, *Polskojęzyczne publikacje matematyczne po roku 1800. Rola wydawnictw „Wiadomości Matematycznych"*, [w:] *Matematycy polskiego pochodzenia na obczyźnie. Materiały konferencyjne z XI Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Kołobrzeg, 5–9 maja 1997*, red. S. Fudali, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 1998, s. 237–247.

[4] „Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. I–XII, Wydawnictwo Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, Paryż 1870–1881 (egzemplarze dostępne np. w Bibliotece Jagiellońskiej w Krakowie).

W Towarzystwie Nauk Ścisłych w Paryżu bardzo aktywnie działali pracujący na obczyźnie matematycy polscy, a wśród nich wspomniani już H.G. Niewęgłowski, A.E. Sągajło, W. Folkierski oraz Władysław Gosiewski (1844–1911). Gosiewski był bardzo płodnym matematykiem. W „Pamiętniku" opublikował kilka rozpraw z matematyki i teorii sprężystości, kierując później swe zainteresowania ku mechanice cząsteczkowej. W 1872 roku powrócił do kraju i zajął się pracą nauczycielską w szkolnictwie niższego szczebla i pracą biurową, skromnie korzystając dalej ze swego nieprzeciętnego talentu naukowego. Oprócz matematyków przebywających w Paryżu w „Pamiętniku" drukowali również swoje prace matematycy z czynnych ośrodków naukowych w kraju, m.in. Wawrzyniec Żmurko (1824–1889), Władysław Zajączkowski (1837–1898) i Władysław Kretkowski (pseudonim Trzaska) (1840–1914) ze Lwowa, Marian A. Baraniecki (1848–1895) z Warszawy oraz przebywający w Petersburgu Julian K. Sochocki (1842–1927).

Ciekawą formą działalności Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu było ogłoszenie dwóch konkursów. Jeden nosił tytuł *Krytyczne i umiejętne dzieł matematycznych Hoene-Wrońskiego najprostsze i najściślejsze ocenienie*, a drugi przeprowadzono w 1873 roku, wyznaczając nagrodę za opracowanie bibliografii piśmiennictwa polskiego dotyczącego matematyki, fizyki i ich zastosowań. Drugi konkurs nawiązywał do wydrukowanej nakładem Biblioteki Kórnickiej w 1873 roku w Krakowie *Bibliografii piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki, oraz ich zastosowań* Teofila Żebrowskiego (1800–1887), która zawierała chronologicznie opracowaną bibliografię do roku 1830. Trudu opracowania tego tematu po roku 1830 nikt się nie podjął do dnia dzisiejszego. Pierwszy konkurs także nie przyniósł oczekiwanych rezultatów. Poza konkursem opublikowano dwa artykuły: tłumaczenie pracy Arthura Cayleya z „Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics" z 1873 roku pt. *O twierdzeniu Wrońskiego* oraz powstały w wyniku reakcji na ten pierwszy tekst autorstwa Abla Transona *Uwagi nad objawem naukowym z powodu wzoru ogłoszonego przez Wrońskiego w 1812 r. i dowiedzionego przez Cayleya w 1873*. Oba artykuły dotyczą tzw. prawa najwyższego – tak nazwał Wroński (1778–1853) swoje twierdzenie, z którego wynika wiele szczegółowych twierdzeń i wzorów matematycznych. O znaczeniu twierdzenia Wrońskiego dla matematyki świadczy jeszcze jedna praca Transona pt. *Prawo szeregów Wrońskiego – jego foronomia*, która powraca do twierdzenia Wrońskiego, a także jedna z prac naukowych Stefana Banacha (1892–1945), który udowodnił pewne twierdzenie z analizy funkcjonalnej, korzystając z metody zawartej w dowodzie twierdzenia Wrońskiego.

2. Prace matematyczne w „Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu"

„Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu" zawiera ogółem 91 artykułów z zakresu matematyki, astronomii, fizyki, mechaniki technicznej, budownictwa, chemii, biologii, anatomii zwierząt, techniki i geografii. W tej liczbie 44 prace dotyczą matematyki z geometrią wykreślną, recenzjami dzieł dydaktycznych i notkami konkursowymi włącznie. Po odliczeniu pięciu prac obcych matematyków (Yvona Villarceau [1813–1883] – t. XII, Bernharda Riemanna [1826–1866] – t. IX, Abla Transona [1805–1876] – dwie prace w t. VIII i Arthura Cayleya [1821–1895] – t. IV) oraz czterech not konkursowych i trzech recenzji dzieł dydaktycznych pozostają 32 oryginalne prace z matematyki autorów polskich. Poniżej podajemy pełną listę artykułów dotyczących matematyki w poszczególnych tomach „Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu".

Tom I

1. W. Gosiewski: *O funkcyach jednorodnych i jednogatunkowych*
2. W. Żmurko: *Dowód na twierdzenie Hessego o wyznaczniku funkcyjnym*
3. W. Żmurko: *Przyczynek do teorii największości i najmniejszości funkcyj wielu zmiennych*
4. J.N. Franke: *O względnościach wykreślnych zachodzących między rzutami systemów geometrycznych*
5. W. Kretkowski – Trzaska: *O niektórych własnościach pewnego rodzaju funkcyj jednej zmiennej urojonej*
6. W. Kretkowski – Trzaska: *O pewnem zastosowaniu wyznaczników funkcyjnych*
7. W. Kretkowski – Trzaska: *O nakreśleniu do trzech kół danych leżących na powierzchni jednej kuli, czwartego koła stycznego leżącego na tejże powierzchni*

8. W. Gosiewski: *Rozbiór krytyczny dzieł p. G.H. Niewęgłowskiego; Studyum pierwsze Arytmetyka; Studyum dr[u]gie Geometrya*
9. Program przedstawionego do konkursu przez Towarzystwo Nauk Ścisłych zadania: *Ocenienie prac matematycznych H. Wrońskiego*
10. W. Gosiewski: *O funkcyjach jednoczesnych i jednogatunkowych – nota do twier. VI, Roz. II, 17*

Tom II

1. W. Gosiewski: *Kilka uwag o liczbie różnych wartości, jakie funkcya może przybierać w skutku przestawień zmiennych do niej wchodzących*
2. W. Kretkowski – Trzaska: *Kilka uwag tyczących się funkcyj wielowymiarowych*
3. W. Kretkowski – Trzaska: *Dowód pewnego twierdzenia tyczącego funkcyj wielowymiarowych okresowych*
4. A. Sągajło: *Rozbiór krytyczny dzieła p. Folkierskiego pt. Zasady rachunku różniczkowego i całkowego, Tom pierwszy, Rachunek różniczkowy*
5. W. Gosiewski: *Przegląd krytyczny dzieła p. G.H. Niewęgłowskiego pod tytułem: Trygonometrya etc.*

Tom III

1. W. Folkierski: *O równaniach różniczkowych częściowych jednoczesnych*

Tom IV

1. W. Puchewicz: *Teorya funkcyj zmiennej złożonej*
2. A. Cayley: *O twierdzeniu Wrońskiego*
3. Sprawozdanie z konkursu naznaczonego przez Towarzystwo Nauk Ścisłych: *Ocenienie prac matematycznych H. Wrońskiego*
4. Program przedstawionego do konkursu przez Towarzystwo Nauk Ścisłych zadania: *Ułożenie bibliografii piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki oraz ich zastosowań, od roku 1831 aż do najnowszych czasów*

Tom V

1. K. Maszkowski: *Perspektywa rzutowa jako wynik rzutów prostokątnych na płaszczyzny ukośnie względem siebie położone*

Tom VI

1. W. Zajączkowski: *O równaniu różniczkowem* $Xdx + X_1dx_1 + \ldots + X_ndx_n = 0$*, całkowalnem przez jedno równanie pierwotne*

Tom VII

1. K. Hertz, S. Dikstein: *Teorya liczb złożonych i ich funkcyj*
2. M.A. Baraniecki: *Rozwinięcie na ułamek ciągły stosunku dwóch całek eliptycznych pierwszego i drugiego gatunku*
3. M.A. Baraniecki: *O przedstawieniach wymiernych*
4. A. Sągajło: *Kilka zadań geometryi analitycznej wyłożonych podług najnowszych metod analizy nowoczesnej*

Tom VIII

1. M.A. Baraniecki: *Dowód jednego zasadniczego twierdzenia odnoszącego się do hypergeometrycznych funkcyj*
2. A. Sągajło: *Krótka wiadomość o przedniejszych poszukiwaniach analizy nowoczesnej nad kołem stycznem do trzech kół danych*
3. A. Transon: *Uwagi nad objawem naukowym z powodu wzoru ogłoszonego przez Wrońskiego w roku 1812 i dowiedzionego później przez p. Cayley w roku 1873*
4. A. Transon: *Prawo szeregów Wrońskiego (jego foronomia)*
5. M.A. Baraniecki: *Zasadnicze wnioski geometryczne z teoryi algebraicznej form kwadratowych podwójnych*

Tom IX

1. B. Riemann: *O hypotezach, które służą za podstawę geometrii, rozprawa p. Riemanna, przetłomaczona i objaśniona przypiskami przez S. Diksteina i W. Gosiewskiego*

Tom X

1. Sochocki: *Wyznaczanie stałych mnożników we wzorach dla linijnej transformacji funkcyi θ. – Sumy Gaussa i prawo wzajemności symbolów Legendre'a*
2. M.A. Baraniecki: *O tworzeniu systemu sprzężonego podstawień liniowych...*
3. M.A. Baraniecki: *O wyznaczaniu spólnych pierwiastków dwóch równań danych przy pomocy rugownika tych równań*
4. Władysław Kretkowski – Trzaska: *O mnożeniu funkcji kołowych i hiperbolicznych*

5. W. Kretkowski – Trzaska: *Dowód pewnego wzoru Lame'go*
6. M. Szystowski i A. Martynowski: *Rachunek wykreślny na płaszczyźnie*

Tom XI

1. K. Hertz: *O funkcjach nie mających pochodnych*
2. W. Żmurko: *Badania w dziedzinie nauki o równaniach oparte na poglądach analityczno-geometrycznych*

Tom XII

1. M. Szystowski: *Rachunek wykreślny na płaszczyźnie, Część II*
2. S. Rychlicki: *O przekształceniu kwadratowem*
3. W. Gosiewski: *O rożniczkowaniu i całkowaniu funkcji rzeczywistej jednej zmiennej niezależnej*
4. Władysław Kretkowski – Trzaska: *Rozwiązanie pewnego zadania z geometryi wielowymiarowej*
5. M.Y. Villarceau: *Zastosowanie teoryi wstaw wyższych rzędów do całkowania równań różniczkowych linijnych*
6. M.A. Baraniecki: *Ocena książki pod tytułem Algebra przez G.H. Niewęgłowskiego*

Z powyższej listy wynika, że w „Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu" opublikowało swoje prace 15 matematyków polskich i pięciu obcych. Rekordzistą okazał się W. Kretkowski (8 prac), na drugim miejscu jest M.A. Baraniecki (7 prac), na trzecim W. Gosiewski (6 prac). W dalszej kolejności można wymienić A. Sągajłę i W. Żmurkę, którzy ogłosili odpowiednio trzy i dwie prace. Pozostali polscy autorzy wydali po jednej pracy samodzielnej, a niektórzy dodatkowo po drugiej współautorskiej. Równaniom różniczkowym poświęcono trzy prace. Ich autorami są Folkierski, Zajączkowski i Villarceau. W dalszym ciągu omówimy bardziej szczegółowo prace z równań różniczkowych.

3. Praca Yvona Villarceau *Zastosowanie teoryi wstaw wyższych rzędów do całkowania równań różniczkowych linijnych*, „Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. XII, Paryż 1881

Tekst Villarceau jest jedyną pracą matematyczną w tomie dwunastym „Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu". Jest to tłumaczenie z języka francuskiego pracy *De la théorie des sinus des orders supérieurs à l'intégration des équations linéaires*, która była przedstawiona Francuskiej Akademii Nauk 5 kwietnia i 29 maja 1880 roku oraz na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu w dniu 4 czerwca 1880 roku. Jej autor był astronomem francuskim i rozważał problem zgięcia lunet podpartych w jednym miejscu. Takie trudności po inżyniersku rozwiązywano wówczas metodą kolejnych przybliżeń. Villarceau sprowadził rozwiązanie rozważanej kwestii do rozwiązania dwumiennego równania różniczkowego zwyczajnego o stałych współczynnikach rzędu czwartego. Rozwiązując to równanie, zauważył, że wykorzystując tzw. sinusy rzędów wyższych (według ówczesnej polskiej terminologii – wstawy rzędów wyższych), które rozważał 60 lat wcześniej polski matematyk Józef Maria Hoene-Wroński, rozwiązanie rozważanego równania różniczkowego można natychmiast wypisać w jawnej postaci. Następnie Villarceau przeniósł ten sposób rozwiązania na liniowe jednorodne dwumienne równania różniczkowe zwyczajne rzędu m-tego postaci:

$$\frac{d^m\eta}{dx^m} \pm r^m\eta = 0 \ ,$$

gdzie m jest dowolną liczbą naturalną większą lub równą dwa, a potem przedstawił metodę rozwiązywania dwumianowych liniowych niejednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych rzędu m-tego o stałych współczynnikach następującej postaci:

$$\frac{d^m\eta}{dx^m} \pm r^m\eta = V$$

metodą uzmienniania stałych. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego Villarceau uzyskuje w postaci:

$$\eta = C_0\phi_0 rx + C_1\phi_1 rx + C_2\phi_2 rx + \dots C_{m-1}\phi_{m-1}rx$$

gdzie

$$\phi_0 rx,\ \ \phi_1 rx,\ \ \phi_2 rx, \dots, \phi_{m-1}rx$$

oznaczają sinusy (wstawy) rzędu m – 1-go. Wskaźnik zero służy tu do oznaczenia kosinusa (według ówczesnej polskiej terminologii – dostawy).

Metoda Villarceau zaprezentowana w pracy *De la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations linéaires* wpisuje się w ogólny nurt poszukiwania przez wielu matematyków XVIII i XIX wieku postaci rozwiązania równania różniczkowego liniowego jednorodnego i niejednorodnego rzędu m-tego o stałych współczynnikach[5]. Dla rozwiązywania równań różniczkowych liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach zasadnicze znaczenie ma praca Leonharda Eulera z 1743 roku pt. *O całkowaniu równań różniczkowych wyższych rzędów*. Stosując podstawienie wykładnicze

$$y = e^{px},$$

Euler otrzymał wielomian charakterystyczny odpowiadający badanemu rozwiązaniu. W tej pracy przeanalizował on wszystkie przypadki pierwiastków wielomianu charakterystycznego, tj. oprócz różnych pierwiastków rzeczywistych uwzględnił również wielokrotne pierwiastki rzeczywiste i pierwiastki zespolone, przy czym posługiwał się podstawieniami postaci

$$y = e^{kx}u.$$

5 R. Bujakiewicz-Korońska, J. Koroński, *Równania różniczkowe do końca XIX wieku*, [w:] *Matematyka czasów Weierstrassa. Materiały XV Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Kołobrzeg, 28 maja – 2 czerwca 2001 roku*, red. S. Fudali, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2002, s. 125–140.

W ten sposób pomimo niedoprecyzowanego jeszcze ówcześnie pojęcia liniowej niezależności funkcji Euler uzyskał sposób na otrzymywanie ogólnych rozwiązań dla równań różniczkowych liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach. W 1753 roku podał pewien sposób rozwiązywania równań różniczkowych liniowych niejednorodnych o stałych współczynnikach. Sposób Eulera opiera się na zastosowaniu czynnika całkującego i kolejnego obniżania rzędu równania. Inny sposób, polegający na sprowadzeniu równania niejednorodnego do układu równań liniowych rzędu pierwszego, podał w 1750 roku Jean le Ronde d'Alembert. Wykazał on także później, że rozwiązanie ogólne równania różniczkowego liniowego niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania liniowego jednorodnego i jakiegokolwiek rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego. Problemem, jakie kombinacje liniowe tworzą rozwiązanie ogólne równania liniowego jednorodnego, zajmował się następnie Joseph Louis Lagrange i inni matematycy XIX wieku. Metodę wariacji stałych dla równań różniczkowych liniowych niejednorodnych wprowadził w 1777 roku Lagrange. W szczególnych przypadkach była ona znana matematykom dużo wcześniej. Euler zastosował tę metodę już w 1739 roku do rozwiązywania równania różniczkowego niejednorodnego rzędu drugiego. Metodę tę stosowali również Daniel Bernoulli, Pierre Simon de Laplace i ich następcy.

Wobec powyższych uwag o rozwoju metod rozwiązywania równań różniczkowych liniowych należy stwierdzić, że omawiana powyżej praca Villarceau o rozwiązywaniu pewnej szczególnej klasy równań różniczkowych liniowych niejednorodnych ma charakter przyczynkowy na tle rozwoju metod rozwiązywania równań różniczkowych liniowych rzędów wyższych i z jednej strony nawiązuje do aktualnego stanu wiedzy sprzed wieku, a z drugiej stosuje pewne pojęcia wprowadzone przez J.M. Hoene-Wrońskiego rozważane ponad 60 lat wcześniej. Zapewne ta druga okoliczność spowodowała, że praca Villarceau ukazała się drukiem w „Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu” w polskiej wersji językowej.

4.Praca Władysława Zajączkowskiego *O równaniu różniczkowem* $Xdx + X_1dx_1 + \ldots + X_ndx_n = 0$, *całkowalnem przez jedno równanie pierwotne*, „Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu”, t. VI, Paryż 1875

Władysław Zajączkowski był jednym z najwybitniejszych matematyków polskich XIX wieku. Studiował matematykę i fizykę na Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie, gdzie w 1861 roku uzyskał stopień doktora, a w 1862 habilitował się. Była to pierwsza habilitacja matematyczna w Polsce. Początkowo pracował na UJ, potem w Szkole Głównej w Warszawie, a ostatnie 21 lat życia spędził we Lwowie, gdzie od 1877 roku był profesorem zwyczajnym w ówczesnej Akademii Technicznej. Był autorem bardzo obszernej i pierwszej polskiej monografii z równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych wydanej przez Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu w 1877 roku. Wydał drukiem blisko 50 publikacji naukowych, w tym 10 książek naukowych i podręczników (skryptów) akademickich oraz kilka podręczników szkolnych wznawianych dwu- i trzykrotnie. W czasopismach matematycznych ogłosił ponad 25 prac naukowych[6].

W dalszym ciągu szczegółowo przeanalizujemy pracę Zajączkowskiego, która jest jedyną pracą matematyczną w tomie szóstym „Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu". Zajączkowski rozważa w niej warunki całkowalności równania różniczkowego postaci

$$(1)\ X dx + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n = 0,$$

w którym współczynniki $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ zależą od $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie jedna z tych zmiennych, a mianowicie np. zmienna x, jest zmienną zależną, a pozostałe są zmiennymi niezależnymi. Równanie pierwotne, o którym jest mowa w tytule, jest postaci

$$F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, C) = 0,$$

z dowolną stałą C i jest całką ogólną równania wypisanego w tytule pracy Zajączkowskiego. Omawiany tekst składa się z siedmiu części. W pierwszej Zajączkowski referuje, co w kwestii całkowania rozważanego równania zostało już zrobione

[6] Zob. J. Koroński, *Władysław Zajączkowski (1837–1898) i jego monografia z równań różniczkowych*, „Antiquitates Mathematicae" 2009.

przez innych matematyków. Na początku przytacza wyprowadzenie warunków całkowalności rozważanego równania otrzymane przez Eulera w *Institutiones calculi integralis* vol. III. Euler formułuje warunki konieczne i wystarczające całkowalności omawianego równania. Jeżeli mianowicie współczynniki tego równania spełniają następujące warunki:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} + X_k \frac{\partial X_i}{\partial x} - X_i \frac{\partial X_k}{\partial x} = 0,\ i = 1,2,\ldots,n-1,\ i < k \le n,$$

to rozważane równanie różniczkowe jest całkowalne i całka ogólna tego równania może być wyznaczona w następującej postaci tzw. równania pierwotnego:

$$F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, C) = 0.$$

W części drugiej Zajączkowski omawia metodę Eulera całkowania równania różniczkowego (1). W części trzeciej przedstawia pewne uproszczenie metody Eulera, którą zaproponował Natani w „Crelle Journal" (t. LVIII, s. 304). Chodzi o to, że w metodzie Eulera jest pewna niedogodność. Mianowicie kolejne równanie różniczkowe, do którego sprowadza się całkowanie równania danego, może być utworzone dopiero po scałkowaniu wszystkich równań poprzednich. Zajączkowski w tej kwestii pisze tak:

> Tę niedogodność można usunąć, gdy zamiast całki ogólnéj szukać będziemy całki nazwanéj przez Jacobiego (Crelle Journal,

tom LVII) główną, tj. gdy za stałą całkowania brać będziemy wartość początkową zmiennéj zależnéj, czyli wartość dowolną, którą zmienna zależna przyjmuje przy wartości szczególnéj na zmienną niezależną.

Część czwarta omawianej pracy Zajączkowskiego zawiera metodę Emila du Bois-Reymonda („Crelle Journal", t. LXX, s. 299–313), którą potem sprowadza do przypadku układu równań postaci:

$$dx = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i ,$$

do którego daje się sprowadzić równanie (1), co rozwinął A. Mayer („Mathematische Annalen", t. V, s. 418–470). Metodę Du Bois-Reymonda uogólnił Zajączkowski, jak sam o tym pisze, nie znając wtedy jeszcze pracy Mayera.

W ostatnich trzech częściach omawianej pracy Zajączkowski przechodzi do rozwiązań osobliwych. W części piątej czytamy:

> Prócz całki ogólnéj, zawierającéj jedną stałą dowolną, posiada uważane równanie niekiedy tak zwane rozwiązania osobliwe, przez które rozumiemy takie całki, które nie zawierają stałéj dowolnéj i nie mieszczą się w całce ogólnéj, tj. nie dają się otrzymać z całki ogólnéj przez podstawienie jakiéjś wartości szczególnéj za ilość stałą dowolną.

W tej części Zajączkowski omawia związek między całką ogólną postaci

$x = f(x_1, x_2, ..., x_n, C) = 0$, lub $F(x, x_1, x_2, ..., x_n, C) = 0$,

a rozwiązaniem osobliwym równania cząstkowego postaci:

$$dx = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i .$$

Związek ten jako pierwszy w przypadku dwóch zmiennych niezależnych podał Lagrange (*Leçons sur le calcul des fonctions*). W pracy Zajączkowskiego na temat rozwiązania osobliwego, gdy znana jest całka ogólna równania różniczkowego, czytamy:

> Aby przekonać się, czy jakaś całka, niezawierajaca w sobie stałéj dowolnéj, jest lub też nie jest rozwiązaniem osobliwém, dość tylko z całki ogólnéj wyrugować jedną zmienną za pomocą całki badanéj. Jeżeli wartość na C z wypadku rugowania wypływająca jest funkcyą pozostałych zmiennych, wtedy całka badana będzie rozwiązaniem osobliwém.

W szóstej części pracy Zajączkowski zajmuje się rozwiązaniami osobliwymi rozważanego równania

$$dx = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i ,$$

gdy nie jest znana postać całki ogólnej tego równania różniczkowego. Formułuje i udowadnia następujące twierdzenie:

„*Jeżeli*

$$y = y(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

jest całką równania różniczkowego

$$dx = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i,$$

zawierającą w sobie zmienną x, i jeżeli toż równanie różniczkowe zamieni się na

$$dy = \sum_{i=1}^{n} Y_i dx_i,$$

gdy w niém za x wprowadzimy y za pomocą związku

$$y = y(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

natenczas całka y = 0 *będzie lub też nie będzie rozwiązaniem osobliwém, według tego, czy przy wartości* y = 0 *wraz z funkcyami Y przynajmniéj jedna z całek*

$$\int_0^y \frac{dy}{Y_i}, i = 1,2,\ldots,n,$$

wziętych cząstkowo względem y, przywiedzie się do zera lub też nie”.

Twierdzenie to jako pierwszy w przypadku równań rzędu pierwszego z dwiema zmiennymi niezależnymi udowodnił Augustin Louis Cauchy (Moigno, *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*, vol. II, s. 445). Dowód zawarty w omawianej pracy jest uogólnieniem dowodu dla twierdzenia Cauchy’ego, jaki podał George Boole (*Treatise on differential equations*, [w:] *Supplementary volume*, s. 28). Dowód ten jest oryginalnym wynikiem Zajączkowskiego i jest niewątpliwie interesującym przyczynkiem w teorii równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu.

W ostatniej, siódmej części pracy Zajączkowski rozważa zagadnienie wyprowadzenia rozwiązania osobliwego z samego równania różniczkowego. Uogólnił tu znany wynik Eulera (*Institutiones calculi integralis*, vol. I, problema 72) z przypadku dwóch na przypadek wielu zmiennych niezależnych. Udowodnił następujące twierdzenia:

I. „*Jeżeli* $y = 0$ *jest rozwiązaniem osobliwém równania*

$$dy = \sum_{i=1}^{n} Y_i dx_i ,$$

wtedy równanie $y = 0$ *uczyni zadość przynajmniéj jednemu z pomiędzy n równań*

$$\frac{\partial y_i}{\partial y} = \infty, i = 1,2,\ldots,n.”$$

oraz

II. „*Rozwiązanie osobliwe równania różniczkowego*

$$dx = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i ,$$

zawierające w sobie zmienną x, uczyni zadość przynajmniéj jednemu z pomiędzy n równań warunkowych:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x} = \infty, i = 1,2,\ldots,n.\text{"}$$

Z ostatniego twierdzenia wynika, że rozwiązanie osobliwe równania różniczkowego postaci

$$Xdx + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n = 0,$$

(które można sprowadzić do równania), $dx = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i$

spełnia przynajmniej jeden z następujących warunków:

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{X_i}{X_h}\right) = \infty,\ h = 0,1,2,\ldots,n-1,\ h < i \le n.\text{"}$$

Powyższe twierdzenia znał już Laplace, który wyprowadził je poprzez rozwinięcia w szeregi, jak to można przeczytać w pracy Louisa Houtaina *Des solutions singulières des équations différentielles*. Zajączkowski uzyskał powyższe twierdzenia w bardziej elegancki sposób.

5. Praca Władysława Folkierskiego *O równaniach różniczkowych częściowych jednoczesnych*, „Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu”, t. III, Paryż 1872

Władysław Folkierski studiował inżynierię w Szkole Politechnicznej w Karlsruhe i w Paryskiej Szkole Dróg i Mostów. Studiował również nauki ścisłe na Sorbonie i w Collège de France, gdzie uzyskał licencjat z nauk matematycznych i fizycznych. Był sekretarzem Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu oraz redaktorem tamtejszych „Pamiętników”. W latach 1868–1871 wykładał mechanikę w Szkole Montparnaskiej. Następnie od 1873 roku przez 15 lat pracował w Peru przy budowie kolei i fortyfikacji. Był profesorem mechaniki na Uniwersytecie w Limie, gdzie otrzymał doktorat honorowy. Kilkanaście lat przed śmiercią powrócił do kraju, zatrzymując się po drodze w Paryżu i podejmując bezskuteczne starania o katedrę w Szkole Politechnicznej we Lwowie. Na uwagę zasługują dwa tomy *Zasad rachunku różniczkowego całkowego*, które wydał w 1870 i 1873 roku. Poszerzone wydanie drugie tego dzieła ukazało się w serii *Biblioteka Matematyczno-Fizyczna* w Warszawie w 1904 (tom I) i 1909 (tom II) roku. Folkierski swoje prace publikował w „Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu” (jeden artykuł) i w „Roczniku Inżynierskim” w Peru. W tomie trzecim „Pamiętnika” znajduje się jego praca dotycząca równań różniczkowych. Jest ona dosyć obszerna (liczy 30 stron) i zawiera bardzo skomplikowaną symbolikę, przez co nie jest łatwa w czytaniu. Dobrze charakteryzuje ją wstęp napisany przez samego autora, który zacytujemy w całości:

> Równania o różniczkach częściowych pozostają do téj pory najważniejszém, a dziś jeszcze w zupełności nierozwiązanem zadaniem analizy. Wszelki postęp, jaki nauka na téj drodze uczynić może, pominiętym być nie powinien: każde nieledwie nowe równanie przez scałkowanie pociąga za sobą rozwiązanie całego szeregu zadań mechaniki, fizyki, geometryi, wstrzymane niedostatkiem ogólnych metod całkowania tego rodzaju równań. Zadania mechaniki i będącéj dalszém jéj zastosowaniem fizyki matematycznéj sprowadzają się zwykle do układu równań zwanych jednoczesnemi (symultanées); jeżeli liczba zmiennych wchodzących w te równania jest o jedność większą niż liczba równań, w takim razie jedna z tych zmiennych może być wziętą za zmienną niezależną, inne będą jéj funkcyami, a zadanie zostanie sprowadzoném do scałkowania równania o jednéj zmiennéj niezależnéj takiego rzędu, jaka jest liczba równań, za pomocą znanych sposobów rachunku całkowego.
>
> Jeżeli liczba zmiennych wchodzących w układ równań jednoczesnych przewyższa liczbę równań o więcéj niż o jedność, zadanie zostaje więcéj złożoném: zadanie to jest przedmiotem pierwszéj części niniéjszego artykułu. Było już ono traktowaném przez wielu pierwszorzędnych uczonych: Jacobi podał w nieśmiertelnéj swéj pracy o równaniach różniczkowych twierdzenie [Metoda novus aequaationum differentialium partialium inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi], którego

wnioskiem jest sposób całkowania powyższego rodzaju równań w pewnych przypadkach. P. Clebsch także dotknął pierwszéj części tego zadania [Über das Pfaffsche Problem] przy okoliczności innego zadania, zwanego zadaniem Pfaffa. Równocześnie Boole, znakomity matematyk angielski, podał te same prawie wypadki odmiennym nieco sposobem [On the differential Equations].

Stosując metodę Jacobiego do ogólnie postawionego zadania, otrzymałem kilka twierdzeń, które w bardzo prosty, od razu zastosować się dający sposób, rozwiązują je we wszystkich przypadkach, w których rozwiązanie to można sprowadzić do równań różniczkowych zwyczajnych. Gdy już praca ta ukończoną i kilku uczonym francuskim komunikowaną była, w rok później P. Clebsch ogłosił zastosowanie téjże metody Jacobiego do tegoż samego zadania [Ueber die simultane Integration linearer part. Differentialgleichungen]. Odmienną nieco drogą dochodzi on do tych samych prawie wypadków: podaję jednak swoje w pierwotnéj całości, bo droga, jakiéj użyłem, zdaje mi się naturalniéjszą i przystępniejszą; pozostaje przy tem parę nowych twierdzeń, a wszystko służyć może jako wstęp do drugiéj części tego artykułu.

W téj drugiej części stosuję otrzymane wypadki do równań różniczkowych częściowych wyższych rzędów od pierwszego; zastosowania tego nie znalazłem w powyżéj wymienionych pracach, podaję je więc jako zupełnie nowe.

6. Podsumowanie

Lata siedemdziesiąte i osiemdziesiąte XIX wieku w rozwoju równań różniczkowych były czasem, kiedy zakończył się etap początkowy rozwoju równań różniczkowych zwyczajnych, który trwał do końca lat trzydziestych XVIII wieku, nadal kontynuowano kolejny etap rozwoju równań różniczkowych, a jednocześnie rozpoczynał się kolejny – trzeci już etap rozwoju równań różniczkowych[7]. W czasie etapu początkowego gromadzono materiał dotyczący rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, lecz rezultaty były przypadkowe i fragmentaryczne, a sformułowania problemów niezadowalająco ścisłe. Następny etap rozwoju równań różniczkowych, w czasie którego równania różniczkowe przekształciły się w odrębną dziedzinę analizy matematycznej, trwał około stu lat, gdzieś do lat czterdziestych XIX wieku. Punktem zwrotnym w teorii równań różniczkowych były rezultaty otrzymane przez Mariusa Sophusa Lie (1842–1899), który w 1873 roku zastosował do równań różniczkowych żywo rozwijającą się wtedy teorię grup ciągłych przekształceń. W ten sposób Lie uzyskał ogólną metodę obejmującą rozmaite, na pozór zupełnie inne i przypadkowe sposoby sprowadzania różnych typów równań różniczkowych zwyczajnych do równań całkowalnych przez kwadratury. Dzięki temu zbadał wiele typów równań różniczkowych, którym odpowiadają stosowne przekształcenia ciągłe. Doprowadziło to w konsekwencji do

[7] R. Bujakiewicz-Korońska, J. Koroński, dz. cyt.

możliwości klasyfikowania równań różniczkowych w zależności od odpowiadających im przekształceń infinitezymalnych. Wreszcie w drugiej połowie XIX i na początku XX wieku centralnymi zagadnieniami równań różniczkowych zwyczajnych stały się problemy jakościowej teorii równań różniczkowych.

Z końcem lat czterdziestych XVIII wieku nastąpił gwałtowny rozwój równań różniczkowych cząstkowych, tzw. równań fizyki matematycznej, które następnie badano intensywnie przez kolejne dwa stulecia i które miały istotny wpływ na rozwój zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych. Centralnym problemem XIX wieku w równaniach różniczkowych cząstkowych były zagadnienia graniczne dla równań fizyki matematycznej, w szczególności teoria przewodnictwa cieplnego. W związku z tym rozwinęła się teoria potencjału jako nowa możliwość konstrukcji rozwiązań rozważanych zagadnień granicznych dla równań różniczkowych cząstkowych. Trzeba tu zauważyć, że precyzyjnie zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace'a rozwiązał dopiero Henri Poincaré (1854–1912) w 1890 roku. Również istotne rezultaty dla rozwoju zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a na przełomie XIX i XX wieku osiągnął Stanisław Zaręba (1863–1942). W 1842 roku Cauchy i niezależnie od niego w 1874 roku Zofia Kowalewska wykazali, że zagadnienie Cauchy'ego (używając współczesnej terminologii) dla równań różniczkowych cząstkowych jest lokalnie jednoznacznie rozwiązywalne w klasie funkcji analitycznych. Potem Siméon Poisson dla przypadku dwuwymiarowego i Gustav Kirchhoff (1824–1887) w przypadku przestrzeni trójwymiarowej, przy zwykłych założeniach regularnościowych, wykazali, że zagadnienie Cauchy'ego dla równania falowego jest lokalnie jednoznacznie rozwiązywalne. Rozwiązania te wyrażają się poprzez wzory całkowe Poissona i Kirchhoffa i są odpowiednikami wzoru d'Alemberta dla przypadku jednowymiarowego przestrzennie równania struny[8].

Na tle zarysowanego powyżej stanu rozwoju równań różniczkowych w świecie nasuwają się następujące wnioski w kontekście analizowanych wcześniej prac z równań różniczkowych opublikowanych w „Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu":

1. Praca Yvona Villarceau *Zastosowanie teoryi wstaw wyższych rzędów do całkowania równań różniczkowych linijnych* („Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. XII, Paryż 1881) jest małoznaczącym przyczynkiem z punktu widzenia rozwoju idei równań różniczkowych zwyczajnych, gdyż sposób szukania rozwiązań szczególnych dla równań różniczkowych liniowych jednorodnych podał sto kilkadziesiąt lat wcześniej (w 1743 roku) Euler, a metodę wariacji stałych dla równań różniczkowych liniowych niejednorodnych wprowadził w 1777 roku Lagrange.

2. Praca Władysława Zajączkowskiego *O równaniu różniczkowem* $Xdx + X_1dx_1 + ... + X_ndx_n = 0$, *całkowalnem przez jedno równanie pierwotne* („Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. VI, Paryż 1875) jest istotnym i interesują-

[8] Tamże.

cym przyczynkiem do teorii równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. W tej pracy Zajączkowski nie tylko dokonuje przeglądu głównych rezultatów dotyczących teorii rozważanej klasy równań cząstkowych rzędu pierwszego, ale uogólnia pewne rezultaty swoich poprzedników, uzyskując oryginalne twierdzenia ściśle i elegancko udowodnione. W ogóle rozważana tutaj paca Zajączkowskiego, jak i inne jego artykuły, jest napisana jasno i niemal współczesnym językiem. Ta uwaga odnosi się również do jego obszernej, 900-stronicowej monografii z równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych.

3. Praca Władysława Folkierskiego *O równaniach różniczkowych częściowych jednoczesnych* („Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. VI, Paryż 1875) jest również interesującym przyczynkiem w teorii równań różniczkowych cząstkowych. Jej autor w pierwszej części referuje wyniki swoich poprzedników odnoszące się do równań cząstkowych rzędu pierwszego i podaje niezależnie od nich pewne oryginalne twierdzenia, uzyskane niemal równocześnie i niezależnie od podobnych wyników Clebscha w kontekście metody Jacobiego. Wyniki Folkierskiego zawierają również nowe twierdzenia nieznane Clebschowi, a twierdzenia, które zawarł także Clebsch w swojej pracy wydrukowanej rok wcześniej, u Folkierskiego uzyskane są w inny, naturalniejszy sposób. Druga część pracy Folkierskiego zawiera pewne zupełnie nowe wyniki dla równań cząstkowych rzędu wyższego niż jeden. Rezultaty te otrzymał on, stosując twierdzenia uzyskane w pierwszej części swojej pracy.

Zarówno praca Zajączkowskiego, jak i Folkierskiego nawiązywały do aktualnie rozważanej w świecie problematyki z równań cząstkowych. Obie zawierały nowe wyniki. Ich znaczenie było niewątpliwie ograniczone przez to, że obie wyszły drukiem w języku polskim i nie wnosiły jakichś przełomowych idei do równań różniczkowych.

Powyższe informacje skłaniają autora niniejszego opracowania do sformułowania konkluzji, że poziom równań różniczkowych w Polsce w drugiej połowie XIX wieku nie był taki zły, jak to się do tej pory wydawało. Być może i w innych dziedzinach matematyki mamy zapomnianych wybitnych matematyków polskich, którzy są autorami wartościowych i mało znanych prac. Ten stan rzeczy należy zmienić. Można to osiągnąć tylko wtedy, gdy specjaliści z określonych dziedzin matematyki zechcą poświęcić troszkę swojego czasu na przeglądnięcie i skomentowanie dziewiętnastowiecznych wyników swoich poprzedników.

Bibliografia

Bujakiewicz-Korońska R., Koroński J., *Równania różniczkowe do końca XIX wieku*, [w:] *Matematyka czasów Weierstrassa. Materiały XV Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Kołobrzeg, 28 maja – 2 czerwca 2001 roku*, red. S. Fudali, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2002, s. 125–140.

Dianni J., Wachułka A., *Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1963.

Folkierski W., *Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu*, „Prace Matematyczno-Fizyczne” 1895, nr 6, s. 151–175.

Folkierski W., *O równaniach różniczkowych częściowych jednoczesnych*, „Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu”, t. III, Paryż 1872.

Koroński J., *Władysław Zajączkowski (1837–1898) i jego monografia z równań różniczkowych*, „Antiquitates Mathematicae” 2009.

Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, t. I–XII, Wydawnictwo Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, Paryż 1870–1881 (egzemplarze dostępne np. w Bibliotece Jagiellońskiej w Krakowie).

Pawlikowska-Brożek Z., *Matematyka*, [w:] *Zarys dziejów nauk przyrodniczych w Polsce*, red. J. Kuryłowicz, F.W. Sawicka, E. Szczepańska, E. Turyn, H. Wojdowska, Wiedza Powszechna, Warszawa 1983.

„Studia i Materiały z Dziejów Nauki Polskiej”, seria C, z. 18, Warszawa 1974 (tom poświęcony Towarzystwu Nauk Ścisłych w Paryżu).

Więsław W., *Polskojęzyczne publikacje matematyczne po roku 1800. Rola wydawnictw „Wiadomości Matematycznych”*, [w:] *Matematycy polskiego pochodzenia na obczyźnie. Materiały konferencyjne z XI Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Kołobrzeg, 5–9 maja 1997*, red. S. Fudali, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 1998, s. 237–247.

Villarceau Y., *Zastosowanie teoryi wstaw wyższych rzędów do całkowania równań różniczkowych linijnych*, „Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. XII, Paryż 1881.

Zajączkowski W., *O równaniu różniczkowem* $Xdx + X_1dx_1 + \ldots + X_ndx_n = 0$ *całkowalnem przez jedno równanie pierwotne*, „Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. VI, Paryż 1875.

Dlaczego chrześcijańska wiara nie jest zabobonem

Recenzja książki: Michał Heller, Tadeusz Pabjan, *Stworzenie i początek wszechświata*, Copernicus Center Press, Kraków 2013, s. 177.

W wydanej nakładem Copernicus Center Press w 2013 roku książce *Stworzenie i początek wszechświata* Michał Heller i Tadeusz Pabjan starają się pokazać, że wiara w stworzenie świata przez Boga nie musi być sprzeczna „z naukowym obrazem świata" – ze światopoglądem opartym na teoriach nauk o wszechświecie i życiu.

Dla rozwoju dyskusji na temat relacji między nauką a religią ta próba jest o tyle cenna, że nie ogranicza się do „dopasowania" jednej wizji do drugiej (np. poprzez konkordyzm, czyli takie interpretowanie Biblii, by pasowała do teorii naukowych), nie polega też na szukania uchybień w którymś z tych światopoglądów (np. poprzez głoszenie teorii Inteligentnego Projektu) ani na stosowaniu wybiegu zwanego „Bogiem luk" (*God of the Gaps*) – tłumaczenia boską interwencją aspektów rzeczywistości, których obecnie nie potrafimy wyjaśnić w naturalistyczny sposób.

Takie podejścia raczej zamykają dyskusję na temat relacji nauki i religii, podczas gdy książka Hellera i Pabjana tę dyskusję otwiera. Autorzy *Stworzenia i początku wszechświata* pokazują bowiem, po pierwsze, w jaki sposób można interpretować Księgę Pisma (opis stworzenia zawarty w Księdze Rodzaju), by nie sugerowała wniosków sprzecznych z tym, co głoszą nauki; a po drugie przekonują, że teistyczna interpretacja Księgi Przyrody (matematycznych praw przyrody) nie prowadzi do sprzeczności – i jest przynajmniej tak samo uprawniona jak interpretacja ateistyczna. To oczywiście nie rozwiązuje wszystkich problemów w dyskusji na temat relacji nauki i religii, ale przynajmniej pozwala ustanowić obiecujący punkt wyjścia.

Książka napisana jest w taki sposób, by mogła trafić do szerokiego grona odbiorców zainteresowanych tematyką lub zmagających się z nią w pracy duszpasterskiej czy dydaktycznej. Wiele mogą z niej dowiedzieć się osoby, które są laikami w omawianych zagadnieniach, ale nawet dla specjalistów może być cenną lekturą, jeżeli spojrzy się na nią w szerszym kontekście, wyznaczonym przede wszystkim przez inne książki Michała Hellera.

W pierwszych trzech rozdziałach autorzy skupiają się na przekonywaniu, że początek Księgi Rodzaju nie powinien być odczytywany dosłownie, jako traktat filozoficzny lub praca naukowa, a także wymieniają teologiczne argumenty za metaforyczną interpretacją tego fragmentu Biblii. Krótka analiza historyczno-literacka przekonuje, że zawarty w Księdze Rodzaju traktat o stworzeniu jest poematem posiadającym odpowiednią konstrukcję, która ułatwiała zapamiętywanie i ustne przekazywanie treści, zanim zostały one spisane. To, co w tym fragmencie teologicznie najistotniejsze, to nie długość procesu stworzenia ani kolejność stwarzanych ciał niebieskich, sił przyrody czy organizmów, lecz raczej tezy o stworzeniu świata przez Boga, zależności stworzenia od Stwórcy i uprzywilejowanym statusie człowieka.

Taka interpretacja Księgi Rodzaju polskim czytelnikom nie powinna wydawać się kontrowersyjna, ale z pewnością warto ją w książce takiej jak *Stworze-*

nie i początek wszechświata zamieścić. Choćby dlatego, że już w niektórych środowiskach protestanckich, wyznających tzw. naukowy kreacjonizm, zakrawałaby na herezję. W tekstach kreacjonistów można np. natrafić na tak absurdalne rozważania jak to, czy rdzenni mieszkańcy Australii widywali dinozaury lub w jaki sposób różne gatunki dinozaurów zmieściły się do Arki Noego (to akurat proste – na pokład weszły młode osobniki, nie tak duże jak dorosłe[1]). Jak widać m.in. z tych przykładów, dosłowne odczytywanie Biblii może prowadzić do ośmieszenia głoszonych w niej poglądów – co przewidział już św. Augustyn, zalecając, by chrześcijanie sprawdzali, czy interpretacje Pisma Świętego nie stoją w sprzeczności z dobrze uzasadnionymi twierdzeniami naukowymi, a jeżeli tak jest, powinny zostać jeszcze raz przemyślane. Heller i Pabjan są oczywiście wielkimi zwolennikami tej zasady, przy czym znają umiar w jej stosowaniu – to znaczy rozumieją, na czym polega dobre uzasadnienie twierdzeń naukowych.

To rozumienie przejawia się m.in. w tym, że Heller i Pabjan nie popełniają filozoficznych nadużyć w obronie światopoglądu teistycznego, jakich niewątpliwie dokonują (mniej lub bardziej świadomie) znani popularyzatorzy światopoglądu ateistycznego, tacy jak np. Richard Dawkins i Stephen Hawking. Obydwaj ci znakomici uczeni sugerują, że nauka nie potrzebuje hipotezy Boga – albo dlatego, że świat całkowicie wyjaśnia się sam (jak twierdzi Hawking, to prawa fizyki są odpowiedzią na pytanie, dlaczego istnieje raczej coś niż nic –

[1] Zob. *Were Dinosaurs on Noah's Ark?*, http://creation.com/were-dinosaurs-on-noahs-ark-welcome-afa-journal-subscribers

wyjaśniają, w jaki sposób wszechświat powstał z nicości[2]), albo dlatego, że jednoczesne przyjęcie istnienia Boga, zwłaszcza jego wszechwiedzy, jak i akceptacja teorii naukowych, zwłaszcza opartej na przypadkowości teorii ewolucji, prowadzi do paradoksów (jak argumentuje Dawkins).

Odpierając argumenty Hawkinga, Heller i Pabjan zwracają uwagę na to, że autor *Krótkiej historii czasu* i *Wielkiego Projektu* posługuje się prymitywnym rozumieniem stworzenia świata – dokładnie takim, jakie sami skrytykowali w początkowych rozdziałach swojej książki. Jak piszą:

> Jeśli pamięta się o tym, że Bóg jest przyczyną sprawczą, która poprzedza świat, ale niekoniecznie w sensie czasowym, to nie ma znaczenia to, czy cały świat nie ma początku, bo istnieje odwiecznie (jak sądzili starożytni), czy też nie ma początku, bo sam jest czymś wtórnym (jak uważa Hawking). Stworzenie należy rozumieć jako radykalną zależność (o charakterze ontycznym) od Boga, który jest przyczyną istnienia świata. Na zależność tę nie mają wpływu żadne własności modeli kosmologicznych i nie zmienia jej również samozwartość modelu Hartle'a-Hawkinga. (…) Interpretację Hawkinga można co najwyżej potraktować jako argument przeciwko dyskutowanej powyżej metodzie „Boga od zapychania dziur" w naukowej wiedzy o świecie[3].

Heller i Pabjan podkreślają w dodatku, że Hawking, poza błę-

[2] Zob. S. Hawking, L. Mlodinow, *Wielki Projekt*, przeł. J. Włodarczyk, Wydawnictwo Albatros, Warszawa 2011.

[3] M. Heller, T. Pabjan, *Stworzenie i początek wszechświata*, dz. cyt., s. 113–114.

dem teologicznym – zbyt wąskim rozumieniem koncepcji stworzenia – popełnia również błąd filozoficzny: zakłada, że przed zaistnieniem wszechświata musiały funkcjonować prawa przyrody. Innymi słowy: w koncepcji Hawkinga wszechświat nie powstaje z nicości – powstaje z istniejących odwiecznie praw przyrody. Właściwie z taką myślą Heller i Pabjan byliby się skłonni zgodzić, przy czym oni sami nadają temu odwiecznemu istnieniu praw przyrody teistyczną interpretację – utożsamiają je z Bożym Zamysłem (*The Mind of God*, określenie pochodzące od Einsteina). To oczywiście przejaw koncepcji Wielkiej Matrycy, najpełniej zaprezentowanej przez Michała Hellera w *Filozofii przypadku*[4].

Koncepcja Wielkiej Matrycy pozwala rozprawić się również z podstawową argumentacją Richarda Dawkinsa, który sądzi, że przypadki, odgrywające fundamentalną rolę w biologicznej ewolucji (mutacje genetyczne, będące źródłem zmienności wśród organizmów, są przypadkowe), nie są do pogodzenia z koncepcją boskiego planu stworzenia wszechświata. Wielką Matrycę – będącą efektem Bożego Zamysłu – tworzy siatka deterministycznych praw przyrody, które żeby mogły jednak zadziałać, muszą zostać obdarzone warunkami początkowymi – indeterministycznymi z perspektywy danego prawa przyrody. Przypadki odgrywają zatem istotną w Matrycy (czyli w Bożym Zamyśle) rolę warunków początkowych, dlatego, jak piszą Heller i Pabjan, „wszechświat może być stworzony przez Boga i zarazem nie wykluczać działania

[4] Zob. M. Heller, *Filozofia przypadku*, Copernicus Center Press, Kraków 2013, rozdz. 15: *Inteligentny Projekt czy Zamysł Boga?*

przypadków. Innymi słowy: Bóg może stworzyć wszechświat, wykorzystując do tego celu zdarzenia przypadkowe”[5].

Osobnym zagadnieniem jest to, że książka *Stworzenie i początek wszechświata* pokazuje, jak wiele pracy czeka współczesnych teologów. Mimo odparcia głównych, filozoficznych zarzutów ze strony Hawkinga czy Dawkinsa, mimo zaproponowania sposobu pogodzenia teistycznego światopoglądu z wiedzą naukową, bez odwoływania się do konkordyzmu, kreacjonizmu i „Boga od zapychania dziur”, na rozwiązanie oczekuje wiele problemów szczegółowych. Pojawia się na przykład pytanie, czy teologia gotowa jest pogodzić boski zamysł z perspektywą biologiczną – przyrodą będącą areną zmagań genów o ich nieśmiertelność. Jak uzasadnić to, że doskonały Stwórca w swoim dziele stworzenia posługuje się tak okrutnymi prawami natury, jak konieczność walki o przetrwanie? Czy droga do człowieczeństwa – jeden z najważniejszych elementów procesu stworzenia – miałaby, przynajmniej w istotnej części, wieść poprzez wyścig zbrojeń oszustów i oszukiwanych (tzw. hipoteza makiawelicznej inteligencji)? Co z wartościami etycznymi i moralnymi, co z wielością religii, skoro wszystko jest produktem ewolucji biologiczno-kulturowej? Bez wątpienia Heller i Pabjan pokazują, jak pogodzić wiarę w stworzenie świata przez Boga i wiedzę naukową, ale oczywiście nie zamykają dyskusji pomiędzy światopoglądem teistycznym i naukowym.

Książka *Stworzenie i początek wszechświata* nie jest „dowodem” na istnienie Boga, właściwie nie padają w niej nawet

[5] M. Heller, T. Pabjan, *Stworzenie i początek wszechświata*, dz. cyt., s. 134–135.

argumenty na rzecz tej tezy. Jest za to argumentem za tym, że chrześcijanie nie muszą się bać, że ich przekonania – o istnieniu Stwórcy, od którego zależne jest każde stworzenie – w XXI wieku należy uznać za zabobony. Zwolennicy ateistycznego światopoglądu raczej nie przyjmą teizmu po lekturze tej książki, ale to akurat powinno bardzo spodobać się teologom. W końcu gdyby istniał decydujący argument naukowy za istnieniem Boga, godziłoby to w wolną wolę ludzi, którzy wierzyć w Boga nie chcą.

Łukasz Kwiatek

Mózg, społeczeństwo i wolna wola

Recenzja książki: Michael S. Gazzaniga, *Kto tu rządzi – ja czy mój mózg? Neuronauka a istnienie wolnej woli*, przeł. Agnieszka Nowak, Smak Słowa, Sopot 2013, s. 208.

Michael Gazzaniga jest jednym z „ojców założycieli" neuronauki poznawczej, wyjaśniającej mózgowe podłoże procesów umysłowych – niezwykle ważnym wydarzeniem w historii nowej dyscypliny było wydanie przez niego, wraz z Richardem B. Ivrym oraz George'em Mangunem, książki o wymownym tytule: *Cognitive Neuroscience. The Biology of the Mind* (Norton, New York 1998). Prócz tego jest on autorem wielu innych publikacji, takich jak *The Ethical Brain. The Science of Our Moral Dilemmas* (Dana Press, New York 2005) czy *Istota człowieczeństwa. Co sprawia, że jesteśmy wyjątkowi* (Smak Słowa, Sopot 2011). Gazzaniga doktoryzował się i pracował w Caltechu, gdzie pod kierunkiem noblisty Rogera W. Sperry'ego badał wpływ przecięcia spoidła wielkiego, łączącego półkule mózgowe, na funkcje poznawcze oraz zachowanie (zabiegi te miały na celu złagodzenie napadów padaczki lekoopornej). Badania te doprowadziły go to sformułowania słynnej teorii lewopółkulowego interpretatora. Aktualnie Gazzaniga jest dyrektorem Centrum Badań Umysłu SAGE na Uniwersytecie Kalifornijskim w Santa Barbara, członkiem wielu prestiżowych towarzystw naukowych, a także kierownikiem projektu Neuronauka i Prawo.

Jak dowiadujemy się na wstępie, najnowsza książka

Michaela Gazzanigi *Kto tu rządzi – ja czy mój mózg? Neuronauka a istnienie wolnej woli* (w oryginale: *Who's in Charge? Free Will and the Science of the Brain*) powstała na kanwie wygłoszonego przez niego na Uniwersytecie w Edynburgu prestiżowego cyklu Wykładów Gifforda. Wykłady te zostały ustanowione przez XIX-wiecznego szkockiego adwokata i sędziego Adama Gifforda i miały na celu „promować i rozpowszechniać teologię naturalną w najszerszym znaczeniu tego słowa, czyli wiedzę o Bogu". Współcześnie wykłady te koncentrują się na związkach religii, nauki i filozofii. W książce Gazzanigi nie znajdziemy wprawdzie żadnych odniesień do religii ani teologii, jednak dotyka ona z pewnością głębokich problemów natury ludzkiej. Są nimi: świadomość, osobowa tożsamość, wolna wola i odpowiedzialność. Co więcej, praca ta dotyczy też w pewnym stopniu tego, czym Lord Gifford zajmował się na co dzień, czyli prawa. Gazzaniga nie jest jedynym badaczem mózgu i umysłu, który znalazł się w gronie wykładowców prestiżowego cyklu. Być może znakiem czasu jest, że w roku 2012 Wykłady Gifforda wygłosili neurokognitywista Vilayanur Ramachandran oraz psycholog ewolucyjny Steven Pinker.

Fakt, że książka powstała na podstawie wspomnianych wyżej wykładów, adresowanych z założenia nie tylko do przedstawicieli danej dyscypliny (w tym wypadku neuronauki poznawczej), pozwala nam przypuszczać o jej popularyzatorskim charakterze. Tak też jest w istocie. Jak już jednak wspomniałem, książka ta dotyka kwestii natury ludzkiej – jest więc ona zarazem pracą filozoficzną. Ale to nie wszystko. Zainteresowany czytelnik (jakim jest chyba każdy, kto trzyma w ręku

„Zagadnienia Filozoficzne w Nauce") zauważy, że Gazzaniga przemycił także sporo treści z zakresu filozofii i metodologii nauk biologicznych. By przekonać się o tym wszystkim, wystarczy spojrzeć na główne idee poszczególnych rozdziałów.

Dwa początkowe rozdziały – *Jacy jesteśmy* oraz *Mózg równoległy i rozproszony* – koncentrują się na historii neuronauki i ustaleniu paradygmatu, w jakim powinno się badać mózg, umysł i ludzkie poznanie. Zdaniem Gazzanigi mózg to nie *tabula rasa*, którą można kształtować dowolnie w trakcie ontogenezy. Najogólniej mówiąc, twierdzi on, że mózg, także na poziomie korowym, skonstruowany jest z wielu (w dużej mierze zdeterminowanych genetycznie) *modułów*. Moduły te wyspecjalizowane są w różnych czynnościach, które dawały ewolucyjną przewagę naszym przodkom. Pogląd Gazzanigi wpisuje się więc w paradygmat badawczy, jakim jest psychologia ewolucyjna. Twierdzenie o faktycznej modularnej strukturze mózgu jest obecnie raczej kwestionowane (dość szczegółową dyskusję na temat modularności można znaleźć w mojej książce *Wyjaśnić umysł. Struktura teorii neurokognitywnych*, Copernicus Center Press, Kraków 2013, rozdz. 2). Panujący obecnie pogląd w tej kwestii dobrze obrazuje następujący fragment z pracy Stephena Petersena i Julie Fiez:

> Elementarne operacje, definiowane na podstawie analizy przetwarzania informacji w wynikach zadań, są zlokalizowane w różnych rejonach mózgu. Ponieważ wiele takich elementarnych operacji jest uwikłanych w każde zadanie poznawcze, zbiór rozproszonych obszarów funkcjonalnych musi być zaan-

> gażowany w wykonanie nawet prostych zadań poznawczych (…). Funkcjonalny obszar mózgu nie jest obszarem zadania [*task area*]: nie ma obszaru tenisowego „forhendu", który może zostać odkryty. Podobnie nie ma obszaru mózgu poświęconego bardzo złożonym funkcjom; „uwaga" czy „język" nie są zlokalizowane w pojedynczym polu Brodmanna czy płacie. Każde zdanie czy „funkcja" wykorzystuje złożony i rozproszony zbiór obszarów mózgu (S.E. Petersen, J.A. Fiez, *The Processing of Single Words Studied with Positron Emission Tomography*, „Annual Review of Neuroscience" 1993, no. 16, s. 513).

Gazzaniga nie przyjmuje jednak tak silnej, czy wręcz „frenologicznej", wersji modularności mózgu, jaką krytykują cytowani wyżej badacze. O ile jego zdaniem mózg faktycznie zorganizowany jest na sposób modularny, organizacja ta ma charakter sieciowy. Powołując się na pracę Georga F. Striedtera, pisze on, że:

> Mózg naczelnych ma więc strukturę „małego świata": niezliczone krótkie, szybkie połączenia lokalne (gęsta sieć połączeń lokalnych) oraz niewielka liczba połączeń dalekiego zasięgu, służących do przesyłania wyników przetwarzania w obwodach lokalnych (mała liczba kroków potrzebnych do połączenia dowolnych dwóch miejsc mózgu). Taka struktura pozwala na efektywne przetwarzanie lokalne (organizacja modułowa), a przy tym zapewnia szybką komunikację w obrębie sieci globalnej (s. 63).

Gazzaniga dodaje do tego, że „między modułami nie istnieją relacje hierarchiczne"

(s. 64). Działanie mózgu polega raczej na nieustannym współzawodnictwie poszczególnych struktur. Oznacza to, że nie istnieje żaden globalny system sterowania mózgu.

Jak można było się spodziewać, w książce przeczytamy sporo na temat teorii lewopółkulowego interpretatora – który również określany jest mianem *modułu*. Koncepcja ta pojawia się na wielu stronach, począwszy od rozdziału trzeciego (*Interpretator*). Gazzaniga próbuje odpowiedzieć w tym rozdziale na pytanie, jak ze wspomnianego współzawodnictwa wielu modułów może się wyłaniać poczucie jedności świadomości i tożsamości osoby (bycia sobą i sprawcą własnych działań). Według niego za fenomeny te odpowiedzialny jest właśnie zlokalizowany w lewej półkuli moduł interpretujący. Jego zadaniem jest nieustanne porządkowanie dostępnych danych i tworzenie na ich podstawie spójnej historii osobistej. Wiele eksperymentów – przeprowadzonych przez samego Gazzanigę – pokazuje, że interpretator często działa *ex post*, dorabiając logiczne uzasadnienie do działań wykonywanych nieświadomie i automatycznie:

> Źródłem naszej subiektywnej świadomości jest niestrudzone dążenie dominującej lewej półkuli do wyjaśnienia niepełnych informacji, które dotarły do świadomości. Zauważ, że użyłem czasu przeszłego: „dotarły". To proces racjonalizacji, który odbywa się po fakcie. Interpretator, który snuje naszą opowieść, wplata w nią tylko to, co przedostaje się do świadomości. Ponieważ świadomość jest procesem powolnym, wszystko, co do niej trafia, już się wydarzyło – jest faktem dokonanym (s. 91).

Rozdział trzeci jest moim zdaniem najciekawszy z całej książki – Gazzaniga skupia się w nim bowiem nie tylko na powszechnie znanych eksperymentach z „kurnikiem, szuflą i kurzą łapą", ale opowiada pełną szczegółów, fascynującą i wręcz osobistą historię badań z udziałem pacjentów, którzy przeszli zabieg przecięcia spoidła wielkiego. Rozdział ten jest również kluczowy, gdyż przygotowuje grunt pod koncepcje przedstawiane w kolejnych częściach książki.

Rozdział czwarty nosi przekorny tytuł *Porzućmy ideę wolnej woli*. Przekorny, gdyż Gazzaniga wcale nie sądzi, że wszystkie nasze działania powodowane są ślepym trafem. Podobnie jak Daniel Dennett próbuje on bronić istnienia wolnej woli w świecie do pewnego stopnia deterministycznym. Analizy przeprowadzone w tym rozdziale wpisują się więc w szeroko rozumiany nurt filozofii umysłu i filozofii moralności zwany *kompatybilizmem* (w przeciwieństwie do tego nurtu *inkompatybiliści* twierdzą, że *albo* determinizm, *albo* wolna wola, zwykle odrzucając przy tym tę ostatnią). Gazzaniga rekonstruuje deterministyczną argumentację przeciw wolnej woli następująco:

> (1) mózg umożliwia powstanie umysłu, a mózg jest bytem fizycznym;
> (2) świat fizyczny jest zdeterminowany, więc i nasz mózg jest zdeterminowany;
> (3) jeśli nasz mózg jest zdeterminowany i jeśli mózg jest organem koniecznym i wystarczającym do tego, aby powstał umysł, to wynika z tego, że nasze myśli – stanowiące wytwór umysłu – również są zdeterminowane;
> (4) zatem wolna wola jest iluzją, a co a tym idzie, musimy

> zweryfikować nasze wyobrażenia dotyczące tego, co to znaczy być osobiście odpowiedzialnym za własne czyny (s. 112).

Gazzaniga podkreśla przy tym, że choć determinizm idący w parze z zaprzeczeniem istnienia wolnej woli jest poglądem wiodącym wśród neurobiologów, przyjmujących, że mózg to maszyna kauzalna, „prawda jest taka, że na poziomie psychologicznym nawet najbardziej zagorzali determiniści i fataliści nie czują się pionkami w partii szachów rozgrywanej przez mózg" (s. 93). Motywuje go to do poszukiwania stanowiska kompatybilistycznego. Zauważa (choć na marginesie), że bez oddziaływań przyczynowych pojęcie „bycia sprawcą" byłoby pozbawione sensu (obrońca wolnej woli przekonany jest bowiem, że to *on sam* jest przyczyną własnych działań). Sednem rozdziału jest stwierdzenie, że łączone z wolną wolą pojęcie „odpowiedzialności" nie ma sensu w odniesieniu do pojedynczego mózgu:

> Odpowiedzialność jest aspektem życia wywodzącym się z wymiany społecznej, a wymiana społeczna wymaga więcej niż jednego mózgu. Kiedy co najmniej dwa mózgi wchodzą ze sobą w interakcję, zaczynają się wyłaniać nowe, niemożliwe do przewidzenia zjawiska i powstaje nowy zbiór reguł. Dwie spośród właściwości zawartych w nowym zbiorze reguł – dotąd nieobecne – to wolność i odpowiedzialność (…). Odpowiedzialność i wolność istnieją w przestrzeni pomiędzy mózgami, w interakcjach między ludźmi (s. 118).

Gazzaniga powołuje się przy tym na niezwykle modne, ale zarazem problematyczne (bo dość tajemnicze) pojęcie *emergencji*. Prześledzenie całej argumentacji Gazzanigi, uwzględniającej emergencję, pozostawiam tym, którzy sięgną po jego książkę. Wspomnę tylko, że – jak widać zresztą w powyższym cytacie – zdaniem autora niewystępowanie czegoś na niskim poziomie (powiedzmy: „newtonowskim") nie oznacza, iż fenomen ten nie może pojawić się na skutek emergencji na poziomie wyższym. Mózg nie jest odizolowany od rzeczywistości – porusza się cały czas nie tylko w świecie fizycznym, ale i *społecznym*. Napotyka przy tym na wiele problemów społecznych i próbuje je rozwiązywać. Wszystko to może prowadzić do pojawienia się nowego poziomu, na którym obowiązywać mogą zupełnie inne prawa niż na niższych poziomach.

Kwestii tych dotyka kolejny rozdział, zatytułowany *Umysł społeczny*. Gazzaniga podkreśla w nim, że dostrzeżenie przez badaczy mózgu, iż organ ten nie działa w próżni, doprowadziło do powstania niezwykle ważnej współcześnie dyscypliny – neuronauki społecznej. W rozdziale tym Gazzaniga dotyka zagadnień życia w grupie – altruizmu, kooperacji czy „jazdy na gapę". Podczas lektury odniosłem wrażenie, że nie stara się on stworzyć (jak w rozdziałach poprzednich) spójnej teorii tytułowego „Umysłu społecznego", ale dokonuje przeglądu danych oraz teorii mających z tą kwestią coś wspólnego. W szczególności „jednym tchem" przechodzi on od omówienia teorii poznania społecznego opartych na badaniach neuronów lustrzanych oraz imitacji (naśladownictwa) do teorii podkreślających wrodzony i modularny charakter poznania społecznego. W pełni zgadzam się z Gazzanigą, gdy pisze on, że oparte na działaniu neuronów lustrzanych „zachowania naśladowcze stanowią smar, który oliwi maszynę interakcji społecznych i wzmacnia pozytywne zachowania społeczne" (s. 14). Dzieje się tak dlatego, że imitacja jest podstawowym „narzędziem" ewolucji kulturowej. Problem polega jednak na tym, że imitacyjna teoria poznania społecznego nie jest całkiem spójna z teoriami modularnymi, na które powołuje się Gazzaniga. Jak już pisałem, rozdział ten jest raczej przeglądem hipotez i wyników badań, a nie próbę stworzenia spójnej wizji biologicznych podstaw moralności.

Przejdźmy teraz do ostatniego – pasjonującego, a zarazem ważnego społecznie – rozdziału *Prawo to my*. Gazzaniga wraca tu do problematyki odpowiedzialności, ale tym razem nie tylko w odniesieniu do wolnej woli, ale także do prawa. Autor przytacza wiele przykładów z sądownictwa amerykańskiego, w których prawnicy korzystali z dowodów neuronaukowych (np. w postaci „skanów mózgu"). Argumentuje on, że tego typu dowody, wyglądające na „twarde fakty naukowe", obarczone są wieloma problemami teoretycznymi i interpretacyjnymi, a co za tym idzie, należy zachować ogromną ostrożność w korzystaniu z nich na sali sądowej. Wspomina również o nowych technikach badania wiarygodności zeznań („mózgowe odciski palców"). Choć rozdział ten zdaje się egzotyczny z punktu widzenia polskiej rzeczywistości prawnej (do której, o ile mi wiadomo, neuronauka jeszcze nie przeniknęła), uważam, że lektura będzie wartościowa dla prawników i przedstawicieli nauk społecznych. Co więcej, Gazzaniga dotyka wielu poważnych pytań filozoficzno-etycznych: Jaki jest cel kary? Co jest podstawą odpowiedzialności za niedozwolony czyn? Czy nieprawidłowe działanie mózgu/psychiki powinniśmy traktować jako usprawiedliwienie wyrządzonego zła, czy raczej powinniśmy karać wtedy bardziej surowo, by chronić społeczeństwo? Czy aby orzec winę człowieka, winny musi być też jego umysł?

Przejdźmy do kilku słów podsumowania całości książki. Bez wątpienia jest to praca wartościowa i godna przeczytania. Można traktować ją również jako bazę do dalszych lektur i dociekań. Trzeba jednak przyznać, że książka – w zamierzeniu popularnonaukowa – może być miejscami dość zawiła dla niespecjalistów. Choć Gazzaniga tłumaczy większość zagadnień klarownie, duża ilość przytaczanych teorii i danych eksperymentalnych może przyprawić czytelnika-nowicjusza, który nie miał wcześniej zbyt wiele do czynienia z kognitywistką, psychologią czy filozofią umysłu, o lekki zawrót głowy. Z kolei czytelnik-specjalista może wytknąć autorowi podejście zbyt „encyklopedyczne", „przeglądowe" (podkreślałem to np. w odniesieniu do rozdziału *Umysł społeczny*), a nawet chaotyczność. Mimo to uważam, że w pierwszym przypadku warto zadać sobie nieco trudu, zaś w drugim przymknąć oko na przytaczanie w tempie karabinu maszynowego dobrze znanych danych i teorii. Polecam.

Mateusz Hohol