ZFN

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce

LVIII
2015

Copernicus Center

Copernicus Center PRESS

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce

Projekt okładki: Mariusz Banachowicz

Adiustacja: Wydawnictwo CCPress

Projekt typograficzny: Mirosław Krzyszkowski

Skład: MELES-DESIGN

ISSN 0867-8286

Nakład: 500 egz.

Copernicus Center PRESS

Wydawca: Copernicus Center Press Sp. z o.o.,
Pl. Szczepański 8, 31-011 Kraków,
tel/fax (+48) 12 430 63 00
e-mail: marketing@ccpress.pl
www.ccpress.pl

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o., Łódź, ul. Senatorska 31

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce

LVIII ▪ 2015

Wstęp

W obecnym, 58 numerze „Zagadnień Filozoficznych w Nauce", czytelnik znajdzie artykuły, które były uprzednio prezentowane w formie referatów podczas posiedzeń Komisji Polskiej Akademii Umiejętności. Do 2012 roku istniały w PAU dwie różne komisje podejmujące tematykę filozoficzną: Komisja *Fides et Ratio*, kierowana przez ks. prof. Michała Hellera oraz Komisja Filozofii Nauk Przyrodniczych, kierowana przez prof. Jerzego Janika. Po niespodziewanej śmierci prof. J. Janika, obydwie komisje połączyły się, przyjmując nazwę Komisja Filozofii Nauk. Komisja ta kontynuuje zgłębiania tematyki podejmowanej przez poprzednie komisje.

Obszar zainteresowań wszystkich tych komisji jest bliski profilowi naukowemu „Zagadnień". Uzasadnia to decyzję publikowania wybranych referatów, będących owocem prac wspomnianych komisji, w formie trzech numerów specjalnych „Zagadnień Filozoficznych w Nauce".

Artykuły zamieszczone w niniejszym numerze nie odzwierciedlają chronologii wystąpień w PAU. Numer ten został zredagowany tematycznie i stanowi wybór wystąpień z różnych okresów działania komisji. Obecny zestaw artykułów skupia się wokół tematyki filozofii matematyki. Numer poprzedni (57) poświęcony został zagadnieniom relacji nauki i religii, zaś numer następny (59) poświęcony będzie problemom filozofii fizyki.

Publikowanie tych materiałów w „Zagadnieniach" jest możliwe dzięki życzliwości władz Polskiej Akademii Umiejętności, którym redakcja „Zagadnień Filozoficznych w Nauce" wyraża serdecznie podziękowanie.

Redakcja

Matematyka nie opisuje świata, lecz wychodzi mu naprzeciw

Jerzy Mioduszewski
Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski

Mathematics does not describe the world, but faces it

Abstract

In everyday experience mathematics rarely appears to us as a whole, and certainly never as a system in the sense of David Hilbert's considerations from early 20th Century. Mathematical disciplines seem to be independent and autonomous. We do not see that specific deduction goes beyond particular convention applicable in given discipline. In the late 19th Century this view was shared by Felix Klein and Richard Dedekind. The latter's work "What are numbers and what should they be?" (*Was Was sind und was sollen die Zahlen?*) was the inspiration for writing this article. This essay is an attempt to see mathematics not as a building, but as a living organism seeking its explanation.

Keywords

philosophy of mathematics, Richard Dedekind, arithmetic, geometry, number sense, calculus, incommensurability, transfinite numbers

Pochodne i całki, wzory Eulera w rodzaju $\pi^2/6$, teoria mnogości. Jedno mogłoby istnieć bez drugiego. To wszystko matematyka. Czy jest jakąś całością? Jest anegdota o Erdösu, który zwierzył się swojemu równie znakomitemu koledze, że nie zrozumiał nigdy teorii Galois. To nie dla ciebie, Paul – usłyszał w odpowiedzi. Dla kogo zatem jest twierdzenie matematyczne? Na czym nam w nim zależy? Arystoteles uważał, że nie jesteśmy przywiązani do samej treści twierdzenia matematycznego. Równie dobrze przyjmujemy jego negację, o ile okaże się prawdziwa. Pewne obserwacje są za tym, by zgodzić się z Filozofem, ale w wyniku naszych dalszych rozważań dojdziemy i do innych konkluzji, bo może chodzi tu jeszcze o coś innego.

Rytm Dnia Pierwszego

Lokum matematyki to „ś w i a t S n a s z y c h m y ś l i”. Zwrot pochodzi ze słynnego, chociaż niewielkiego i nie do końca zrozumianego przez matematyków, dzieła Richarda Dedekinda *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888).

Pomyślmy m y ś l – pewien ustalony element wspomnianego świata S. Umysł nie jest w stanie powstrzymać się od „myśli o tej myśli”, a w rezultacie od „potoku myśli”, który jest podobny do p o t o k u l i c z b. Nie od razu Dedekind doszedł do tego wniosku. Poświęcił dziesiątki stronic, aby z owego potoku myśli wydobyć wspomnianą minimalną nić. Nie wskazywał żadnej konkretnej liczby, lecz r y t m przenikający świat S, który jest n i e s k o ń c z o n y. Po przesunięciu o jedną myśl dostajemy ten sam świat S. Liczba nie jest u Dedekinda wytworem ani czasu rozumianego fizycznie, ani przestrzeni, jak u Kanta. Mogła powstać już w P i e r w s z y m D n i u, już w samej myśli Stwórcy.

Giuseppe Peano dwa lata później zredukował myśl Dedekinda do aksjomatu indukcji w zakresie liczb naturalnych. Dedekind w milczeniu przyjął to uproszczenie.

Doświadczenie myślowe Dedekinda skłania do wniosku, że w naszej myśli mogą powstawać pewne konstrukcje niezależnie od bodźców zewnętrznych. Nasza myśl nie staje wobec świata bezbronna. Napisał gdzieś Max Scheller: żyjemy światu naprzeciw. Narzucamy światu r y t m n a s t ę p s t w a i widzimy go jako nieskończony, nie zapytując świata, czy życzy sobie takiego jego rozumienia.

Nie było nas w Pierwszym Dniu, a jeśli byliśmy, to bez świadomości, i do wiadomości naszej ten pierwotny rytm nie zawitał. Nie znaczy to, by nie odcisnął się w nas w jakiejś pierwotnej formie na naszym świecie S. Dlatego nie są nam obce pierwsze jego takty, jakie były nam wtedy darowane. Czy rytm świata S jest fragmentem czegoś szerszego, tylko się domyślamy. Bo czy nie podlega temu rytmowi nasz język i nasze płynięcie w czasie?

Jest to rytm następstwa. Ale znamy też kontemplację, kiedy myśl płynie w sposób ciągły. My wszakże wyodrębniamy oddzielne stany i formułujemy oddzielne sądy. Na ich rytmie i następstwie oparte są nasze czynności logiczne. I chociaż myślenie mogłoby być ciągłe, to nasza jego ekspresja zdaje się wymagać zamknięć w zdania, które są jakby jego atomami. Atomizm myślowy jest wielką zagadką naszego świata S, nie wydaje się być jego koniecznością.

Nie panujemy nad pierwotnym rytmem naszych myśli i nie od razu rozpoznajemy jego dla nas znaczenie. Potokowi myśli, jakim obdarza nas indukcyjne następstwo, nie towarzyszy bezpośrednia refleksja. Jak pisze Andriej Biełyj, inspirowany matematyczną filozofią swego ojca Nikołaja Bugajewa, „myśli same się myślą", a wspomnijmy jeszcze potok myśli w *Herzogu* Saula Bellowa. Jesteśmy zniewoleni do wchodzenia w ich rytm. Nie umiemy wyłączyć się z ich strumienia, o czym pisał Bergson, oraz w znanej przed laty książce Ernest Dimnet, a powtarza współczesny nam Eckhart Tolle. Podobnie widzi nasz gramatycznie uporządkowany potok fraz językowych Noam Chomsky, co obszernie omawia w swojej niedawno u nas wydanej książce książce Keith Devlin.

Naprzeciw światu

Świat S jest wszakże bogatszy niż to, co daje sam rytm indukcji. Jesteśmy dziećmi D n i a S z ó s t e g o. To wtedy dostaliśmy w podarunku ś w i a d o m o ś ć, to znaczy poczucie kierowania sobą, poczucie naszej odrębności wobec tego, co nas otacza, a jednocześnie poczucie wspólnoty ze światem.

I dano nam tego Dnia zmysły, które lokują w świecie S całe obrazy świata zewnętrznego. Świat S nie poprzestaje na ich kontemplacji, ale stwarza środki wychodzące naprzeciw obrazom atakującym jego zmysły. Zastępuje te obrazy właściwą sobie konstrukcją własną. Nie jest przez to biernym odbiorcą wrażeń.

Konstrukcja, jaką świat S obudowuje odbierane obrazy, nie należy do rzeczy samych w sobie w znaczeniu Kanta. Jest polem wewnętrznym, jakie świat S tworzy w odpowiedzi na atakujące go z zewnątrz zjawiska. Oto tworzy pojęcie koła, którego formę narzuca „kołom" obecnym w świecie zewnętrznym. Postrzegając te „koła", wchodzi jedynie w te ich aspekty, które są obecne we wzorcowym kole mającym siedzibę w jego wnętrzu, to jest w naszej świadomości. Nie wszystkim obrazom świat S potrafi przeciwstawiać wzorce, ale ewolucja polega na wzbogacaniu ich zakresu.

Wzorce, którymi otacza się świat S, stanowią mur obronny przed nieznanym nam zewnętrzem. Chcemy, jak m o n a d a L e i b n i z a, być odcięci od wpływów zakłócających nasze wnętrze. Obrazy selekcjonujemy według kierujących nami upodobań. Od siebie nawzajem odbieramy jedynie te sygnały, które przekazują określony rodzaj treści. Nie uczymy się od siebie, przelewając sobie nawzajem całe mózgi. Odbieramy jedynie izolowane sygnały wystarczające dla rozbudzenia w monadzie jej wewnętrznego świata.

Jak zauważa niezapamiętany z imienia Filozof – staramy się, by nasz świat wewnętrzny był nieprzystępny dla zewnętrznej – jak pisze – pospolitości. Bo przyjrzyjmy się obudowie monady w postaci pięknej muszli. Dzieło sztuki, aby obronić się przed przetworzeniem w kicz, zaznacza choćby jednym szczegółem – może być to nawet skaza – swoją odmienność od środowiska.

Ale przecież tym środowiskiem zewnętrznym się karmimy. Według Arystotelesa, nie ma niczego w naszych myślach, co by nie przeszło wcześniej przez zmysły. Myśl pozostawiona samej sobie zawęża się. I chociaż wdrukowany w nas rytm pierwotny sprawia, że nie zawęzi się do końca, to jednak nie wzbogaca on naszej świadomości.

Zmysły, które zasiedlają świat S, walczą w nim o miejsce dla siebie. Widzimy wśród nich również z m y s ł, którego zadaniem jest tworzenie wspomnianej konstrukcji odpowiadającej doznaniom zmysłowym przychodzącym z zewnątrz. Nazwijmy ten zmysł z m y s ł e m m a t e m a t y c z n y m. Zmysł matematyczny odczuwa przykrość, jeśli dla odbieranego przez siebie spostrzeżenia nie znajduje miejsca w budowanej konstrukcji. Odczuwa zadowolenie, wręcz spełnienie, z wprawnie wykonywanych czynności.

Tworzenie pojęć matematycznych, to koncert zmysłów biorących w tym udział. Zmysł matematyczny nie walczy tu o pierwszeństwo, dając w geometrii pole zmysłowi wzroku, w topologii zmysłowi dotyku, a w nauce o ruchu poczuciu intensywności zmiany, poczuciu natężenia siły i upływu czasu. Zostawia wszakże dla siebie ostatnie słowo. To zmysł matematyczny nadaje ostateczny kształt pojęciu...

Twórcy matematyki są coraz bardziej skłonni przyjmować, że wyjaśnienie istoty matematyki leży bardziej w rozpoznaniu natury świata S i zmysłów, które go zaludniają, niż w rozpoznaniu treści, które niesie matematyka. John von Neumann w swoich wczesnopowojennych esejach przyznaje, że nie poznawczość, lecz estetyzm, czy wręcz samolubność – dodajmy od siebie – jest tym, co kieruje matematyką. Hardy wręcz twierdził, że taka właśnie jest jej natura. Ukształtowany w innym świecie pojęć Szіłow również twierdzi, że matematyka kieruje się w swym rozwoju własnymi prawami. Dołączają się do tego poglądu biologowie.

Z niepokojem zauważamy, że świat S naszych myśli mógłby się zamknąć w zbudowanym przez siebie gmachu, jeśliby zmysł matematyczny pozostawić samemu sobie. Ale dodajmy, że samolubność nie jest cechą wyłącznie tego zmysłu.

Metafizyka matematyki

Nasze poznawanie świata poprzedzone jest p r z e k o n a n i a m i, nazwijmy je m e t a f i z y c z n y m i. M e t a f i z y k a to aprioryczne przekonania – oczekiwania, ale też i uprzedzenia – wobec tego, co może przyjść z zewnątrz. Jest podarunkiem Dnia Szóstego. Ale jako o metafizycznym wypada nam myśleć także i o darowanym nam wcześniej rytmie Dnia Pierwszego. Poznanie matematyczne, poprzedzone apriorycznymi przekonaniami, tworzy coś co nazwalibyśmy m a t e m a t y c z n o ś c i ą.

Dla pierwotnych wdrukowań i budowanych na nich przekonań świat S poszukuje potwierdzeń, dzięki którym stają się one p r a w d a m i powstałej konstrukcji. Kryterium prawdy to wewnętrzna harmonia – s p ó j n o ś ć – będąca wyrazem wzajemnego dopasowania elementów konstrukcji. Nie dopuszczeni jesteśmy do wglądu, jak ta harmonia ma się do t r e ś c i prawd, to jest do prawdy w znaczeniu powszechnie przyjętym. Światu S musi wystarczać ich wewnętrzna zgodność, za co przed światem zewnętrznym odpowiada jako c a ł o ś ć. Dba o tę zgodność ze względu na potrzebę zachowania swej wiarygodności, gotowy – w razie pojawienia się t r u d n o ś c i, do przebudowy konstrukcji. Nie szuka potwierdzeń w świecie zewnętrznym dla każdego swego „dwa a dwa jest cztery".

Prawda matematyczna jest ż y w a, jeśli jest obecna w naszej świadomości. Trwa w umyśle dopóki trwa emocja z nią związana. Są przebłyski prawd matematycznych goszczące w umyśle przez chwilę. Bo prawdy matematyczne dotyczą raczej s y t u a c j i niż tak zwanych b y t ó w. Słyszało się, że niezapisane w porę dowody powstałe w Kawiarni Szkockiej bezpowrotnie ginęły. Ale prawdy matematyczne, nawet zapisane, mogłyby nie odżyć, jeśliby nie były dłuższy czas aktywnie przeżywane. Mimo to chcemy wierzyć, że są trwałe, a nawet wieczne, w tym znaczeniu, że jeśli przebłysk prawdy matematycznej zechce do nas zawitać po raz drugi, będzie ten sam, co przedtem.

Dopóki zainteresowaniem matematyki były figury geometrii i liczby w swych zjawiskowych indywidualnych postaciach, ten platoński pogląd na matematykę wydawał się właściwy. Ale wiek XIX uwidocznił, jak wiele w matematyce zależy od nas samych. Brouwer na początku XX wieku zwrócił uwagę na wpływ, jaki na prawdę matematyczną ma nasza logika. Interwencja logiczna jest interwencją *ad hoc*, polegającą na zapełnianiu luk myślowych. Te mogłyby pozostać niezamknięte, ale logika – cierpiąc na *horror vacui* – zamyka je na użytek doraźny w zdania, które w tej postaci są petryfikowane jako prawdy niezmienne. Wiele z nich zawiera prawdy niepotrzebne, z których matematyka, jak każdy organizm, musi się uwalniać.

Obecność logiki w rozumowaniach matematycznych jest najbardziej widoczna tam, gdzie dotyczą one pojęć słabo motywowanych intuicjami. To logika wprowadza do matematyki pojęcie s p r z e c z n o ś c i, nie umiejąc inaczej bronić się przed nonsensem. Sama matematyka zna jedynie t r u d n o ś c i. Opiera się na intuicjach, a te, jeśli na ich drodze pojawiają się trudności, ulegają adaptacji w przebudowanej strukturze pojęć. Dotyczyłoby to i logiki, gdyby można było znaleźć zmysł, któremu jest podporządkowana i który pozwala nam ją sensownie kształtować. Jedynie rytm pierwotny mógłby być postawiony w tej roli, ale nie panujemy nad nim, mimo – a może właśnie dlatego – że matematyka i logika płyną wspólnie tym rytmem wspomagając się wzajemnie,

Logika nie buduje matematyki. Matematyka, taka jak ją tu widzimy, n i e j e s t g m a c h e m, którego elementy zespojone są logiką. Dedukcja łączy lokalnie niektóre prawdy matematyczne. Nici, którymi łączy te prawdy, są krótkie. Całość matematyki j e s t o r g a n i z m e m, który swoją spójność zawdzięcza dalekiego zasięgu s y g n a ł o m pobudzającym dalekie od siebie autonomiczne regiony – m o n a d y świata S – wzbogacając lokalne konstrukcje o doznania pobrane gdzie indziej. Te sygnały nie przenoszą prawd na ten sposób, co dedukcja, są jedynie pobudzeniami. Prawda jest wypracowywana w każdej monadzie z osobna, logiką niewychodzącą poza monadę.

Jest również w ludzkim myśleniu jakiś przymus z w i e ń c z e ń naszych wyobrażeń o świecie. Zwieńczamy efektownymi zamknięciami otwarte wątki myślowe, co uwalnia nas od mierzenia się z pytaniami, odpowiadając na te pytania jakby nieswoimi myślami. Zdarza się, że ulegamy i korzystamy z wygodnego prezentu.

Nie wykluczamy, że niektóre z naszych zmysłów i związane z nimi doznania odzwierciedlają sens uniwersalny. Mimo to w samym charakterze zmysłu jest efemeryczność i gra. Zmysły nas zwodzą, wciągając do gry, mając swoje własne w niej cele. Razem tworzą wiecznie ewoluującą żywą konstrukcję, którą świat S ustawił naprzeciw światu. W zrozumieniu natury świata S powinna nas wspomóc, jak sądzimy, wiedza o organizmach żywych, ku której z obawą jednak sięgamy, by nie usłyszeć prawd zbyt trudnych.

Matematyka nie jest tworem jednorodnym. Abstrakty geometrii, takie jak punkt, prosta i koło, mają niemal idealnie jednoznaczne reprezentacje w świecie rzeczy objawiających się nam w postaci punktów, prostych i kół fizycznych. Abstrakcja wydaje się tu wręcz niepotrzebna.

Arytmetyka

Inaczej jest z arytmetyką i ogólniejszą od niej arytmetycznością, której rytm – jak sądzimy – był obecny w świecie już od jego Dnia Pierwszego. To w tym rytmie dopatrujemy się głębszego sensu liczby. Liczba nie pojawia się nam sama, w czystej postaci. Istnieje, jak pisze Mendelssohn, poprzez swoje wcielenia. Jeśli istnieje bezpośrednio, to jedynie jako element świata S. Mendelssohn nazywa arytmetykę „inną nauką", co znaczyłoby, że stawia ja poza celami poznawczymi. Liczba potrafi wcielić się w figurę jako jej aspekt, np. ilościowy, ale może się prezentować jako kolekcja punktów lub figur, to jest jako zbiór elementów. Potrafi się wcielić także w liczbę 5.

Bo pewne indywidualne liczby są zjawiskami. Najprostsze z nich pojawiają się pobudzone już samym rytmem indukcji, ale ich zakres poszerza się. Liczby 13 i 7 pojawiają się wcześniej jako zjawiska myślowe, niż liczba 6, która pojawia się nawet później niż biblijne dziesięć tysięcy. Jan Potocki słowami Velasqueza przekonuje nas, że liczby zjawiskowe nieobce są również naszym braciom mniejszym. Ten zakres liczb, rozbudowany przez nas myślowo, ujawnia cechy wychodzące poza pierwotny potok indukcyjny, rozbudowując się w dyscyplinę nazywaną teorią liczb. Chodzi tu również o aspekt ilościowy liczby, nieobecny bezpośrednio w rytmie indukcji. Wyodrębniony w ten sposób zakres liczb wydaje się być już kontrolowany zmysłowo. Nie wykluczamy, że ten zmysł jest też obecny również w naszych wyobrażeniach o z b i o r a c h i objawiającej się tam nieskończoności.

Liczba może się też ujawniać poprzez wcielenia pozaarytmetyczne. Liczba 17 pojawia się jako liczba boków wielokąta foremnego możliwego do skonstruowania w sposób klasyczny cyrklem i linijką. Gauss dowiódł, że nie tylko liczba 17, ale też 257 ma tę własność (mają ją, wcześniejsze niż 17, liczby 3 i 5). Jest to zjawisko darowane pozasystemowo liczbie 17. Bok siedemnastokąta foremnego wpisanego w koło o promieniu 1 spełnia pewne warunki algebraiczne konieczne dla wspomnianej konstrukcji. Dzięki tej konstrukcji liczba 17 uzyskuje w c i e l e n i e w pewną sytuację geometryczną. To tego rodzaju wcielenia mógł mieć na myśli Moses Mendelssohn. Geometria służy wielu możliwościom tego rodzaju wcieleń, dostatecznie prostych dla liczb takich jak 2 i 3. Ale wspomnijmy też trójki pitagorejskie poczynając od trójki (3, 4, 5).

Pewnym liczbom, takim jak 2 i 5, wcieleń dostarcza już przyroda. To nasze pięć palców stworzyło system dziesiętny, matematyczność to tylko akceptowała. Ale system dwunastkowy mógł już być dyktowany samym rytmem arytmetycznym, chociaż nie wykluczamy magii związanej z liczbą 12. Liczne przykłady zjawiskowego zaistnienia liczb mogły prowadzić do przypuszczenia, że jest jakiś magiczny system, który je jednoczy. Tak chcieli widzieć liczbę Pitagorejczycy.

Pogląd o niezależności pojęcia liczby od pojęć o przestrzeni przypisaliśmy Dedekindowi. Ale ten pogląd głosił również współczesny mu Gottlob Frege. Upatrywał on jednak istotę liczby w jej aspekcie ilościowym, a nie jak Dedekind w jej aspekcie porządkowym, wyznaczonym przez jej rytm indukcyjny.

Pojęcia o liczbie mogłyby zamknąć się same w sobie. Liczba stara się jednak być obecną w całej matematyce. Liczba służy matematyce. Jej rytm pierwotny słyszymy w zjawiskach, w które się wciela. Są wszakże zjawiska matematyczne, które ten rytm omijają. Przykładem jest topologia, ale nie tylko. Bo i teoria liczb w swoich najgłębszych partiach rytmem indukcji nie jest zainteresowana.

Geometria

Geometria, ta jaką widzimy u Talesa, jest wolna od pojęcia o liczbie. Jest, co widzimy u Euklidesa, fizyką naszego zmysłu widzenia. Ale zaczynamy dodawać do siebie odcinki prostej, a Pitagorejczycy upominają się o ich wspólne miary. Ten prosty sposób na arytmetyzację zawodzi. Niedługo później jednak Euklides (a może Eudoksos) proponuje algorytm, który odkrywa bogactwo natury arytmetycznej w zakresie niewspółmierności, które za Teajtetem wyrażamy ułamkami łańcuchowymi. Geometria nagle wzbogaca się o metody nieskończonościowe, których sama w swoich początkach się nie spodziewała. Eudoksos, a za nim Archimedes, starają się uchronić geometrię od trudności powstałych na skutek inwazji nowego żywiołu. Ustępuje geometria. Prostej wprawdzie nie zabrania się być nieskończoną, ale dla zaspokojenia wymagań arytmetyczności każdy jej punkt ma być osiągalny odkładaniem odcinka, nawet jakkolwiek małego. Ustępuje w ten sposób również arytmetyka, rezygnując z pozaskończoności. Dzięki temu rozszerzone prawdy matematyczne nadal pozwalają się lokować w naszej świadomości.

Adaptacja prawd arytmetycznych do świadomości matematycznej ukształtowanej w Dniu Szóstym będzie odtąd stałym problemem matematyki. Znane jest powiedzenie Eulera, że jego ołówek odkrywa rzeczy bez jego w tym udziału.

Platon, który prawdy matematyczne uważał za przedwieczne, musiał mieć na myśli prawdy arytmetyczne. Wchodzą w nasz świat S bez naszej zgody, formując go na swój sposób. Według Fregego, od prawdy arytmetycznej nie ma apelacji, a według powiedzenia Cantora, nie ma w arytmetyce miejsca na hipotezy, to jest na zdania, których prawdziwość byłaby zależna od czegoś poza nią.

W geometrii nie jesteśmy biernymi widzami. Geometria, rozwinięta później topologia i budowana w oparciu o nie fizyka matematyczna, są konstrukcjami naszymi. To tam odnajdujemy siebie, kształtując pojęcia o świecie i przestrzeni. Ale bywa, że uprzedza nas w tym arytmetyka, przez co nasze wyobrażenia o przestrzeni nie są całkiem nasze.

Gotowi bylibyśmy widzieć geometrię po prostu jako matematykę naszego zmysłu widzenia. Nie idziemy wszakże w tym za daleko. Koło dla Greków było kołem niemal fizycznym. Jeśli jednak zapomnimy o wypełniającym koło fizycznym płaskim dysku, to zobaczymy w nim linię zamkniętą, po której może coś biec. Istotnym aspektem koła staje się c y k l. A jest jeszcze koło, które może się zawęźlać, a jest też koło, które może być b r z e g i e m niekoniecznie dysku. Nie miał więc może do końca racji M o s e s M e n d e l s s o h n, bo również obiekty geometrii osiągają poziom trwałych wzorców wcielających się na wiele sposobów w rozliczne sytuacje, jakich doświadcza świat S. Jest też takim wzorcem nie tylko koło, bo również i t r ó j k ą t, chociaż może nie kwadrat.

Przebieg ewolucji pojęć, w końcu zależny od zdarzeń nieprzewidzianych, nie pozwolił rozwinąć się pojęciom geometrycznym w sposób czysty, jako t o p o l o g i c z n e. Nie jest nam jednak obca myśl o istotach żywych, których świat S ukształtowany jest przez zmysł d o t y k u, które nie mają innych pojęć niż topologiczne, którym nieobce jest pojęcie linii zamkniętej i prostej, rozumianej po prostu jako przegroda.

Wcielając się w sytuacje geometryczne, liczba ewoluuje, wzbogacając się o cechy swego nosiciela. Przyjmuje rolę długości, pola, masy i przebiegu. Dozwala na, nieobecną w samej teorii liczb, podzielność w nieskończoność, wreszcie i ciągłość. L i c z b a c i ą g ł a ma taki właśnie początek. Wyrasta z dwóch źródeł. Jednym jest wspomniany konstrukt czysto arytmetyczny, drugim jest czerpane z fizycznych właściwości rzeczy c o n t i n u u m Arystotelesa, nad którego pozaliczbową naturą rozmyślał w naszych czasach Hermann Weyl. Jeśliby jednak przyjąć za Cantorem, że pojęcie liczby ciągłej nie wymaga odwołań się do fizyczności, że można je wyprowadzić logicznie z właściwości tkwiących już w systemie liczb naturalnych, w oparciu o czysto myślowe pojęcie z b i o r u, znaczyłoby to zgodę na pełną arytmetyzację matematyki.

Ruch i zmiana

Matematyka starożytnych była, jak to określał Arystoteles, nauką o b y t a c h n i e r u c h o m y c h. Było to samoograniczenie wymuszone przez paraliżującą myśl aporię Zenona o strzale, która nie pozwalała na rozumienie zmiany jako p r o c e s u. Tymczasem zmiana jest istotą zjawisk fizycznych. To właśnie w z r o s t o w i i z a n i k o w i poświęcił Arystoteles w swojej *Fizyce* cały rozdział. Ale sytuacje, gdzie obserwujemy zmianę, nie mają ze sobą powiązań. Może to być droga narastająca w czasie, nasilenie barwy, czy też tempo przyboru wody w strumieniu.

Ideę ich wspólnego ujęcia matematycznego podjęli filozofowie scholastyczni XIV wieku. Calculatores z Merton College z Oksfordu i filozofowie z Paryża wyszli od spostrzeżenia, że to, co bezpośrednio podlega obserwacji w zjawiskach, to nie sama wielkość zmiany, lecz jej i n t e n s y w n o ś ć, która obserwowana w określonym zakresie determinuje zmianę ilościowo. Jednym z przykładów była intensywność łaski Bożej spływającej na człowieka, która się w nim nagromadza s u m a r y c z n i e na sposób, który Newton i Leibniz nazywali później c a ł k ą. Jest też intensywność siły wtłaczanej w poruszające się ciało, która determinuje jego i m p e t – a więc prędkość. Jeśli więc s i ł a – a tak jest przy spadku swobodnym – jest niezmienna w czasie, prędkość wzrasta w czasie jednostajnie. Scholastycy zawierzyli wdrukowanemu w nas zmysłowi pozwalającemu nam odczuwać stopień natężenia oddziaływań. Galileusz nie wierzył tej wrodzonej nam intuicji i sprawdzał.

Pełne włączenie tej idei czternastowiecznej w zarysowującą się już konstrukcję matematyczną zawdzięczamy Newtonowi i Leibnizowi, chociaż pominęliśmy prekursorów, Keplera i Torricellego, a przede wszystkim Arystotelesa, bo to na gruncie jego planu powstawał opisywany tu nowy dział matematyki – *analiza matematyczna* – w której Newton widział geometrię Euklidesa wzbogaconą o naukę o ruchu.

Był to skok w rozwoju, ale – wróćmy do naszej mitologii – skok w obrębie pojęć matematyki Dnia Szóstego. Zauważmy przy tym, że intensywność zmiany ma jakieś podobieństwo do liczbowego rytmu Dnia Pierwszego, jest jakby tego rytmu *ciągłym* wypełnieniem. Podobnie jak rytm arytmetyczny, ma on zastanawiającą rozmaitość wcieleń, nadając pojęciom matematycznym nowe szybsze tempo rozwoju. Nie trzeba będzie nawet stu lat, aby *calculus* Newtona przeszedł w równania struny u Eulera. Przypomnijmy, że to właśnie intensywność – wielkość, która była tak trudna do określenia – jest tym, co podlega bezpośrednio obserwacji, a także pomiarowi. Tę prawdę wyraża nam równanie różniczkowe, które z danych związków między intensywnościami obiecuje nam odtworzyć związki między samymi wielkościami, które bezpośredniej obserwacji nie są dostępne.

Rozumienie metod różniczkowych nie zawsze będzie nadążało za rachunkiem. Przyznawał to Euler we wstępie do swojego trzytomowego dzieła, a nie chodziło już tylko o anegdotyczny ołówek. Motywacje analizy wywodzą się z szerszego zakresu niż te, które wystarczały geometrii. Włącza się zmysł poczucia czasu, natężenia siły i poczucia nagromadzania się wielkości, na wiele sposobów wcielając się w matematykę.

Metafizyczność tych motywacji odczuwamy dużo silniej niż w zakresie motywacji geometrycznych, których źródło jest niemal bezpośrednie. Motywacje analizy są głęboko w nas ukryte, najczęściej nie są naszymi bezpośrednimi przekonaniami wynikającymi z własnego doświadczenia, lecz zdają się raczej wynikiem w d r u k o w a n i a ich w nas – używając zwrotu Konrada Lorenza – we wczesnych stadiach naszej ewolucji, chociaż może nie chodzi tu o Dzień Pierwszy. Słowacki w *Genesis z ducha* dziękuje mrówce, której doświadczeniem się kieruje.

My to wszystko nazywamy i n t u i c j ą. Na przykładzie intuicji, która doprowadziła do odkrycia calculusu, widzimy intuicję jako sumaryczne doświadczenie przedmatematyczne, c a ł k ę z naszych doświadczeń, nie tylko nas samych, lecz całego biegu ewolucji. Bywa, że nie ufamy intuicji, ale Pascal dopowiadał, że to dlatego, iż aż nazbyt często bywa bezbłędna. Dodajmy wszak, że nie każde przekonanie powinno być nazwane intuicją.

Matematyka scholastyków i Newtona, a nie pomińmy Keplera i Cavalleriego, zaczerpnęła jeszcze raz pełną garścią z dostępnego nam zmysłami świata. W swoich początkach była jeszcze wolna od wpływu arytmetycznego. Było to jeszcze wtedy, kiedy Newton formułował prawa dynamiki i poddawał im prawa Keplera rządzące ruchem planet, a nawet jeszcze wtedy, kiedy Jan Bernoulli wyjaśniał problem brachistochrony, a Euler problem struny.

Matematyczność przyrody

Przyroda p o z w a l a się widzieć matematycznie. Dla przedstawienia problemu, wróćmy do pełnego toku naszych wywodów. Mówiliśmy o świecie S i wbudowanej weń konstrukcji pojęć. Nie dzieliliśmy jej na matematyczną i niematematyczną. Dopiero w którymś momencie pojawiła się matematyka, którą zazwyczaj wyodrębnia się spośród ogółu dociekań ś c i s ł o ś c i ą – inaczej r y g o r e m – cechą wcale dla niej nie najważniejszą. Nierygorystyczne fazy rozumowań s ą r ó w n i e ż matematyką, chociaż woleliśmy je nazwać matematycznością, aby nie wychodzić poza ustalony zwyczaj. Nie wykluczamy więc, że wszystko w świecie jest matematyczne, przynajmniej potencjalnie.

Pozostają wszakże całe obszary zjawisk przyrody, do których z naszą matematyką nie zaglądamy. Z geometrią Euklidesa można iść w dowolnie dalekie regiony kosmiczne, uzyskując nadal sensowny opis zjawisk. Korzystał z tego Einstein. Ale już Riemann zauważył, że wiarygodność fizyczna naszej geometrii zatraca się, jeśli przechodzimy ku mikroskali. Naiwne przekonania o symetrii, w jakiej pozostają do siebie nieskończoność i zero, trzeba odrzucić. Riemann dokładnie się nie wypowiadał, ale już w jego czasach budowa punktowa otoczenie zera była uświadomioną trudnością myślową.

Fizyka dwudziestego wieku, wchodząc w mikroświat, doświadczyła tego, co było przeczuciem Riemanna. W mikroświecie nie ma bezpośrednio nic do powiedzenia nasza matematyka, która potrafi się tam dostać jedynie za pomocą konstrukcji przestrzeni abstrakcyjnych, a więc w istocie za pomocą czystej arytmetyki, która w matematyczności ma pozycję specjalną. Nie uzyskujemy obrazu podlegającego kontroli zmysłów. Wymiar, o jakim mówi się w teoriach kwantowych, nie tłumaczy się na wymiar odbierany zmysłowo. Pewne rzeczy można przybliżać wyobraźni poprzez analogie w stylu Bohra, w istocie poprzez metafory.

To, że jakieś zjawisko pozostaje p o z a naszą matematyką, nie znaczy że jest niematematyczne. Jest po prostu dla nas matematycznie pustą krainą. Na tym niewielkim fragmencie, który jest nam dostępny, stwierdzenie, że przyroda jest matematyczna, jest nie więcej niż t a u t o l o g i ą.

Pójdźmy jednak krok dalej za tautologicznością tej tautologii. Przyjmijmy sposób widzenia zafascynowanego Schopenhauerem Witkacego, że świat zewnętrzny zawdzięcza swoją matematyczność n a m. Matematyka nie wnika jednak w istotę świata, daje nam tylko pewien przekaz. Grawitacja jest wielką tajemnicą świata, a my dostrzegamy tylko kwadrat w prawie ciążenia i związek tego kwadratu z eliptycznością torów planet. Stwórca nie musiał znać tych wzorów, nie były mu one potrzebne dla rozumienia swego zamysłu. Nic nie ujmiemy, a nawet przeciwnie, dodamy powagi Stwórcy, jeśli uwolnimy Stwórcę od wchodzenia w nasze wzory matematyczne.

Arytmetyzacja matematyki

Intuicje, które kierowały Calculusem, a które jeszcze wystarczały Eulerowi, zmuszone były w końcu dać się wyręczyć radykalnemu środkowi, jakim była arytmetyzacja analizy matematycznej dokonana w początkach XIX wieku za sprawą Cauchy'ego. Analiza matematyczna Cauchy'ego jest od samego początku całkowicie arytmetyczna. Prostej nie musi się widzieć geometrycznie. Prosta ma być teraz systemem liczbowym, a funkcje – dawne fluenty – określone są arytmetycznie punkt po punkcie. Nie musimy widzieć, by liczyć.

Cauchy nie poszerzał matematyki na ten sposób, w jaki kilka wieków wcześniej poszerzył matematykę Calculus, podporządkowując matematyce niedostępne jej dotąd rejony *odczuwania* świata. Matematyka Cauchy'ego nie poszerzała zmysłu matematycznego. Był to nawet ruch wsteczny, wykluczający z analizy pewne jej idee, jeśli nie dawały się poddać jedynej w niej idei, którą była *ścisłość* natury arytmetycznej. Cauchy *zredukował* analizę Newtona do pojęcia liczby. Nie był to wszakże powrót do idei pitagorejskiej. Nie wchodzi się dwa razy do tej samej rzeki. Liczba u Cauchy'ego nie była dawną czystą ideą pitagorejską, lecz tworem myślowym, który wszedł do matematyki jako *continuum liczbowe*, pomyślane tak, by mogło być polem, na którym dawne pojęcia i postulaty Newtona mogły być ukształtowane w teorię i twierdzenia. W niedługim czasie pojawiła się idea zredukowania całej matematyki do kilku prostych zasad, chociaż nie od razu przewidziano na jakiej drodze dojdzie do wielkiej unifikacji. Kronecker uważał, że samo pojęcie liczby należy zostawić takie, jakim było. Protestował, widząc próby szukania unifikacji w pojęciach bardziej pierwotnych.

W matematyce Cauchy'ego funkcja przestawała być prawem zależności. Nie było przeszkód dla określania funkcji punkt po punkcie, co pomijało ukształtowane dotąd intuicje, chociaż dowierzano funkcjom zadawanym dowolnym ruchem ręki, a więc ciągłym z samej swojej natury. Okazało się wszakże, że dowolny ruch ręki nie wnika w pełni we wszystkie aspekty intensywności procesów. Ciągłość nie zapewnia istnienia pochodnej, a całka nie zawsze jest zdolna do odtworzenia funkcji z istniejącej wszędzie pochodnej. Okazało się, że to przekonanie Calculusów i Newtona ma jakieś wyjątki. Cała druga połowa XIX wieku i wiek XX w matematyce to koncert frapujących wyjątków, jakie zaczęła dostarczać pozbawiona dawnych ograniczeń zarytmetyzowana matematyka.

Odczuwamy nostalgię za matematyką Dnia Szóstego, ale nie wydaje się, by mogła ona poddać swojemu oglądowi rytm Dnia Pierwszego, czemu naprzeciw wyszedł właśnie Augustine Cauchy. W świecie Dnia Szóstego zjawiska mają charakter jakościowy i objawiają się nierównościami. Równościom pozostawiony jest status wątpliwych co do zaistnienia stanów granicznych. Arytmetyczność to koncert równości, tożsamości i równań, a więc samych osobliwości z punktu widzenia świata Dnia Szóstego. Doznania redukują się do dwóch wartości logicznych, otwierając jednocześnie furtkę ku dwuwartościowej kombinatorycznej eksplozji.

Hermite i Poincare sprzeciwiali się tej inwazji osobliwości, ale też i odcięciu matematyki od jej źródeł przyrodniczych, z których matematyka już nie wyrastała, lecz do których jedynie mogła w r a c a ć poprzez z a s t o s o w a n i a – pojęcie d a w n i e j n i e z n a n e.

Poszerzanie intuicji

Okazało się jednak, że nasza wyobraźnia potrafi rozbudować się i adaptować wspomniane osobliwości. Potrafiliśmy rozszerzyć nasz zmysł matematyczny, wbudowując zarytmetyzowaną analizę w naszą świadomość. Zdolność naszej świadomości do adaptacji w sytuacjach daleko odbiegających od doświadczeń zmysłowych okazała się większa niż ta, którą widzieli wielcy sceptycy. Mimo że nie obserwujemy funkcji Cantora – Lebesgue'a w zjawiskach przyrody, to jednak umiemy ją umieścić nie tylko w naszym świecie S, ale potrafimy sobie wyobrazić pewne stany graniczne zjawisk przyrody, w których ta funkcja się pojawia się już nie jako osobliwość, lecz jako stan graniczny idealny.

Przykład zarytmetyzowanej matematyki stawia przed nami pytanie o to, jak daleko świat S naszych myśli może pójść w adaptacji osobliwości arytmetycznych, wbudowując odpowiednią w nas zmysłowość już ściśle matematyczną, o której pisze Felix Klein w jednym ze wspomnianych na wstępie wykładów.

Wydaje się, że ta zdolność adaptacyjna jest daleka od wyczerpania pod warunkiem wszakże, by nie naruszone były p r a w a jakimi świat S się rządzi. Dowód komputerowy twierdzenia o czterech barwach nie spełnia tego warunku. Świat S nie pozwala się wyręczać w potwierdzaniu niewypracowanych przez siebie prawd. Akceptacja prawdy jest w jego gestii i żaden dowód, który nie angażował emocjonalnie świata S, nie może być przez świat S uznany. Dano to kiedyś do zrozumienia Galileuszowi, który zważył pole pod cykloidą i mimo że wynik był prawidłowy, nie zaistniał w matematyce.

Zbiór i liczba

Z b i o r y są już u Euklidesa. Słynny dowód nieistnienia największej liczby pierwszej poprzedzony jest w *Elementach* rozwinięciem teorii podzielności wykorzystującej rytm indukcyjny z b i o r u liczb naturalnych. Wraca do tego Gauss. Zbiór nie jest u Gaussa, podobnie jak u Euklidesa, jeszcze pojęciem, lecz jedynie wygodą słowną. Ale teraz zbiór nie musi być z góry dany. Ten zbiór się w p r o w a d z a do rozważań i w p r o w a d z a się działania na jego elementach. Przykładem jest zbiór przedstawiający kratę liczb całkowitych na płaszczyźnie z działaniami takimi jak na liczbach zespolonych. Po wprowadzeniu pojęcia podzielności powstaje system liczbowy inny niż znany dotąd system liczb całkowitych. Ma sens pojęcie liczby pierwszej i prawdziwe jest twierdzenie o rozkładzie na czynniki pierwsze, ale w pewnych kratach budowanych według tego wzoru są wyjątki dla jednoznaczności rozkładu. Dla Dedekinda – ucznia Gaussa i twórcy algebry abstrakcyjnej – nie było już wątpliwości, że zbiory są nieodłącznym towarzyszem liczby.

Samo pojęcie zbioru nie ma wyraźnego wbudowania w naszą zmysłowość. Zbioru nie widzimy w formie c z y s t e j, lecz zawsze we w c i e l e n i u w jakąś sytuację matematyczną. Z drugiej jednak strony, pojęcie zbioru czystego elementu i należenia do zbioru, zaspakaja jakąś naszą potrzebę myślową i było od dawna obecne w rozmyślaniach filozofów. Nie było jednak potrzebą matematyki.

W pierwszym odruchu myśli chcielibyśmy widzieć zbiory czyste jako tworzywo liczby. Tymczasem, jak zauważa A l e x a n d e r W i t t e n b e r g w pełnej gruntownych przemyśleń książce, konkretne czysto myślowe zbiory są dane nam od razu wraz z liczbą. Zbiór i liczba wydają się dla naszej zmysłowości nierozłączne. Filozof, który akurat widzi to zdanie, podpowiada, że może to być r z e c z t a s a m a. Miejmy na uwadze światło, które objawia się nam raz jako strumień cząstek, a raz jako fala, z tym, że liczba ujawnia dwa jakby niezależne aspekty: porządkowy i ilościowy.

Frege proponował widzieć liczbę jako abstrakt powstały po utożsamieniu w s z y s t k i c h zbiorów tej samej liczności. Z pojęć o zbiorze wyprowadzał aspekt ilościowy liczby. Russell wskazał na niewykonalność tego zamiaru z powodu trudności związanych z pojęciem o zbiorze wszystkich zbiorów. Cantor upatrywał załamanie tego zamysłu gdzie indziej. Widział liczby jako pewne wyróżnione elementy swojej skali liczb porządkowych. Abstrakcja Fregego jest zbędna – twierdził – skoro dla abstraktów mamy zawczasu gotowych reprezentantów.

Liczbowość, nie pojęcie o zbiorze, kierowało Cantorem, kiedy będąc na kroku ω, reprezentującym pełny ciąg liczb naturalnych, stawiał kroki ω + 1, ω + 2 i dalsze. Ale czy były one oczekiwane przez jego świadomość, czy był to przymus myślowy, któremu się poddawał? Z tego, co możemy wyczytać z jego *Memoire Nr 5*, było to wymuszenie. Po przekroczeniu progu nieskończoności, nie odczuwamy spodziewanego poczucia poetyczności. Skala liczb porządkowych jest w swoich początkowych partiach, po wyjściu poza liczby naturalne, szara. Dopiero w dużej skali ujawnia się w niej echo rytmu pierwotnego, następstwa, nieodwracalności i niemożliwości powiedzenia s t o p.

Wobec nieokreśloności w naszej zmysłowości, zbiory wcielają się w materię matematyczną nieraz podstępnie bardzo daleko, a wchodząc w nieswoje role, mylą nasze zmysły. Cantora zaskoczyło odkrycie, że płaszczyzna ma tyle samo punktów co prosta, i trzeba było dopiero doświadczonego Dedekinda, aby widzieć, że nie obala to niczego, co naruszałoby nasze wyobrażenia o wymiarze. Zbiory wcielają się – jak się powszechnie sądzi – we w s z e l k i e sytuacje matematyczne. Według Dedekinda, dają tym sytuacjom swoiste ich rozumienie. Rozumiemy lepiej prostą geometryczną, jeśli rozmieścimy na niej jakieś punkty, dochodząc w końcu do zbudowania zbioru nazywanego c o n t i n u u m, którego system elementów odzwierciedla w sensie porządku system punktów prostej. Według Dedekinda, continuum – nie będąc tym samym co prostą – objaśnia pewne aspekty jej budowy. Na elementy zbioru – pisze Dedekind – nie musimy patrzeć jako na budulec, lecz jako na coś co służy. Elementy continuum służą wyjaśnieniu jego budowy, nie są jednak tym, co je stanowi. Tak widział Dedekind rolę zbiorów w *Stetigkeit und irrationale Zahlen*.

Ale zbiory widziane jako budulec konstrukcji matematycznych również nie są nam obce. Już starożytni próbowali myśleć o figurach geometrycznych jako zbudowanych z punktów. Prowadziło to jednak do licznych trudności, które przedyskutował Arystoteles, znając wcześniej wypowiedziane obiekcje Zenona z Elei. Widzimy nadal w tym trudność. Budowa punktowa przestrzeni kłóci się z naszymi o niej geometrycznymi wyobrażeniami. Ale właśnie to dzięki tej niezgodności wiemy o przestrzeni coś, czego bez tego testu byśmy nie wiedzieli. Matematyka penetruje teren hipotezami, które pełnią w niej rolę eksperymentów.

Kiedy oderwiemy się od kontekstu geometrycznego, zbiór staje się dla nas zbiorem czystym i żadna zmysłowość nie broni nas przed pomyśleniem zbioru jako zbudowanego ze swych elementów. Jest to sytuacja Cantora.

Cantor dał dwa dowody, że liczebność punktów continuum przewyższa liczebność zbioru liczb naturalnych, dowodząc, że żaden ciąg jego elementów nie wyczerpuje całego continuum.

W pierwszym dowodzie (1874) trzymał się kontekstu geometrycznego, patrząc na continuum jak na punktowo zbudowaną prostą. Mając ciąg punktów wykazywał, że nie wypełnia on prostej. W tym celu rozważał odcinek omijający pierwszy wyraz ciągu, następnie zawarty we wnętrzu tego odcinka odcinek omijający drugi z kolei wyraz, i to postępowanie kontynuował. Punkt leżący w przekroju tak otrzymywanych odcinków jest różny od każdego z wyrazów ciągu. Istnienie tego punktu na continuum jest zapewnione wymaganiem ciągłości uporządkowania, jakie ma continuum. Otrzymany punkt jest zmysłowo dotykalny.

W drugim dowodzie (1890) – dużo późniejszym – ignoruje porządek na continuum, a widzenie jego elementów redukuje do ich rozwinięć cyfrowych. Dla uproszczenia, niech będą to rozwinięcia dwójkowe, z cyframi 0 i 1, w których te cyfry mogą być traktowane jako symbole. Poza każdym ciągiem tego rodzaju układów cyfrowych jest układ niewchodzący w skład dotąd rozważanych. Przykładem jest układ, którego n-ta cyfra jest różna od n-tej cyfry n-tego z kolei układu. Ten dowód, zwany p r z e k ą t n i o w y m, przebiega w czystej myśli, bez udziału wyobrażeń geometrycznych, a nawet liczbowych...

Dowiedliśmy, że zbiór wspomnianych układów jest większej liczebności niż zbiór liczb naturalnych. Nic nie stoi na przeszkodzie, by to samo rozumowanie przeprowadzić na tym większym zbiorze, rozpatrując na nim funkcje, których wartościami są symbole 0 i 1. Otrzymany zbiór jest liczebniejszy od poprzednio otrzymanego. Nie można zatrzymać myśli przed pomyśleniem dalszego takiego kroku. Skala liczebności zbiorów okazuje się niczym nieograniczona!

Poprzedni dowód, geometryczny, nie powodował tego rodzaju e k s p l o z j i. Zbiory związane z sytuacjami kontrolowanymi zmysłowo nie eksplodują!

Podane dwa dowody są w pewnej analogii do dwóch dowodów istnienia wielkości niewspółmiernych, które przekazała nam starożytność. Niewspółmierności były odkryte najpierw w geometrii na przykładach, między innymi boku kwadratu i przekątni oraz boku i wysokości w trójkącie równobocznym, z indywidualnymi dla każdego przypadku dowodami opartymi na prawach przestawania trójkątów. Późniejszy dowód Euklidesa oparty na twierdzeniu liczbowym o jednoznaczności rozkładu liczby na czynniki pierwsze, daje jednym rozumowaniem nieskończoną serię przykładów, co na owe czasy można było uznać za eksplozję. W dowodzie uczestniczyło pojęcie zbioru.

Dobry porządek

Profesor Mikusiński chciał się koniecznie sam przekonać, że lemat Zorna można wyprowadzić nie używając liczb pozaskończonych, i podał ładny tego dowód. Budował w tym celu w danym zbiorze częściowo uporządkowanym łańcuch nieprzedłużalny przy pomocy samego tylko pewnika wyboru. Lubił przypominać ten swój dowód, ale za którymś razem można było usłyszeć uwagę: chciałem ominąć liczby porządkowe, ale kiedy budowałem łańcuch nieprzedłużalny, ten – mimo, że wcale tego nie chciałem – okazał się dobrze uporządkowany.

Podziwia się Cantora za jego konstrukcję skali dobrze uporządkowanej, Ale nietrudna obserwacja przekonuje nas, że ten dobry porządek tworzył się sam! Wcześniej niż Cantor przekonał nas w *Was sind und was sollen die Zahlen?* o apriorycznym wbudowaniu w nas dobrego uporządkowania Dedekind. Mając myśl, nie potrafimy uwolnić się od myśli o tej myśli i wpadamy w przymus iteracji, w indukcyjnie dynamiczny system liczb naturalnych. Ten porządek, nazwany umownie d o b r y m, daje nam w podarunku sama natura naszego myślenia. Porządki z w y k ł e nasza myśl zapożycza ze zjawisk spoza świata S.

Uważa się, że dobry porządek to wymaganie dodatkowe. Nic błędniejszego! Znaczyłoby to bowiem, że dla uzyskania dobrego porządku wystarczyłoby najpierw mieć porządek j a k i k o l w i e k, a potem go poprawić. Tymczasem nie umiemy dostać tego jakiegokolwiek porządku samą konstrukcją myślową. Continuum, które punktami wypełnia prostą, budujemy mając wcześniej podpowiedź od przyrody. Zgodziłby się z tym Hermann Weyl. Ten o naturze fizycznej pręt n i e j e s t tworem arytmetycznym. Arytmetycznie budujemy tylko jego pewną egzemplifikację.

Wymaganie zwykłego liniowego porządku jest logicznie słabsze, ale matematyka apriorycznie w nas wbudowana, nie obdarzyła nas żadnym przykładem, Ogólniejszą, podobną sytuacją jest próba pomyślenia d o w o l n e g o z b i o r u bez odwoływania się do żądnych zmysłowych spostrzeżeń. Nie umiemy pomyśleć tu innych przykładów poza systemem liczb naturalnych i jego odcinkami początkowymi. Dorzućmy to tego jeszcze odcinki liczb porządkowych Cantora. Nie mamy innych apriorycznie wbudowanych w nas zbiorów niż wspomniane zbiory l i c z b, które same są w istocie liczbami. Wspominaliśmy o tym już wcześniej powołując się na Wittenberga. Nie zwracają uwagi na ten paradoks twórcy teorii mnogości.

Matematyka aprioryczna w nas wbudowana jest matematyką a r y t m e t y c z n ą. Ten n i e n a s z rdzeń jest s o l ą naszej matematyki. Ale jej k w i a t e m jest matematyka s ł a b a, ta, którą sami myślowo wypracowujemy. Jej przykładem są kontemplacyjne zasady geometrii i calculusu. Ta matematyka, karmiona postrzeżeniami idącymi od świata zewnętrznego, tworzona jest przy pełnym udziale naszej świadomości, Wydaje się, że mogłaby zaistnieć bez udziału arytmetyki. Ale można też pomyśleć matematykę czysto arytmetyczną. Myśląc o naturze matematyki, powinno się brać pod uwagę te dwie skrajności, wcale realne.

Eksplozja i zwieńczenia

Widzieliśmy wcześniej, jak zbór w postaci czystej pozostawiony sam sobie eksploduje niedającymi zatrzymać się przez myśli myślowymi konstrukcjami. Rozpatrywana tam funkcja przyjmująca na elementach zbioru symboliczne wartości 0 lub 1, może być widziana jako p o d z b i ó r zbioru, złożony z tych elementów zbioru, na których funkcja przyjmuje wartość

1. Twierdzenie Cantora można więc rozumieć tak, że z b i ó r p o d z b i o r ó w zbioru przewyższa liczebnością sam zbiór. Poprzednią eksplozję widzimy teraz nieco prościej.

Tak liberalne rozumienie podzbioru napotyka na określone przeszkody, jeśli continuum widzimy geometrycznie. Od podzbiorów teraz można czegoś wymagać, na przykład tego, by można było na nich rozwinąć pojęcia miary i całki. Jeśli zbiór ma strukturę grupy, sensowne są podzbiory zamknięte ze względu na działanie grupowe, to jest podgrupy Na zbiorze czystym nie ma możliwości n i e p o m y ś l e n i a zbioru, który da się pomyśleć, a nawet do jego usunięcia, jeśli już zawitał do naszych myśli. Nie możemy nie pomyśleć zbioru pustego, jeśli już jakoś został pomyślany. Ta niemożliwość niepomyślenia zaciążyła na całej teorii zbiorów. A jest to niczym innym niż to, co Cantor w *Memoire Nr 5* nazywał s w o b o d ą przyjęcia na myśl wszystkiego, co nie prowadzi do logicznych sprzeczności. W innych słowach, i raczej z troską niż z wyczuwanym tu sarkazmem, wypowiedział to Profesor Andrzej Mostowski w latach 50. na Kongresie w Pałacu Staszica.

Teoria zbiorów zna jeszcze jeden przymus, który jest wspólny s w o b o d n i e rozwijającym się teoriom. Jest to przymus z w i e ń c z e ń. Zetknęli się z tym już Ojcowie Kościoła i filozofowie scholastyczni (inni niż ci, którzy byli prekursorami calculusu), dyskutując o uniwersaliach takich jak praprzyczyna i omnipotencja. Ale wcześniej był Platon, który dla połączenia rzeczy w świecie oddzielonych, powoływał do świata S naszych myśli idee n a d r z ę d n e, które miały te rzeczy wytłumaczać.

Ten przymus myślowy kierował filozofów bizantyńskich – jak czytamy o tym u Focjusza – do rozumienia wielości poprzez dostrzeżenie w niej wspólnotowej jedności. Surowa myśl Arystotelesa i Newtona odrzucała tego rodzaju myślowe konstrukcje, wypowiadając dumnie swoje *hypotheses non fingo*, a Ockham wcześniej wypowiadał swoje: nie mnożyć bytów bez potrzeby.

Coś podobnego napotykamy i w matematyce czystej, będącej konglomeratem nieopowiązanych ze sobą dyscyplin, walczących o miejsce w naszym świecie S. Rozumienie całości, jakie osiągamy rozbudowując pojęcia poza granice wszelkiego odczuwania zmysłowego, jest w istocie ułudą rozumienia. Dodajmy też, że znane nam dotąd zbyt rozbudowane teorie pryskały jak bańki mydlane, będąc w istocie naszymi życzeniami myślowymi. Przypominają się nam przy tej okazji słowa Kroneckera z listu do Cantora o teoriach, które przemijają, a jedyne co z nich zostaje, to wzory. Zastąpmy wszakże to archaiczne słowo terminem wzorzec, bardziej odpowiadającym współczesnej matematyce.

Bo matematykę można rozumieć też jako kolekcję wzorców, unikając budowania gmachu zwieńczającego wszystko. Mamy tu Sierpińskiego, mistrza detalu. Wchodzimy do matematyki odkrywając jakiś jej frapujący fragment. Te frapujące fragmenty są istotą matematyki, wiążą ją poprzez odczucia zmysłowe z prawdziwą rzeczywistością. W ich odkrywaniu zmysł matematyczny wychodzi poza rolę kuriera, w której widział matematyków niechętny matematyce Filozof.

Znane z przeszłości „prawa najwyższe", którymi obdarzali nas Platon i Hoene-Wroński, dają jedynie ułudę rozumienia. Nie dała się zamknąć analiza matematyczna w wielce obiecujący świat szeregów Taylora, ani geometria w swoje formalizmy osiemnastowieczne. Przypominając jednak te próby, myślimy w istocie o wielkich formalizmach naszych czasów. Na ich przykładzie widzimy, jak po okresie rozwoju i ukazywaniu matematyce nowych horyzontów, przychodzi moment, kiedy zaczynają matematykę ograniczać. W stadium początkowym teorii zbiorów m o g l i ś m y się cieszyć z tego, że w tak wielu rzeczach d a j e s i ę widzieć zbiory. Współczesne tendencje z m u s z a j ą nas do widzenia w postaci zbioru każdej rzeczy.

Spojrzenie w przyszłość

Czytamy u przyrodnika José Delgado (1971), że istotom żywym konieczny jest dla ich zdrowia wewnętrznego nieprzerwany dopływ nowości i pobudzeń idących z z e w n ą t r z. Jest to p o k a r m, bez którego nasze siły myślowe słabną. Jeśli ten dopływ się utrzyma, matematyka ma zapewniony rozwój. Bo nie są dla matematyki przeszkodą trudności dowodowe. Znaczenie twierdzenia matematycznego nie zależy od tego, czy znalazło się dla niego dowód, ale od tego, jakie ma miejsce w naszym świecie S. Lemat Zorna i lemat Urysohna nie przestałyby mieć znaczenia, jeśliby pozostały niedowiedzionymi zasadami. Jeśli stwarzałyby trudności, takie jak kiedyś aporie Zenona, matematyka znalazłaby sposoby, by sięgnąć po przebudowę pojęć. Dlatego to nie twierdzenie Gödla jest tym, co mogłoby zahamować rozwój matematyki.

Przyczyny do obaw są gdzie indziej. Może wydać się niestosownym wypowiadać je w czasie, w którym na naszych oczach padły największe stuletnie problemy, a natężenie potoku rezultatów matematycznych przewyższa wszystko to, co w przeszłości. Niepokój ma jednak swe uzasadnienie, bo natężenie potoku odkryć matematycznych zawdzięczamy uruchomieniu całego nagromadzonego dotąd zasobu środków arytmetycznych, które znajdują dla siebie pokarm wśród problemów już dawniej postawionych.

Wyczerpuje się nasze bezpośrednie odczuwanie matematyki obecnej w zjawiskach. Jak pisze S. P. Zervos, nie uczymy się od naszych braci mniejszych, odcinając się od nieczłowieczych źródeł metafizyki. Ale i nauki przyrodnicze przestały być hojne w problemy. To dzięki nim matematyka rozszerzała się o nowe pola badań, matematyzując nowe obszary. Nie zaspakaja tej potrzeby zmatematyzowana krańcowo fizyka, której problemy są najczęściej wtórnymi problemami matematycznymi. Wgląd w mikroświat mógłby wzbogacić matematykę, ale tak nie jest. Dla jego penetracji fizycy wolą eksploatować dawno już rozwinięte metody matematyczne.

Moglibyśmy wszakże uznać, że matematyka rozwinęła sie już w określonym kształcie i domaganie się stałego jej rozwoju ma postać obsesji. Dlaczego tak nam na matematyce zależy?

Czy na twierdzeniach, które gdy zyskają dowód, czeka status szacownych przedmiotów kolekcji? Nie. Bo chodzi też o utrzymanie napięcia myślowego, tego niepokoju, który towarzyszy pytaniu matematycznemu. Niepokój matematyczny – jego natężenie i jakość – jest tym, co daje nam poczucie żywotności myślowej.

Obawiamy się też zejścia ku matematyczności czystej. Nawet przy całkowitym braku nowych zadań, nasza myśl nie zatrzyma się. Poddana rytmowi pierwotnemu będzie rozwijać do wyczerpania nagromadzonych dotąd możliwości. Poznawanie świata, w którym matematyka dotąd uczestniczyła, zejdzie w niej na daleki plan. Wyobrażamy sobie stan graniczny, kiedy zostaniemy s a m n a s a m z e z b i o r e m i l i c z b ą, których związek ze światem zewnętrznym jest nieoczywisty. Odczuwamy możliwość tej krańcowości. Myśli będą nie tylko myślały się same, ale będą nas zmuszały do gonitwy wraz z nimi bez obietnicy ich przeżywania. Potok myśli może być wtedy pełen prawd – przy tym absolutnych, bo koniecznych – nieznajdujących wszakże oparcia w doznaniach zmysłowych, przez co niemających nic więcej do powiedzenia poza tym, że są prawdami.

Bibliografia

Arystoteles, *Fizyka*.

Bellow S., *Herzog*, tłum. K. Tarnowska, Czytelnik, Warszawa 1971.

Biełyj A., *Petersburg*, tłum. S. Pollak, Czytelnik, Warszawa 1974.

Dedekind R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig 1888.

Delgado J., *Mozg i soznanije* (przekład), Mir, Moskwa 1976.

Devlin K., *Żegnaj Kartezjuszu, Rozstanie z logiką w poszukiwaniu nowej kosmologii umysłu*, tłum. B. Stanosz, Prószyński i S-ka, Warszawa 1999.

Dębiec J., *Mózg i matematyka*, Biblos, Tarnów 2002.

Dimnet E., *Sztuka myślenia*, tłum. Z. Czerniewski, Biblioteka Wiedzy 22, Trzaska, Evert i Michalski, Warszawa 1936.

Frege G., *Grundlagen der Arithmetik*, Breslau 1884.

Hardy G.H., *A Mathematician's Apology*, wydanie polskie, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.

Klein F., *Odczyty o matematyce, 1893*, tłum. S. Dickstein, Wydaw. Red. Wiadomości Matematycznych, Warszawa 1899.

Mendelssohn M., *O oczywistości w naukach metafizycznych*, tłum. R. Kuliniak, T. Małyszek, Wyd. Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 1999.

Mikusiński J., *O twierdzeniu Zorna*, „Wiadomości Matematyczne" 1967, 9, s. 225–232.

Neumann J. von, *The Mathematician*, *Works on the Mind*, vol. I, no 1, University of Chicago Press, Chicago 1947, s. 180–196; *The Mathematician*, Part 2 – przedruk March 2006.

Potocki J., *Rękopis znaleziony w Saragossie* (Dzień trzydziesty siódmy), tłum. E. Chojecki, Czytelnik, Warszawa 1976.

Sziłow G.E. [Gieorgij Kaciweli], *Matiematika i diejstwitielnost'*, 1975.

Tatarkiewicz W., *Historia filozofii*, I – III, PWN, Warszawa 2007.

Tolle E., *Potęga teraźniejszości*, tłum. M. Kłobukowski, Galaktyka, Łódź 2010.

Weyl H., *Das Kontinuum*, Leipzig 1918.

Wittenberg A.I., *Vom Denken in Begriffen*, Birkhäuser Verlag, Basel – Stuttgart 1957.

Zervos S.P., *On the development of mathematical intuition*, „Tensor" N. S. 26.

O niektórych aspektach platońskiej filozofii matematyki

Bogdan Dembiński
Instytut Filozofii, Uniwersytet Śląski

On some aspects of mathematical platonism

Abstract

Modern philosophers of mathematics in their discussions tend to refer to mathematical platonism. Usually they believe that they talk about philosophical thought of Plato himself and understanding of mathematics that was introduced by the ancient philosopher. Unfortunately, contemporary mathematical platonism has very little in common with original platonism. In this paper I would like to clarify this issue and present Plato's philosophy of mathematics.

Keywords

philosophy of mathematics, mathematical platonism, history of philosophy, Plato

Współcześni filozofowie matematyki często skłonni są odwoływać się w dyskusjach do matematycznego platonizmu[1]. Zazwyczaj są przekonani, że bezpośrednio lub pośrednio przywołują myśl samego Platona i jego rozumienie matematyki. Niestety, najczęściej mamy do czynienia z pojmowaniem platonizmu matematycznego, które z propozycją samego Platona niewiele ma wspólnego. Chciałbym kwestię tę wyjaśnić i przedstawić stanowisko, jakie w filozofii matematyki zajmował Platon.

Trzy sprawy wydają się istotne. Pierwsza, dotyczy platońskiej teorii dwu światów. Druga, sposobu budowania struktury matematycznej. Trzecia, ontologii matematyki.

Popularne przekonanie skłania do twierdzenia, że w przypadku filozofii matematyki Platona mamy do czynienia z dwoma oddzielonymi od siebie światami, światem zjawisk (cienie) oraz światem idei. Wyprowadzany jest z takiego założenia wniosek, który głosi, że świat matematyki należy do platońskiego świata idei, zaś poza nim istnieje jedynie czasoprzestrzenna, zjawiskowa rzeczywistość. Przyjmuje się, że świat idei jest wieczny i niezmienny, zjawiska zaś są zmienne i czasowe. W takim świecie przedmioty matematyki uzyskują status idealnego bytu i są w swoim istnieniu niezależne od podmiotu i przynależą do świata idei. Człowiek może jedynie odkrywać ów autonomiczny świat matematyki.

[1] Zob. J.R. Brown, *Philosophy of Mathematics. A contemporary introduction to the world of proofs and pictures*, Routledge, New York – London 2008 (II ed).

To popularne przekonanie nie jest, niestety, zgodne ani z filozofią Platona, ani z jego rozumieniem matematyki. Utrwaliło się ono jednak w dziejach interpretacji filozofii platońskiej i przeniosło na grunt filozofii matematyki[2]. Przyczyna tkwi w uproszczonej wizji samego platonizmu, która przyjmuje istnienie jedynie dwu poziomów rzeczywistości, za które uznaje się idee oraz zjawiska. Przedmioty matematyki sytuowane są zaś po stronie idei.

Tymczasem Platon analizując sposoby istnienia przedmiotów matematyki uznał, że matematyka i przedmioty matematyczne nie są związane ani ze światem idei, ani ze zjawiskami[3]. Twierdził, że zajmują one pozycję pośrednią i nie przynależą do żadnego z nich. Są natomiast tworem rozumu. Stanowisko to wymaga szczegółowego wyjaśnienia, ma ono bowiem decydujący wpływ na rozumienie filozofii matematyki Platona.

Platon stara się wyjaśnić tę kwestię przede wszystkim w VI i VII księdze *Państwa* oraz *Liście VII*.

Oryginalnym punktem wyjścia czyni przekonanie, które głosi, że pierwszy stopień poznania matematycznego wyłania

[2] Zob. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2012, s. 20–22.

[3] Platon, *List VII. Państwo*, 509d-511e. Zob. B. Dembiński, *Późna nauka Platona*, Wydawnictwo UŚ, Katowice 2003, s. 53–80. Arystoteles wielokrotnie potwierdza przekonanie Platona, że przedmioty matematyczne zajmują pozycję pośrednią między zjawiskami a ideami. W późnej nauce Platon przyjmuje istnienie matematycznych idei, te jednak nie stanowią matematycznych przedmiotów, lecz są ich bytowym, ostatecznym uzasadnieniem, które wykraczają poza samą matematykę. Tamże.

się z obserwacji natury i jej zjawiskowej postaci. Powstają wtedy zmysłowe wyobrażenia, które dostarczają wyłącznie obrazów zjawisk (*eikasia*). Widzimy, powiada Platon, odbicia rzeczywistości, które rodzą się w naszych zmysłach. Są one niedoskonałe i często złudne. Na kolejnym etapie próbujemy wyobrażenia te uwiarygodnić (*pistis*). Próbujemy potwierdzić dane zmysłowego poznania, badając i obserwując określone stany rzeczy z możliwie wielu perspektyw. Istotnym elementem tego badania jest umiejętność odczytywania wzorców, obecnych w zjawiskach. Wskazują one na regularności i porządek w układach tych struktur. Platon ma tu na myśli wzorce ruchu, wzorce proporcji układu części, wzorce harmonii, wzorce struktur zjawiskowych, czy też (w odniesieniu do działań człowieka) wzorce etyczne i estetyczne. W kontekście platońskiej filozofii matematyki najistotniejszą rolę pełnią wzorce ruchu ciał niebieskich, ufundowane na przysługującej człowiekowi zdolności do widzenia. Platon zdolność tę uznaje za najwyższy dar bogów. Powiada: „ A teraz powiedzieć trzeba o ich (oczu B.D.) czynności, z której pożytek jest największy i dlatego je nam bóg dał. Wzrok, według mego zdania, jest dla nas przyczyną największego pożytku. Bo z obecnych myśli o wszechświecie żadna nie byłaby nigdy wypowiedziana, gdybyśmy ani gwiazd, ani słońca, ani nieba nie widzieli. A tymczasem oglądanie dnia i nocy, miesiące i obiegi roczne wytwarzają liczbę i pojęcie czasu, i od nich pochodzą badania nad naturą wszechświata”[4].

[4] Platon, *Timajos*, 47ab.

Obserwacja wzorców obecnych w naturze: rytmów, motywów, harmonii, symetrii czy proporcji, kieruje uwagę podmiotu na możliwość uchwycenia istoty zjawisk, które są przedmiotem badania. Pojawia się wtedy „podejrzenie prawdziwości", które określa Platon mianem „prawdziwego mniemania" (*alethes doksa*). Jest ono podstawą formułowania naukowych hipotez. Hipotezy, aby potwierdzić swoją wartość, muszą zostać poddane działaniu wyższej władzy poznawczej. Jest nią rozsądek (*dianoia*), którego funkcja polega na badaniu powiązań i relacji, jakie zachodzą między elementami wzorców w obrębie danej struktury. Zdolność ta związana jest z umiejętnością logicznego rozumowania oraz analizą związków przyczynowych, które Platon nazywa „przyczynowym splataniem"[5].

Rozsądek jest władzą podmiotu, która w rozumieniu platońskiej filozofii matematyki odgrywa rolę zasadniczą. Posiada on bowiem zdolność do tworzenia intelektualnych modeli zmysłowo danych stanów rzeczy oraz wzorców dostrzeganych w naturze. Umożliwia to ich rekonstrukcję na poziomie świadomości. Model powstaje w oparciu o analizę zmysłowo danych stanów rzeczy i wzorców oraz badanie związków, które zachodzą między jego elementami. Tworzenie modelu opiera się na umiejętności abstrahowania i jest wytworem czynności stwierdzających stałe występowanie pewnego zespołu cech w pewnej klasie przedmiotów[6]. Takim modelem jest, zdaniem Platona,

[5] Platon, *Menon*, 97e–98a.

[6] Zob. P. Hadot, *Filozofia jako ćwiczenie duchowe*, tłum. P. Domański, IFiF PAN, Warszawa 1992, s. 184.

przedmiot matematyczny. Przysługują mu różne nazwy, może być on w określony sposób definiowany i posiadać różne zmysłowe reprezentacje (modele fizyczne). Całość tych działań stanowi podstawę budowania matematycznej teorii[7].

Przedmiot matematyczny jest wytworem intelektualnej aktywności podmiotu. Można rozważać wewnętrzną strukturę modelu, można też analizować powiązania modelu z innymi modelami, badać, które z nich są możliwe, które konieczne, a które całkowicie wykluczone. Platon jest skłonny twierdzić, że systemy powiązań w obrębie modelu mogą wyjaśnić istotę jego elementów, ponieważ to, czym są elementy i jaka jest ich natura, zależy od całego systemu relacji z innymi elementami[8]. Dzisiaj powiedzielibyśmy, że Platon reprezentuje stanowisko strukturalistyczne. Zdołała to wykazać w swojej pracy V. Hartle[9].

Analiza modeli i ich struktury jest przedmiotem pracy matematyków.

Jednak matematyk, a tym bardziej filozof matematyki, nie może uniknąć pytania o prawomocność przedmiotów matematyki. Pojawia się bowiem pytanie: Co sprawia, że przedmioty matematyki, będąc tworami człowieka, nie są tworami dowolnymi?

---

[7] Platon, *List VII*.

[8] Zob. B. Dembiński, *Structuralism in the Platonic Philosophy of Science*, [w:] *Between Philosophy and Science*, (red.) M. Heller, B. Brożek, Ł. Kurek, Copernicus Center Press, Kraków 2013.

[9] V. Hartle, *Plato on Parts and Wholes. The Metaphysics of Structure*, Clarendon Press, Oxford 2002.

Platon, poszukując uzasadnienia matematyki, odwołuje się do sfery idei, miar konstrukcyjnych świata. Chodzi o to, aby wyjaśnić, skąd matematyka czerpie swoje uzasadnienie. Nie może być nim wyłącznie obszar zjawisk, jako że te, zdaniem Platona, domagają się same miar, które decydują o ich uporządkowaniu. Miary te istnieją jednak inaczej niż zjawiska. Miary organizacji zjawisk są niezmienne i nie podlegają procesowi powstawania i ginięcia. Nie są też zależne od stanowienia podmiotu. W stosunku do miar możemy powiedzieć tylko, że są, i że są zawsze takie, jakie są. Dlatego zgodnie z twierdzeniem Parmenidesa z Elei i tradycją grecką, należy definiować je, jako byty, gdyż bytem jest to, co jest, i co nie podlega zmianie. Miary platońskie stanowią istotę struktury i procesów, którym podlegają zjawiska. Mogą więc przyjmować postać proporcji, harmonii, bądź praw, które określają stany zjawiskowe. Miary, jak wspomniałem, istnieją inaczej niż ich realizacje. Celem filozofii i nauki jest dotarcie do miar organizacji danego rodzaju porządku, niezależnie od tego, czy będzie to porządek kosmiczny, etyczny czy estetyczny. Dotyczy to również porządku matematycznego. Przedmioty matematyki, będące rezultatem podmiotowego opisu porządku kosmicznego, mają i muszą mieć swoje obiektywne (poza podmiotowe) uzasadnienie. Platon znajduje je w istnieniu miar matematycznych, idei matematycznych. Te jednak są radykalnie różne od przedmiotów matematycznych. Przede wszystkim mają status bytu, a więc są składową obiektywnego kosmicznego porządku, który nie jest zależny od stanowienia jakiegokolwiek podmiotu. To matematyka jest zależna od kosmicznego porządku i praw, oraz zasad, które nimi zawiadują. W tym sensie porządek ten można by nazwać „matematycznością świata". Odpowiadałaby ona własności świata, która byłaby podstawą możliwości opisywania go w języku matematyki. Ale sama ta własność nie jest matematyką, jest porządkiem określonym przez zasady i prawa kosmicznego porządku. Dlatego „matematyczność świata" związana być musi z ideami, zaś matematyka z podmiotowym sposobem ich opisywania. Nie można, jak słusznie twierdzi Arystoteles, operować na ideach, można co najwyżej badać związki, jakie między ideami zachodzą. To jednak jest przedmiotem nie metody matematycznej, lecz dialektycznej. O ideach rozważać można dialektycznie, zaś matematycznie operować możemy wyłącznie na przedmiotach matematycznych. To istota różnicy, jaka zachodzi między światem idei i matematycznych przedmiotów. Podobnie ma się rzecz ze zjawiskami. Miary organizacji zjawisk same nie są zjawiskami, lecz warunkami ich istnienia. Dlatego nie mogą być od zjawisk zależne i ze zjawisk wyprowadzone. Mają one inny status. Ale możemy opisywać zjawiska za pomocą języka matematyki, tworząc modele struktur zjawiskowych i odkrywając miary, które zawiadują organizacją ich porządku. Możemy analizować wzorce manifestujące się w zjawiskach, badać ich istotę i strukturę. Ale i tutaj matematyka nie może tworzyć struktur zjawiskowych i działać, jak Bóg Leibniza, który licząc stwarza. Możemy jedynie analizować strukturę zjawisk, czyniąc taką analizę podstawą rozumienia. To wyłączna domena matematyki. Zatem rola matematyki jest rolą pośredniczącego narzędzia opisu świata, a nie odrębnym od zjawisk i idei samodzielnym światem, czy światem, który byłby tożsamy z ideami. Powiada Platon: „Nieprawdaż – powiedziałem – tym tam malowidłem na niebie można się posługiwać, jako przykładem przy nauce o tamtych rzeczach zupełnie tak, jakby ktoś natrafił na wykresy wykonane osobliwie i pracowicie ręką jakiegoś Dedala albo innego majstra czy tam malarza. Człowiek znający się na geometrii, zobaczywszy takie rzeczy, uważałby, że to robota bardzo piękna, ale śmiesznie byłoby patrzeć na nie poważnie, jako na prawdę i chcieć ją w nich uchwycić, jeżeli chodzi o równość, o podwójność lub o inną jakąś współmierność”[10]. Myląca dla zwolenników matematycznego platonizmu jest nieświadomość różnicy, jaka zachodzi między ideami matematycznymi a przedmiotami matematyki. Platon wyjaśnia tę sytuację między innymi w *Liście VII*.

Proponuje Platon, aby rozważyć przedmiot matematyczny, koło. Jest ono określoną strukturą, której możemy przypisać pewną nazwę. Mogłaby ona ulec zmianie, gdyż – jak przekonuje – „żadna, twierdzimy [nazwa – B.D.], nie przysługuje żadnemu [przedmiotowi – B.D.] na mocy jakiejś pewnie ugruntowanej zasady i nie ma w tym nic niemożliwego, aby to, co teraz nazywamy okrągłym, nazwać prostym, a to, co prostym, okrągłym, i aby dla tych, którzy nazwy te przestawią i będą je stosować odwrotnie, nie miały one mniejszej pewności w użyciu”[11].

[10] Platon, *Państwo*, 529de, tłum. W. Witwicki.
[11] Platon, *List VII*, 343ab, tłum. M. Maykowska.

Dalej próbujemy wydobyć to, co istotne dla każdej z postrzeganych struktur. Dążymy do zgromadzenia w miarę precyzyjnych określeń, które mogłyby stanowić podstawę właściwej definicji. Następnie budujemy taką definicję, twierdząc, że jest nim „to, czego wszystkie punkty skrajne jednakowo są oddalone od środka". Definicja ta obejmuje wszystko, co krągłe, obłe i koliste[12]. Śledząc dzieje matematyki, należy mieć świadomość, jak trudne może być zadanie podania właściwej definicji. Najczęściej – twierdzi Platon – formułuje się definicję niedoskonałą, opierającą się na określonych wypowiedziach zdaniowych, które „jeżeli składają się z imion, czyli rzeczowników i czasowników dostatecznie pewnej pewności nie posiadają bynajmniej"[13]. W dalszym postępowaniu możemy podjąć próbę zbudowania modelu, czy też schematu ogólnego tego, co definiowane. Możemy też przedstawić rysunki albo przestrzenne jego reprezentacje. Matematyczny schemat ogólny czy model przybiera postać przedmiotu matematycznego. Analiza jego struktury i relacji z innymi strukturami (przedmiotami matematycznymi) zostaje rozwinięta w teorię przedmiotu, obejmującą sobą wszystkie wcześniejsze etapy analizy. Wiedza ta jest najwyższym stopniem poznania, do którego dojść może poznający podmiot dzięki swoim możliwościom poznawczym, tj. zmysłowym spostrzeżeniom, zdolności do abstrahowania i analizie logicznej. Platon wyraża jednak mocne przekonanie, że niezależnie od stopnia precyzji, właściwej czterem

[12] Tamże.
[13] Tamże.

wspomnianym poziomom poznania, należy mieć świadomość „jak niejasne jest każde z owych czterech ujawnień”[14], jak wiele w nich dowolności i niepewności, w jak wysokim stopniu są one uzależnione od poznającego podmiotu i jego poznawczych ograniczeń na każdym etapie badania. Tymczasem poznanie matematyczne nie powinno takich niejasności ani niepewności dopuszczać. Ma być poznaniem, które znamionuje konieczność, powszechność i prawdziwość. Musi, zatem istnieć – zdaniem Platona – jakaś podstawa obowiązywalności twierdzeń matematycznych, umożliwiająca spełnienie tych warunków.

Jest nim, jak powiada Platon „koło, jako takie” (*auto ho kyklos*) uzasadniające istnienie wszystkich czterech dotychczasowych ujawnień. Nazwać je trzeba prawdziwym bytem (*alethes on*) i istotą (*to de ti*). Owo „koło samo” jest bytem, który sytuuje Platon ponad czterema ujawnieniami, nazywając je „tym piątym” *(tu pemptu)*, któremu najbliższe jest, umysłowe ujęcie (czwarte ujawnienie). Koło to istnieje jednak inaczej niż to, które jest intelektualnym modelem, czy też, które rysujemy, bądź tym, które sporządza tokarz. Wszystkie one różnią się od „koła samego”, jak powiada Platon: „[...] przeciwne jest zgoła ‘piątemu’ – we wszystkich punktach swych, bowiem styka się z prostą, podczas gdy ‘koło, jako takie’, stwierdzamy, nie zawiera w sobie w ogóle, ani w mniejszej ani w większej mierze, czegoś, co mu z natury jest przeciwne”[15]. „Koło samo” jawi się

[14] Tamże.

[15] Tamże, 343a.

jako najwyższa, jedyna i niezmienna miara wszelkiej kolistości, jest zatem warunkiem możliwości istnienia wcześniejszych ujawnień. Ponieważ istnieją koła w naturze, muszą one posiadać swoją pozapodmiotową miarę określoności. Jej sposób istnienia jest różny od jej manifestacji, tak jak prawo fizyczne różne jest w sposobie istnienia od jego realizacji fizycznej.

Na tak rozumianej mierze kolistości nie można prowadzić żadnych matematycznych operacji. Istnieje ona obecna w kosmicznym porządku i warunkuje istnienie wszelkiej kolistości. Warunkuje też istnienie przedmiotu matematycznego, jakim jest matematyczny model koła. W tym sensie decyduje też o konieczności, powszechności i prawdziwości przedmiotów matematycznych. Stanowi w ten sposób rodzaj ostatecznego uzasadnienia przedmiotów matematyki. Ale nie jest z nimi tożsama.

Idei miar określoności przedmiotów matematycznych jest wiele. Platon wyróżnia liczby idealne i idealne figury geometryczne. Nie są one przedmiotami matematyki, lecz ich ontycznymi warunkami[16]. Idei takich jest wiele. Wielość ta domaga

[16] Sama jednak monada nie jest traktowana jako liczba, lecz jest rozumiana jako zasada liczby, gdyż z monady powstaje każda liczba. Każda zatem liczba stanowi określoną wielość monad. Czym jest jednak w istocie owa wielość będąca liczbą? Jest ona tym, co precyzyjnie daje się wyrazić, jako określony stosunek monad. Ale, co najistotniejsze, sam stosunek nie jest liczbą, liczba stanowi dopiero jego postać. Przykładowo liczba dwa stanowi postać stosunku 2:1. W tym sensie każdą liczbę matematyczną (naturalną) wyznacza ogólna proporcja, warunkująca jej bycie i określoność. Owa wspólna proporcja stanowi miarę liczby, wyznaczającą jej niezmienną i trwałą postać. Miara ta pozwala „widzieć", czym dana liczba matematyczna w istocie jest,

się uzasadnienia. Platon decyduje się skorzystać z intuicji Pitagorejczyków i wprowadza najwyższe zasady bytowe, których funkcją jest generowanie wielości idei oraz określanie ich tożsamości i zróżnicowania w stosunku do innych idei. Są nimi dwie najwyższe zasady: Jedno i Nieokreślona Dyada[17]. Jedno jest zasadą tożsamości, Dyada zasadą wielości i zróżnicowania. Ich wzajemne oddziaływanie generuje wielość idei, przy czym każda idea uzyskuje w wyniku działania zasad określoność, granicę (*peras*) oraz zróżnicowanie w stosunku do innych idei. Idee te stają się z kolei miarami określoności wszelkich struktur zjawiskowych, wyznaczając i określając strukturę porządku kosmicznego. Ponieważ ostatecznym źródłem określoności jest zasada Jedna, to Jedno staje się dla Platona zasadą najwyższą, którą utożsami on z najwyższym Dobrem, gdyż podstawa i przyczyna kosmicznego porządku musi być uznana za przyczynę najwyższą i ostateczną. Z tego powodu zrozumiałym

i rozstrzygać w każdym przypadku, czy mamy do czynienia z liczbą matematyczną dwa, czy też nie. Platon zasadnie określi ją mianem idei, pragnąc zaś odróżnić ją od innych idei i liczb matematycznych nazwie liczbą idealną. Liczby te stanowią swoiste całości i nie można na nich prowadzić operacji matematycznych, są one bowiem niedodawalne, tożsame z sobą, niezmienne i niezależne od podmiotowego stanowienia. Uchwytując miarę liczby matematycznej dwa, tzn. liczbę idealną dwa, uchwytujemy istotę każdej matematycznej dwójki. Używając języka opisowego, można powiedzieć, że liczba idealna określa cechy strukturalne każdej liczby matematycznej. Zob. B. Dembiński, *Późny Platon i Stara Akademia*, Marek Derewiecki, Kęty 2010, s. 36–37.

[17] Zob. B. Dembiński*, Późna nauka Platona*, dz. cyt.

jest również przyznanie jej miana zasady boskiej. Myśl Platona kulminuje w uznaniu boskiej zasady Jedna-Dobra[18].

W prezentowanych rozważaniach istotnym wydaje się konieczność odpowiedzi na jedno jeszcze ważne pytanie: Skąd bierze się, przyjmowana powszechnie, teza matematycznego platonizmu głosząca, że matematyka jest nauką o bytach idealnych, a przedmioty matematyki są tożsame ze światem platońskich idei?

Należy zauważyć, że źródłem tego przekonania nie jest Platon, lecz jego następca Speuzyp[19]. To Speuzyp zdecydował, że miejsce platońskich idei powinny zająć przedmioty matematyczne. Przypisał im wszystkie atrybuty idei: oddzielne istnienie, wieczność, niezmienność i niezależność od podmiotu. Uznał, że niepotrzebne jest podwajanie światów i przyjmowanie istnienia czegoś poza samą matematyką. Usytuował w ten sposób matematykę na szczycie świata. Matematyka zajęła miejsce platońskiego świata idei. Arystoteles uznał ten pomysł za najgorszy. Pewnie dlatego, że uważał, iż Speuzyp chce zastą-

[18] „Arystoteles zwykł opowiadać, że większość spośród tych, którzy słuchali wykładu Platona *O Dobru*, odniosła takie oto wrażenie. Sądzili, że mówić on będzie o uznanych dobrach ludzkich, takich jak bogactwo, zdrowie czy siła, bądź o powszechnie podziwianym szczęściu. Lecz kiedy okazało się, że zaczął on mówić o matematyce i liczbach, geometrii i astronomii, w końcu o tym, że Dobro jest tożsame z Jednem, byli zaskoczeni tak paradoksalnym przedstawieniem sprawy. Część nie pojmowała tego, inni w ogóle ganili [takie ujęcie – B.D.]"; Aristoksenos, *Harm. elem.* II, 30-I, tłum. własne (Testim. Plat. 7).

[19] Zob. B. Dembiński, *Późny Platon...*, dz. cyt., s. 109–139.

pić w ten sposób filozoficzne poznanie świata a nawet samo jego istnienie – matematyką. Filozofom Akademii Arystoteles czynił zarzut, że całą filozofię próbują przekształcić w matematykę[20]. Kiedy zatem dzisiaj wielu filozofujących matematyków twierdzi, że istnieje samodzielny świat matematycznych przedmiotów, i że jest to świat platoński, popełniają błąd. Nie jest to propozycja Platona, lecz propozycja Speuzypa. Stanowisko to wzmocnił jeszcze Ksenokrates, kolejny scholarcha Akademii, który zdecydował zastąpić ontologię matematyką, twierdząc, że matematyka jest jedyną możliwą do przyjęcia ontologią, ponieważ świat jest w istocie utworzony i ukonstytuowany według matematycznych wzorców i struktur[21].

Warto w tym kontekście zwrócić również uwagę na myśl Arystotelesa. Rozwijał on zazwyczaj intuicje Platona, co sprawia, że chcąc zrozumieć Platona, należy pilnie wsłuchiwać się w propozycje Arystotelesa. Jest tak również w przypadku filozofii matematyki.

Arystoteles uznał, podobnie jak Platon, że przedmioty matematyki są wyłącznie tworami podmiotu, powstałymi dzięki zdolności do abstrahowania. Jednak, jego zdaniem, zdolność ta nie jest wyłącznie przyczyną tworzenia modeli, lecz przede wszystkim pozwala wydobyć z realnie istniejących substancji, stanów rzeczy, obecny w nich czynnik ilościowy. Kategoria ilości, obecna w realnie istniejącej substancji, jest z niej „wydo-

[20] Arystotele, *Metafizyka*, 992a.
[21] Zob. B. Dembiński, *Późny Platon...*, s. 139–171.

bywana" mocą abstrakcji. Dlatego przedmiot matematyczny ma swoje ufundowanie i ostateczne uzasadnienie w rzeczach (substancjach realnie istniejących), jako ich konieczna składowa ilościowa. Ponieważ przedmiot matematyczny jest skutkiem procesu abstrahowania, zachowuje cechy, które muszą mu przysługiwać: powszechność, prawdziwość i konieczność. Tak rozumiana filozofia matematyki stała się podstawą oryginalnej dyskusji i ważnego sporu filozoficznego o naturę obiektów matematycznych. Postać i istotę tego sporu przedstawił Arystoteles w księgach M i N swojej *Metafizyki*[22].

Przedstawione wyjaśnienia pozwalają zrozumieć, dlaczego przedmioty matematyki nie mogą być utożsamiane z platońskimi ideami, a twierdzenie o ich tożsamości nie ma nic wspólnego z filozofią Platona. Jest natomiast skutkiem działalności jego następców. Kiedy zatem rozpatrujemy poglądy takich filozofów i matematyków, jak K. Gödel, G. Frege, R. Penrose, G. Ellis, M. Heller czy J. Życiński[23], powinniśmy pamiętać, że nie odnoszą się one tylko do filozofii Platona, lecz, przede wszystkim, do specyficznie i szeroko rozumianego platonizmu, właściwego poglądom przedstawicieli Starej Akademii.

---

[22] Arystoteles, *Metafizyka*, tłum. T. Żeleźnik, tekst polski oprac. M.A. Krąpiec oraz A. Maryniarczyk, Redakcja Wydawnictw KUL, Lublin 1996.

[23] Zob. K. Wojtowicz, *Spór o istnienie w matematyce*, Semper, Warszawa 2003; J. Życiński, *Świat matematyki i jej materialnych cieni*, Copernicus Center Press, Kraków 2013; M. Heller, *Filozofia i wszechświat*, TAiWPNU, Kraków 2006.

Bibliografia

Arystoteles, *Metafizyka*, tłum. T. Żeleźnik, tekst polski oprac. M.A. Krąpiec oraz A. Maryniarczyk, Redakcja Wydawnictw KUL, Lublin 1996.

Brown J.R., *Philosophy of Mathematics. A contemporary introduction to the world of proofs and pictures*, Routledge, New York – London 2008 (II ed).

Dembiński B., *Późna nauka Platona*, Wydawnictwo UŚ, Katowice 2003.

Dembiński B., *Późny Platon i Stara Akademia*, Marek Derewiecki, Kęty 2010.

Dembiński B., *Structuralism in the Platonic Philosophy of Science*, [w:] *Between Philosophy and Science*, (red.) M. Heller, B. Brożek, Ł. Kurek, Copernicus Center Press, Kraków 2013.

Hadot P., *Filozofia jako ćwiczenie duchowe*, tłum. P. Domański, IFiF PAN, Warszawa 1992.

Hartle V., *Plato on Parts and Wholes. The Metaphysics of Structure*, Clarendon Press, Oxford 2002.

Heller M., *Filozofia i wszechświat*, TAiWPNU, Kraków 2006.

Murawski R., *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2012, s. 20–22.

Platon, *List VII*, tłum. M. Maykowska.

Platon, *Menon*.

Platon, *Państwo*, tłum. W. Witwicki.

Platon, *Timajos*.

Wojtowicz K., *Spór o istnienie w matematyce*, Semper, Warszawa 2003.

Życiński J., *Świat matematyki i jej materialnych cieni*, Copernicus Center Press, Kraków 2013.

Co nowego w filozoficznym problemie matematyczności przyrody?

Leszek M. Sokołowski
Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu Jagiellońskiego
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych

What is new in the philosophical problem of why the material world has mathematical structure?

Abstract

Actually the problem of the mathematical nature of the world is a purely philosophical one, although it lies at the very foundations of physics and mathematics (and thus is very interesting for scientists) and as such it is extremely difficult to solve; in consequence any progress in the field is slow and for many it is unconvincing. In view of that I endeavour to give a more precise meaning to the statement that the structure of the material world is determined by an independent world, that of mathematical notions. The nature of the relationship between these two worlds is a great riddle and the core of this riddle is surrounded by a dense cloud of other philosophical riddles which are closely related to it, though (it seems at present) they are independent of it. I successively peel off these

surrounding problems in order to get to the very core of „the mathematicality of the matter".

First I argue that physics cannot establish whether the matter might not be subject to mathematical laws of nature, then I discuss two conceptions of the nature of the physical law, the dualistic and monistic one. It seems that independently of which conception is true, none of these helps to solve the problem. In conjunction with the famous Wigner's article of 1960 on unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences I indicate that the problem concerns solely the inanimate matter and does not apply to living organisms. As a next inevitable step I discuss the view of mathematics as intellectual inquiries independent of the physical world, which nonetheless perfectly fit this world; in particular I briefly present the Einstein's conception of forming physical laws. Finally I make comments on the problem which unavoidably appears in this context, namely of whether mathematical notions are discovered or freely created; I indicate (following A. Pelczar and others) that these two concepts do not exclude each other.

After this journey through a collection of problems closely accompanying that of „the mathematicality of the matter" it turns out that we come back to the starting point and we are helplessly facing the Mystery.

Key words

mathematical nature of the matter, nature of the physical law, philosophy of mathematics.

1

Tytuł jest nieco mylący[1], bowiem sugeruje, że ostatnio pojawiło się coś istotnie nowego w tym problemie. W rzeczywistości postęp jest niewielki i aby zmniejszyć tę zwodniczość zaznaczyłem w tytule, iż problem jest filozoficzny. Dla czytelnika znającego myśl Leszka Kołakowskiego jest to sygnał czytelny. Filozof ten bowiem wielokrotnie powtarzał, iż żaden z wielkich problemów filozoficznych (najczęściej wywodzących się ze starożytnej Grecji) nie został dotąd zadowalająco rozwiązany i nic nie wskazuje, by w przyszłości miało się to zmienić. Zagadka matematyczności przyrody zapewne nie jest aż tak wielkim problemem jak te, które Kołakowski miał na myśli, ale dla części przyrodników, zwłaszcza sporej grupy fizyków, jest to problem doniosły. Patrzę na niego oczami fizyka i sądzę, że warto go dyskutować, chociaż bez wiary, iż zbliżymy się do jego rozwiązania. Moim zamiarem jest wprowadzenie pewnego porządku do chaosu pytań otaczających ten problem.

Zacząć należy od tego, że fizyka nie jest w stanie odpowiedzieć na pytanie, *dlaczego przyroda jest matematyczna?* Matematyczność przyrody jest hipotezą roboczą, z jaką fizycy przy-

[1] Niniejszy artykuł wykorzystuje w znacznym stopniu mój wcześniejszy tekst *Parę uwag o matematyczności przyrody*, który ukazał się w pierwszym tomie serii *Archai. Filozofia a nauka* zatytułowanym *Nauka w filozofii. Oblicza obecności* pod redakcją S. Butryna, M. Czarnockiej, W. Ługowskiego i A. Michalskiej, Wydawnictwo IFIS PAN, Warszawa 2011. Dziękuję prof. Małgorzacie Czarnockiej za zgodę na skorzystanie z tamtejszego artykułu.

stępują do badania materii i hipoteza, że materię należy badać połączeniem metody empirycznej (eksperymentu) i matematycznego opisu przebiegu zjawisk jest w istocie tym, co odróżnia fizykę od pozostałych nauk zajmujących się światem nieożywionym, takich jak chemia czy geologia. Jest to hipoteza robocza, a nie założenie wstępne. Hipoteza robocza nie ma własnego uzasadnienia *a priori* i trzeba ją sprawdzić prowadząc według niej badania. Hipoteza matematyczności przyrody okazała się niezwykle trafna i dzięki niej fizyka odniosła oszałamiający sukces. Najwięksi fizycy, Galileusz, Newton, Einstein, Dirac, kolejno stwierdzali, że matematyka jest sposobem myślenia o przyrodzie. Zawsze podkreślali, że jest to hipoteza wyjściowa, która następnie była wspaniale przez nich potwierdzana. Fizyk przed tę hipotezę cofnąć się nie może. Według fizyka pytanie *czy świat mógłby być niematematyczny?* jest bez sensu. Gdyby przyroda była niematematyczna, to znanej nam fizyki na pewno nie byłoby. Jaki byłby taki świat? Przed laty Heidegger zadziwiał niemieckich mieszczan rozmyślaniami „dlaczego istnieje świat, a nie nicość?". Fizyka nie ma aparatu poznawczego, by ustalić, czy przyroda mogłaby być niematematyczna i jaka byłaby wtedy; tu można tylko swobodnie dywagować, pilnując się, by nie bałamucić słuchaczy. Często pojawia się wyobrażenie, iż niematematyczny świat byłby czymś na kształt marzeń sennych. Jako fizyk mam na ten temat odmienną hipotezę. Aby cokolwiek dostrzec, muszę wejść w oddziaływanie moimi receptorami z tym czymś, a oddziaływanie jest możliwe dzięki temu, że receptory i ten obiekt podlegają tym samym prawom.

Coś, co niczym nie oddziałuje, nie istnieje dla świata. Świat bez ścisłych praw, bez oddziaływań, nie istnieje. Nie wdając się w próżne rozważania, czy „nie istnieć" oznacza „nie istnieć dla innych", czy też „nie istnieć dla samego siebie" i jaka jest między nimi różnica, powiem krótko: dla przyrody brak matematycznych praw, którym podlega, oznacza przemianę jej nie w marzenie senne, lecz w nicość. Jednak – stwierdzam to wyraźnie – jest to tylko niesprawdzalna hipoteza.

Tak czy owak, sukces fizyki i opartej na niej techniki jasno mówi, że m a t e m a t y c z n o ś ć j e s t k o n s t y t u t y w n ą c e c h ą m a t e r i i. I jest to prawda obiektywna, zupełnie niezależna od nas i naszego istnienia; to nie jest coś, co fizycy wmówili w przyrodę, a przede wszystkim w innych ludzi. Modna w niektórych naukach społecznych teza, iż „prawda obiektywna nie istnieje, są tylko różne punkty widzenia" jest być może prawdziwa (czy aby sama siebie nie unicestwia?) w tych naukach, do przyrody nie stosuje się.

Dlaczego zatem matematyczność przyrody jest zagadką, która zadziwiała największe umysły? Można przecież powiedzieć, że matematyczność identyfikuje materię, czyli odróżnia ją od tworów niematerialnych – idei – które na ogół od matematyki są niezależne. Obrazowo (i nieściśle) można to ująć tak, że matematyka jest dla materii tym, czym pióra dla ptaków. Jest tu jednak istotna różnica. Pióra jednoznacznie charakteryzują ptaki (pomijam tu kopalne gady, przodków ptaków), lecz o piórach dowiedzieliśmy się patrząc na ptaki, to nie był niezależny od nich wytwór ludzkiego umysłu. Natomiast m a t e m a t y k a i przyroda zdają się istnieć niezależnie, matematycy nie są przyrodnikami. Według Rogera Penrose'a istnieją trzy światy, które nazywa 3 M, tworzące trójkąt wzajemnych oddziaływań i powiązań,

$$\begin{array}{ccc} \text{Mind} & \longleftrightarrow & \text{Mathematics} \\ \searrow\!\!\nwarrow & & \nearrow\!\!\swarrow \\ & \text{Matter} & \end{array}$$

Pewien fragment matematyki (będę o tym mówić dalej) jest systemem pojęciowym fizyki, czyli stanowi strukturę praw fizyki, które z kolei są abstrakcyjnym i nieskończenie skondensowanym opisem zjawisk fizycznych, a jednocześnie określa nasz sposób myślenia i jest wytworem naszego umysłu. Jaka jest faktyczna relacja sprawcza matematyki do materii i na odwrót? Inaczej mówiąc, *czym właściwie jest prawo fizyki, jaki jest jego status ontyczny?*

2

Wydaje się, że możliwe odpowiedzi na pytanie o istotę prawa fizyki mają charakter dychotomiczny.

I. Dualizm

Jest to wersja matematycznego platonizmu. Prawa fizyki znajdują się w świecie matematyki, stanowią jego część, są względem materii nadrzędne i logicznie pierwotne. Prawa fizyki rządzą nie tylko istniejącym światem materialnym; one sprawiły, że Wszechświat wyłonił się z pierwotnej osobliwości (Wielki Wybuch), która jest poza zasięgiem naukowego poznania. Jeżeli Wszechświat miał nie tylko początek, lecz jak wynika z pewnych teorii będzie mieć też koniec (Wielki Kres), to w osobliwości końcowej zniknie materia, czas i przestrzeń, pozostaną natomiast prawa fizyki pozbawione desygnatu. Taką koncepcję prawa fizyki zdaje się sugerować (zdaniem niektórych fizyków) ogólna teoria względności, która zakwestionowała dogmat przedrelatywistycznej fizyki o wieczności materii i całego świata. Rzeczywiście, jeżeli osobliwości czasoprzestrzeni, w których załamuje się całość poznania naukowego, są rzeczywistością, a nie wadą i artefaktem teorii Einsteina, to bez założenia logicznej pierwotności praw fizyki względem materii trudno jest wyjaśnić, jak regularny świat mógł wyłonić się z osobliwości. Często przywoływana w tym kontekście teoria kwantowej grawitacji jest wciąż w stadium zalążkowym i nic na ten temat powiedzieć nie może.

Dualistyczna koncepcja praw fizyki napotyka jednak zasadniczą trudność: skoro prawa fizyki są zewnętrzne względem materii, to nie wiadomo, jak one sterują materią i jak materia potrafi się im podporządkować.

Trudność tę najlepiej ilustruje następujący przykład. Niemal każdy studiujący fizykę stwierdza, że pojęciowo trudna jest mechanika kwantowa i szczególna teoria względności (wbrew obiegowym wyobrażeniom ktoś, kto zrozumiał tę ostatnią, nie ma większych kłopotów ze zrozumieniem ogólnej teorii względności), a potem przychodzi ich synteza, relatywistyczna mechanika kwantowa. Zwłaszcza teoria elektronu Diraca przez wiele dziesięcioleci uchodziła za najtrudniejszą teorię fizyki. Jako student uczestniczyłem w zjeździe naukowych kół studentów fizyki i starszy kolega zadał w swoim referacie zasadne pytanie: „jeżeli ja będąc fizykiem, mam trudności ze zrozumieniem treści fizycznej relatywistycznego równania Diraca dla elektronu, to jak durny elektron daje sobie z tym radę?". Ta kwestia nurtowała i nadal nurtuje wielu fizyków; pytanie to widziałem sformułowane w artykule pewnego Amerykanina kilkanaście lat temu.

II. Monizm

Prawa fizyki są istotnie różne od praw jurydycznych, które nakładane są na jednostkę ludzką i społeczeństwo w sposób częściowo arbitralny, podlegają więc dużym zmianom. Przysłowiowy Robinson Crusoe żyje na bezludnej wyspie wolny od praw jednostkowych i społecznych. Od praw fizyki uwolnić się nie można. Prawa fizyki nie są nakładane na materię z zewnątrz – one stanowią jej inherentną konstytutywną cechę. Nie istnieje „goły" elektron, który jest następnie ubierany w prawa fizyki. Elektron to cząstka materii, która ze swej istoty podlega prawom fizyki, znanym i nieznanym, które go definiują na równi z charakterystykami liczbowymi: masą, ładunkiem i spinem. Ostrożniejsze sformułowanie tej koncepcji głosi, iż rozwiązania równań fizyki są „wdrukowane" w elektron i inne składniki materii. Luźnej analogii dostarczają ptaki. Niektóre ich gatunki zadziwiają nas misterną konstrukcją gniazd. Ptaki nie uczą się tego od rodziców. Gdy wykluwają się z jajek, gniazdo jest już gotowe, a w następnym roku same budują takie; ta umiejętność jest wdrukowana w ich mózgi i biologicznie dziedziczona. My uczymy się (z wysiłkiem) równania Diraca, natomiast elektron, będąc materialnym przedmiotem tego równania, ma je wbudowane w siebie i bez niego byłby czymś zupełnie innym. Nie musi się uczyć jego rozwiązań i jak się według nich poruszać, bo one tkwią w nim.

Prawa fizyki nie istnieją jako samodzielne byty gdzieś poza materią – to my je wymyślamy, by skompresować w skończonym ciągu znaków opis wszystkich zjawisk fizycznych, który łącznie ma nieskończoną długość. Innymi słowy istnieją tylko zbiory rozwiązań równań Diraca, Maxwella, Newtona, Einsteina i innych, wcielone w materię, które my odczytujemy z ruchów materii. Empirycznie istnieją te rozwiązania, bo je widzimy w eksperymentach; prawa fizyki są abstrakcyjnym ekstraktem z tych obserwacji. W porównaniu z dualizmem ontyczny status praw fizyki jest niższy, one nie są niezależnymi bytami, tym niemniej są realne. Istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie pomiędzy równaniem różniczkowym i pełnym zbiorem jego rozwiązań, jeżeli więc empirycznie ustalimy dostatecznie dużo rozwiązań opisujących ruch określonej formy materii (np. ładunków elektrycznych), to z dużą wiarygodnością odtworzymy odpowiadające im równanie (np. równania Maxwella).

Monizm zawiera mniej nieweryfikowalnych hipotez, wprowadza mniejszą liczbę niezależnych bytów i lepiej pasuje do fizyki, która nie ma ambicji, by ustalać „istotę rzeczy", by poznawać, mówiąc językiem Kanta, „rzecz samą w sobie". Dualizm jest częściej postawą matematyków i „matematykujących" fizyków. Przyznaję jednak, że jest to moja intuicyjna i subiektywna ocena, nic mi nie wiadomo, by prowadzono tu jakieś badania statystyczne. Problemem monizmu jest to, co wspiera dualizm: jak Wszechświat powstał w Wielkim Wybuchu, skoro prawa fizyki rodziły się razem z nim?

Zarówno monizm jak i dualizm przyjmują za fakt dowiedziony przyjętą na wstępie hipotezę roboczą, iż prawa fizyki mają naturę matematyczną. Nie odpowiadają zatem na zasadnicze pytanie: *dlaczego matematyka odkrywana i wymyślana przez matematyków ma coś wspólnego z przyrodą?*

3

Postawione wyżej pytanie zadawało wielu wybitnych uczonych; znane są wypowiedzi Einsteina na ten temat. Tutaj zacytuję myśl Stevena Weinberga, wypowiedzianą w 1977 r. w słynnej książce popularnonaukowej *Pierwsze trzy minuty*: Trudno uświadomić sobie, że liczby i równania, którymi bawimy się przy naszych biurkach, mają coś wspólnego z rzeczywistym światem. Zadziwienie, iż matematyka nadaje się do opisu świata materialnego, najtrafniej wyraża prawo sformułowane w 1960 r. przez matematyka i fizyka Eugene'a Wignera: niepojęta jest skuteczność matematyki w naukach ścisłych i technice; pojawiło się ono w formie równoważnika zdania w tytule jego głośnego artykułu. Warto dodać, że Wigner użył w tytule zwrotu „w naukach przyrodniczych" (*natural sciences*), lecz z treści artykułu jasno wynika, że chodziło mu o fizykę, chemię, astronomię, technikę i metody statystyczne. Różnica jest istotna. W jakiś czas później (daty nie potrafię ustalić) wybitny matematyk rosyjski Izrael Gelfand podał swoje prawo: niepojęta jest nieskuteczność matematyki w naukach biologicznych. Obserwujemy wprawdzie powolne i stałe wkraczanie matematyki do rozmaitych (pobocznych) działów biologii, lecz wiodące dziedziny nauk biologiczno-medycznych korzystają z niej w stopniu marginalnym. Jaskrawym przykładem tego, że matematyka nadal pozostaje na peryferiach biologii, był głośny spór (miał miejsce po roku 1987) czołowego biologa ewolucyjnego, Ernsta Mayra, ze Stevenem Weinbergiem. Spór dotyczył redukcjonizmu w naukach przyrodniczych, jest jednak jasne, że w naukach ścisłych redukcjonizm jest filozoficznym określeniem na matematyczną naturę przyrody. Logiczno-dedukcyjna struktura tych nauk implikuje pewną formę redukcjonizmu. Występując ostro przeciw redukcjonizmowi, Mayr faktycznie odmawiał matematyce większego znaczenia w biologii. Co jest tego przyczyną? Standardowa odpowiedź brzmi, że winna temu jest ogromna złożoność struktury układów biologicznych w porównaniu z prostotą obiektów fizycznych i chemicznych. W przyszłości (raczej odległej) biologia również zmatematyzuje się. Teza ta jest niezbyt przekonywująca. Po pierwsze dlatego, że odpowiedź o naturę (matematyczną) świata istot żywych odsuwa się w daleką przyszłość, sugerując zarazem, że wiemy jaka ta odpowiedź będzie. Z historii nauk przyrodniczych wiemy natomiast, że przyszłość jest nieprzewidywalna i niemal zawsze okazywała się radykalnie odmienna od oczekiwań nawet największych autorytetów naukowych. (Gdy przy okazji okrągłych dat lub jakichś rocznic gazety pełne są prognoz co będzie potrafiła medycyna w roku 2050, nie warto się martwić, że my tych cudów już nie doczekamy. Będzie inaczej.) Po drugie dlatego, że idea unifikacji nauk przyrodniczych za pomocą matematyki jest niezgodna z emergentnością cech materii i sposobów ich opisu na coraz wyższych poziomach organizacji materii.

Wypływa stąd wniosek: p r o b l e m m a t e m a t y c z n o ś c i p r z y r o d y d o t y c z y m a t e r i i n i e o ż y w i o n e j. To z kolei jest niezgodne z rozpowszechnioną tezą o jedności przyrody we wszystkich skalach (mikroświat, makroświat, megaświat) i na wszystkich poziomach organizacji. Emergentność cech i struktur materii nie pasuje do matematyczności przyrody. Czy jest to niezgodność istotna, wskazująca na fundamentalną cechę materii, czy też my czegoś nie rozumiemy i matematyczność pojmujemy błędnie, pozostaje kwestią otwartą.

Centralny problem brzmi zatem: *dlaczego materia nieożywiona jest matematyczna?* Tu już nie możemy ominąć kluczowego pytania, które nasuwało się od początku: *co to jest* *matematyka?* Definicji nie ma i zapewne nie będzie. To, co kompetentni matematycy uważają za matematykę, obejmuje tak odmienne konstrukcje logiczne, iż rozpowszechniony jest pogląd, że ewentualna definicja matematyki nie byłaby krótsza od ciągu wszystkich twierdzeń matematycznych uważanych za ważne. Z braku definicji należy sięgnąć do istotnych cech matematyki, które dają się wyrazić jasno. W swoim artykule z 1960 r. Wigner wskazał takie cechy; nie mogą one służyć za definicję, bowiem nie określają one matematyki w sposób wyczerpujący i jednoznaczny. Wigner określił matematykę jako logicznie uporządkowaną swobodną kreatywność. Według jego określenia, które zyskało powszechne uznanie, matematyka jest umiejętnością wykonywania pomysłowych operacji na starannie dobranych pojęciach, umiejętnością stworzoną właśnie w celu wykonywania tych operacji w sposób maksymalnie pomysłowy. Kluczowe jest tu tworzenie nowych pojęć, poddanych ostrej selekcji. Matematyka szybko wyczerpałaby zasób interesujących twierdzeń, gdyby nie wprowadzano nowych pojęć, których własności wyrażane są w nowych twierdzeniach. Twórczość ta podlega ścisłym regułom logiki, ponadto bardzo pożądane są powiązania nowych pojęć i twierdzeń z istniejącą już matematyką. Ideą tej kreatywności jest wprowadzanie nowych bytów matematycznych, którym można przypisać, nie jawnie w samej ich definicji, lecz w dowodzonych następnie twierdzeniach, bardzo interesujące właściwości. Porównajmy to z malarstwem średniowiecznym, w którym istniała określona liczba tematów, najczęściej religijnych, i w którym twórczość artystyczna polegała na pogłębionej, oryginalnej i niepowtarzalnej realizacji jednego z tych tematów. Matematyk również najczęściej pracuje w jednym z istniejących tematów badawczych i rozwiązuje znane (specjalistom) problemy. Jednak zasadniczy postęp polega na tworzeniu nowych tematów, radykalnie odmiennych od istniejących, a zarazem mających głębokie z nimi powiązania, na wkraczaniu w nowe przestrzenie myśli matematycznej. Twórczy matematyk musi mieć ogromną wyobraźnię.

To wszystko rozgrywa się w zamkniętym kręgu matematyki i matematyków, bez kontaktu ze światem zewnętrznym. Energia twórczości matematycznej nie podlega zachowaniu i nie wymaga żadnego zasilania z zewnątrz. Matematyka żywi się sama sobą, najlepszą pożywką dla twórczej intuicji jest matematyka już istniejąca. Oczywiście ważne są też inspiracje spoza niej (ten czynnik jest eksponowany, gdy mówi się o tym, że twórczość matematyków służy nie tylko im), dzięki nim powstały m.in. teoria dystrybucji i geometria lorentzowska, jednak nie one nadają kierunek rozwoju. Matematyka rozwija się całkowicie autonomicznie – zgodnie z własnymi zainteresowaniami i potrzebami.

Wielcy fizycy, Einstein, Dirac, Wigner, Weinberg, zgodnie twierdzili, iż zagadka matematyczności przyrody nie jest filozoficznym pseudoproblemem, lecz problemem sięgającym podstaw poznania naukowego. Wszystko, co wiemy o matematyce, jednoznacznie wskazuje, iż n i e m a l o g i c z n y c h p o d s t a w t w i e r d z e n i e, ż e m a t e m a t y k a m a c o k o l-w i e k w s p ó l n e g o z e ś w i a t e m m a t e r i i. Oczywiście historia nie biegła tak prosto jak sugeruje to ta teza. W dziejach matematyki mamy okresy, gdy jej rozwój niemal w całości był inspirowany potrzebami fizyki i techniki. Od XVII do XIX wieku rachunek różniczkowy i całkowy, teoria równań różniczkowych i geometria różniczkowa były tworzone na zamówienie mechaniki, astronomii, hydrodynamiki i elektrodynamiki. Zastosowania matematyki są tym, z czego matematycy żyją i co nadaje matematyce społeczną rangę wyższą niż uwielbiana przez wielu gra w szachy. Jednak w ciągu XIX wieku utrwaliło się przekonanie, iż te zastosowania są jedynie (życiodajną) premią, a matematyka jest autonomiczną dziedziną aktywności intelektualnej, rozwijającą się własną dynamiką określoną własnymi potrzebami i zainteresowaniami, bez oglądania się na świat zewnętrzny. W XX wieku doprowadziło to do sytuacji wręcz komicznych, gdy wielu wybitnych matematyków (np. Edmund Landau) z dumą twierdziło, że przyrodoznawstwo ich nie interesuje i nic w tej dziedzinie nie wiedzą. Powtórzmy zatem: dlaczego przyroda jest matematyczna?

4

Podejdźmy do problemu z innej strony. Jak powstaje matematyczny opis rzeczywistości fizycznej? Na ten temat istnieje olbrzymia literatura napisana przez filozofów nauki i metodologów, jest to jeden z paru centralnych problemów filozofii nauki;

sporo jest też wypowiedzi samych fizyków. W moim przekonaniu – jest to amatorskie spojrzenie fizyka na filozofię nauki – istotę rzeczy najtrafniej ujął Einstein, a filozofowie nauki kilkadziesiąt lat później z mozołem i fragmentarycznie dochodzą do tez, które on sformułował jasno. Zdaniem Einsteina przyporządkowanie naszym wrażeniom zmysłowym pojęć ogólnych porządkujących i klasyfikujących obiekty fizyczne i zjawiska, jakie w nich zachodzą, a następnie przyporządkowanie tym pojęciom obiektów matematycznych, z których konstruujemy teorie fizyczne, jest jak najdalsze od oczywistości i jednoznaczności. To jest s w o b o d n a g r a p o j ę ć. Idea swobodnej gry pojęć jest według niego kluczowa dla zrozumienia istoty pracy badawczej fizyka. Ze zbioru dostępnych mu danych empirycznych fizyk wybiera fakty, które uważa za istotne i przypisuje im ogólne pojęcia fizyczne, a tym nadaje precyzyjną formę identyfikując je z pewnymi obiektami matematycznymi. Przypisywanie obiektów matematycznych pojęciom fizycznym może być rozciągnięte w czasie, a może być jednym aktem twórczości naukowej z samym tworzeniem tego pojęcia. Zmatematyzowane pojęcia fizyczne nie są wartością samą w sobie, są tyle warte, ile warta jest teoria fizyczna z nich zbudowana. I znowu, konstruowanie teorii może trwać długo i może do niej wieść droga kręta, a może teoria powstać szybko, gdy pojęcia i ich formy matematyczne są dopasowywane do tworzonej teorii (przykładem jest mechanika kwantowa). Celem ostatecznym, mającym wartość obiektywną, jest teoria fizyczna, w której w skończonej liczbie aksjomatów jest skondensowana („ jest spakowana" mówiąc językiem komputerowym) nieskończona ilość informacji o pewnej formie materii i zjawiskach w niej zachodzących. Ta procedura była znana i rozumiana przed Einsteinem, on zwrócił uwagę, że żaden z jej etapów, poczynając od wstępnego tworzenia pojęć, aż po tworzenie teorii, nie jest w najmniejszym stopniu zdeterminowany. Złudne było przekonanie neopozytywistów logicznych, iż teoria daje się wyprowadzić indukcyjnie z dostatecznie dużego stosu faktów doświadczalnych. Indukcja oparta na pewnych oczywistościach może być wręcz błędna. Jedyną siłą niemechaniczną, z którą mamy na co dzień do czynienia, jest siła ciążenia; ogół doświadczeń wskazuje, iż jest to siła przyciągająca. Wydaje się więc oczywiste, że teoria grawitacji winna być teorią przyciągającej siły działającej na odległość. Taką teorią jest teoria powszechnego ciążenia Newtona; natomiast ogólna teoria względności w ogóle nie operuje pojęciem siły, bowiem nie jest ono dobrze zdefiniowane matematycznie, a przyciągającego charakteru oddziaływań dowodzi się w niej w sposób, który nie jest uniwersalny.

Powtórzmy za Einsteinem: konstruowanie opisu zjawisk fizycznych to swobodna gra pojęć, w której ograniczeni jesteśmy tylko regułami logiki. O tym, jakie pojęcia wprowadzimy i jakie własności im przypiszemy, decyduje intuicja, spostrzegawczość, przenikliwość. Cała gra jest podporządkowana celowi ostatecznemu, jakim jest zbudowanie udanej teorii fizycznej i ta jest jedynym jej uzasadnieniem.

Historia fizyki jest jednym wielkim cmentarzyskiem idei, koncepcji i teorii. Ogromna większość nieudanych pomysłów zostaje natychmiast zapomniana i o ich chwilowym istnieniu możemy się dowiedzieć jedynie przeglądając stare roczniki czasopism naukowych. Tylko bardzo nieliczne z nich utrwaliły się w historii i pamięci: flogiston, cieplik, eter, perpetuum mobile, w nowszych czasach idea analitycznej macierzy *S*, a z naszej epoki zapamiętane zapewne zostaną superstruny i wieloświaty. W swobodnej grze pojęć najczęściej przegrywamy.

Udane pojęcia, takie jak energia cieplna, temperatura, entropia szybko zostają przyswojone i dzisiaj dziwimy się, że kiedyś sprawiały trudności. Dopiero w XIX wieku jasno rozróżniono pojęcia temperatury i ilości ciepła. Wcześniej nagminnie mylono rzeczy dla nas oczywiste: że talerz gorącej zupy zawiera więcej energii cieplnej niż płomień zapałki, za to płomień jest gorętszy.

Widzimy zatem wyraźne podobieństwo pracy matematyka i fizyka – obaj prowadzą swobodną grę pojęć. Zarazem każdy z nich prowadzi tę grę w inny sposób. Dla matematyka gra pojęć ma charakter wewnętrzny – jest to swobodna kreacja w zamkniętym świecie idei, byle tylko dostać interesującą matematycznie konstrukcję. Gra fizyka, przeciwnie, jest skierowana na świat zewnętrzny: tworzone przez niego pojęcia mają sens tylko wtedy, gdy pozwalają skompresować opis rzeczywistości fizycznej. Jak powiedziałem, w tej swobodnej grze pojęć z przyrodą najczęściej przegrywamy. Biorąc pod uwagę charakter tej gry, to jest to całkiem zrozumiałe. Dziwne jest raczej to, że zdarzają się sukcesy i to zdumiewało Einsteina: „najbardziej niepojęte w świecie jest to, że daje się w ogóle pojąć” (jest *intelligibilny*).

Tu dochodzimy do kolejnego problemu tkwiącego w otoczce zagadnienia matematyczności przyrody. *Jak możliwe jest przyrodoznawstwo matematyczne?* Jak to możliwe, że ludzie będący produktem naturalnej ewolucji biologicznej, która formowała i utrwalała tylko te zdolności, które są niezbędne do biologicznego przetrwania osobnika, posiedli umiejętności poznawcze daleko wykraczające poza potrzeby egzystencjalne? Nie znamy jak dotąd odpowiedzi i raczej przypuszcza się, że należy jej szukać w biologii ewolucyjnej, aczkolwiek koncepcja trzech światów 3 M Penrose'a sugeruje, iż ostateczne wyjaśnienie tkwi głębiej niż sięgnąć może teoria ewolucji. Zamiast tego ogólnego pytania stawia się konkretny problem epistemologiczny: czy istnieje prawo fizyki tak skomplikowane, że jest poza zasięgiem naszego umysłu? Ten problem można rozważać z trzech stron. *Czy „istnieje" oznacza prawo faktycznie obowiązujące w świecie, czy też chodzi o samą możliwość skonstruowania go przez odpowiednio potężny intelekt?* Po drugie, jak rozumieć skomplikowanie tego prawa? I po trzecie, co znaczy „poza zasięgiem naszego umysłu"? Nowoczesna matematyka abstrakcyjna jest poza zasięgiem większości ludzi. Czy chodzi zatem o prawo, którego nikt nie jest w stanie pojąć? Czy raczej chodzi prawo, które da się zrozumieć, lecz które jest bardzo trudno wykryć w przyrodzie? W tym ostatnim przypadku można podać przykład prawa, które jest praktycznie niewykrywalne, bowiem jest nieodróżnialne od chaosu.

Rozważmy pewien układ fizyczny, który ma 10 stanów fizycznych ponumerowanych od 0 do 9. Układ ten podlega prawu stanowiącemu, iż stan układu zmienia się co sekundę i poczynając od pewnej chwili początkowej ciąg kolejnych stanów przedstawia rozwinięcie dziesiętne określonej liczby niewymiernej. Załóżmy, że obserwujemy ten układ od chwili początkowej i prawidłowo ponumerowaliśmy jego stany kierując się ich własnościami. Jeżeli ujrzymy ciąg stanów rozpoczynający się od 141592653589793238..., to na myśl przyjdzie nam liczba π i uznamy, że ciąg ten jest ściśle zdeterminowany. Jeżeli jednak prawo to nakazuje, by ciąg stanów był rozwinięciem dziesiętnym liczby π^2, e^π lub jakiejkolwiek innej liczby niewymiernej, to zidentyfikowanie obserwowanego ciągu cyfr z rozwinięciem tej liczby jest niemożliwe, bowiem zbiór liczb niewymiernych, które należałoby sprawdzić, jest nieprzeliczalny. Poza przypadkiem π oraz e każdy taki ciąg bez wątpienia uznamy za czysto chaotyczny.

Można przypuszczać, że problemy intelligibilności świata oraz matematyczności przyrody łączy głęboki związek, który ujawni się, gdy rozwiążemy drugi problem. Na razie jednak, oprócz podobieństwa obu problemów, żadnego związku nie widać i należy je oddzielić. Z punktu widzenia celu, do którego zmierzamy, istotne jest, że przynajmniej niektóre prawa fizyki potrafimy odkryć i mają one naturę matematyczną.

Problem formułujemy następująco: *dlaczego swobodna gra pojęć matematyka pasuje do przyrody?* Przykładów jest wiele, tu podam ten, który zrobił na mnie duże wrażenie. Od końca XIX wieku wielu matematyków, przede wszystkim David Hilbert i jego krąg, zajmowało się czysto matematycznym problemem rozwijania funkcji w szeregi Fouriera (szeregi trygonometryczne) i do połowy lat dwudziestych XX wieku sformułowali podstawy analizy funkcjonalnej. Gdy przed 1930 rokiem powstała radykalnie nowa teoria fizyczna, mechanika kwantowa, okazało się, że potrzebny jej aparat matematyczny został właśnie stworzony, trzeba je tylko skojarzyć. Szybko rozpoznano, że kwantowa fala prawdopodobieństwa jest wektorem w pewnej przestrzeni funkcyjnej – przestrzeni Hilberta, a operatory różniczkowe generujące z tej fali wartości wielkości fizycznych są operatorami samosprzężonymi działającymi w tej przestrzeni. Sam Hilbert żywo interesował się rozwojem fizyki, jednak w powstaniu mechaniki kwantowej nie odegrał żadnej roli i nie szukał w fizyce zastosowań dla analizy funkcjonalnej. Pomimo niezależności swoich badań matematycznych od świata rzeczywistego Hilbert i inni stworzyli coś, co pod każdym względem idealnie pasowało do zjawisk kwantowych. Zbiór wartości własnych operatora samosprzężonego w przestrzeni Hilberta nazwali matematycy w i d m e m tego operatora. Można wyobrazić sobie zdumienie ich oraz fizyków, gdy okazało się, że widmo operatora energii stosowanego w teorii kwantów można utożsamić z widmem optycznym świecących atomów! Brzmi to jak „harmonia przedustawna" Leibniza.

Zadziwieni przydatnością prowadzonej przez matematyka swobodnej gry pojęć do świata fizycznego przypomnijmy sobie koncepcję 3 M światów Penrose'a i sformułujmy problem towarzyszący: *czy matematyka jest tworzona, czy odkrywana?*

Czy twórczy matematyk jest podobny do podróżnika z dawnych wieków odkrywającego i eksplorującego nieznane lądy, czy też przypomina raczej nowoczesnego artystę, który materializuje to, co mu w duszy gra? Jeżeli matematyka jest tworzona, jeżeli przy wszystkich restrykcjach logicznych twory matematyczne przypominają swobodne „instalacje" artystyczne, to matematyczności przyrody rozumem naukowym po prostu pojąć się nie da. Można jedynie wejść w metafizykę i domniemywać, że matematyk nie jest wewnętrznie całkowicie swobodny, lecz został natchniony przez Stwórcę, który w swej łaskawości chce nam poprzez niego udostępnić fragment wiedzy o swoim dziele. Jeżeli natomiast matematyka jest odkrywana, jeżeli matematyk podróżuje umysłem po świecie bytów matematycznych, które istnieją obiektywnie bez niego, a on jedynie rejestruje ich obecność i ustala ich cechy, to stoimy w obliczu wielkiej tajemnicy, lecz zgłębienie jej nie jest z góry sprawą beznadziejną. Spór o sposób istnienia matematyki trwa od dawna i trwać będzie długo, bowiem zupełnie nie wiadomo jak przekonać się o słuszności tego czy innego rozwiązania. W moim przekonaniu interesującą tezę wprowadził do tego sporu matematyk krakowski Andrzej Pelczar[2]. Zwrócił on uwagę, że możliwości „tworzona" i „odkrywana" nie stanowią alternatywy. Twierdzi, że w matematyce odkrywamy możliwości konstrukcji obiektów matematycznych. Obiektywnie istnieją kryteria

[2] A. Pelczar, *O odkrywaniu możliwości konstrukcji w matematyce*, [w:] *Prace Komisji Filozofii Nauk Przyrodniczych Polskiej Akademii Umiejętności*, tom IV, (red.) J.J. Janik, Wyd. PAU, Kraków 2010.

konstrukcji rozstrzygające, czy dany obiekt da się zbudować. Matematyk ma pomysł, sprawdza możliwość jego konstrukcji i od momentu jego realizacji obiekt matematyczny istnieje obiektywnie w świecie matematyki jako wynaleziony przez tego matematyka. Świat matematyczny nie jest ponadczasowy i raz na zawsze uformowany; on rośnie w czasie fizycznym w miarę jak matematycy tworzą nowe byty. Natomiast nieskończony zbiór możliwych konstrukcji istnieje niezależnie od świata materii i matematyków, którzy swoją pomysłowością wydobywają obiekty ze stanu potencjalności do stanu istnienia. W tym sensie liczby naturalne istnieją, bowiem zostały skonstruowane przez naszych dalekich przodków, zapewne już w neolicie. Pamiętać przy tym należy, iż konstrukcja konstrukcji nierówna, jedne są niezmiernie doniosłe, inne, większość, mają znikomą wagę; taki sens ma znany aforyzm Kroneckera, iż liczby naturalne stworzył Pan Bóg, zaś reszta jest dziełem ludzi. Dziełem ludzi jest przytłaczająca większość spośród prawie dwustu tysięcy twierdzeń, które są co roku dowodzone i publikowane.

Koncepcja odkrywania możliwości konstrukcji rzuca dodatkowe światło na problem nadmiarowości matematyki w świecie materialnym. O problemie tym pisałem obszerniej gdzie indziej[3], więc tutaj zrobię krótki komentarz. Fizyka i technika

---

[3] L. Sokołowski, *Nadwyżkowość matematyki*, [w:] *Matematyczność przyrody*, (red.) M. Heller, J. Życiński, Wyd. Ośrodka Badań Interdyscyplinarnych Przy Wydziale Filozofii Papieskiej Akademii Teologicznej, Kraków 1990, s. 56–71; II wydanie: Wyd. Petrus, Kraków 2010, s. 63–80.

wykorzystują drobny ułamek istniejącej wiedzy matematycznej i ułamek ten stale maleje, bowiem matematyka rośnie szybciej niż nowe jej działy znajdują zastosowania poza nią. Skoro matematyka ma coś wspólnego z materią, to najprostsze i najbardziej naturalne byłoby, gdyby stosowała się w całości do świata fizycznego. Tak nie jest. Gdyby wszystkie obiekty matematyczne istniały obiektywnie w idealnym świecie Platona i Penrose'a, a matematyk wprowadzałby je tylko do swojej świadomości, to byłyby one w sensie ontycznym równoprawne i byłoby trudno wyjaśnić, dlaczego jedne z nich stosują się w świecie materialnym, a inne – większość – nie mają z nim kontaktu. Można przypuszczać, iż ranga niektórych konstrukcji jest tak wielka, że zostały szybko odkryte i docenione przez ludzi i użyte w teoriach fizycznych. W tym sensie ranga tych obiektów jest obiektywna – przyroda wbudowała je w siebie. Inne obiekty matematyczne są dla przyrody pomocnicze, marginalne lub wręcz zbędne.

Jeżeli koncepcja Pelczara jest prawdziwa (zbliżone idee wyrażali też inni matematycy), to twierdzimy, że obiekty matematyczne istnieją realnie lub potencjalnie w odrębnym świecie idei, przy czym nie rozstrzygamy, czy świat ten jest równorzędny światowi materii jak doskonały świat Platona i Penrose'a, czy też jest w pewnym sensie względem materii wtórny. Problem statusu ontycznego obiektów matematycznych jest bezspornie ściśle związany z problemem matematyczności przyrody, być może jest jego równoważnym sformułowaniem, lecz jeżeli przyjmiemy za Pelczarem, że świat matematyki jest różny od świata materii, to wracamy do wyjściowego pytania: *dlaczego te dwa światy są zgodne, dlaczego pewne pojęcia matematyczne tworzą abstrakcyjną strukturę materii?*

5

W tym miejscu nie pozostaje mi nic innego, jak powołać się na Kołakowskiego. Zagadka matematyczności przyrody tkwi w gęstej otoczce problemów mocniej lub słabiej z nią stowarzyszonych. W tym artykule starałem się wprowadzić pewien porządek w tych problemach poprzez naświetlenie ich relacji do kwestii centralnej i w konsekwencji uzyskać oczyszczoną formę tej kwestii, lepiej nadającą się do konkretnej dyskusji. Okazało się, że w rzeczywistości zatoczyliśmy koło, że wyłuskana z tej otoczki zagadka matematyczności przyrody uchyla się od przyjęcia formy dającej nadzieję na jej rozwiązanie. Potrafimy bowiem tylko zapytać*: dlaczego matematyka, jakkolwiek konstruowana, ale zawsze bez związku z przyrodą, jest z przyrodą tak ściśle związana?* Kołakowski powiedziałby zapewne, że jest to problem filozoficzny, a filozofowie potrafią pytać, a nie dawać przekonujące odpowiedzi.

Stojąc bezradnie wobec Tajemnicy chcę tylko wspomnieć, że jest jeszcze jeden (co najmniej) kierunek dociekań, który niestety również rzuca na nią niewiele światła. To twierdzenie Gödla i jego konsekwencje. O jego roli pisałem we wspomnianym na początku artykule w pierwszym tomie *Archai* i do niego odsyłam czytelnika. To fascynujący temat, wokół którego narosło wiele nieporozumień. Radykalną konsekwencją filozoficzną twierdzenia Gödla jest teza niektórych matematyków, iż to nie przyroda jest matematyczna, to matematyka jest przyrodnicza. Brzmi to nader efektownie, jednak niewiele wyjaśnia.

Bibliografia

Pelczar A., *O odkrywaniu możliwości konstrukcji w matematyce*, [w:] *Prace Komisji Filozofii Nauk Przyrodniczych Polskiej Akademii Umiejętności*, tom IV, (red.) J.J. Janik, Wyd. PAU, Kraków 2010.

Sokołowski L., *Nadwyżkowość matematyki*, [w:] *Matematyczność przyrody*, (red.) M. Heller, J. Życiński, Wyd. Ośrodka Badań Interdyscyplinarnych Przy Wydziale Filozofii Papieskiej Akademii Teologicznej, Kraków 1990, s. 56–71; II wydanie: Wyd. Petrus, Kraków 2010, s. 63–80.

Rozumienie dowodu matematycznego a zagadnienie wyjaśnienia w matematyce

Krzysztof Wójtowicz

Zakład Filozofii Nauki, Instytut Filozofii UW

The Notion of Mathematical Proof and the Problem of Explanation in Mathematics

Abstract

In the article, I present two possible points of view concerning mathematical proofs: (a) the formal view (according to which the formalized versions of mathematical proofs reveal their "essence"); (b) the semantic view (according to which mathematical proofs are sequences of intellectual acts, and a form of intuitive "grasp" is crucial). The problem of formalizability of mathematical proofs is discussed, as well as the problem of explanation in mathematics – in particular the problem of explanatory *versus* non-explanatory character of mathematical proofs. I argue, that this problem can be analyzed in a fruitful way only from the semantic point of view.

Key words

mathematical proof, explanation in mathematics, explanatory proofs, mathematical intuition.

1. Dowody matematyczne: praktyka i teoria

Nie ulega wątpliwości, że przy uprawianiu matematyki zasadnicze znacznie ma rozumienie pojęć matematycznych, proces identyfikowania relacji między nimi i swoistego „wnikania" w ich treść. Można powiedzieć że uprawianie matematyki to bardzo wyrafinowana analiza pojęć i – mówiąc nieco górnolotnie – badanie świata idei matematycznych. Z całą pewnością nie sprowadza się do „rachunków" (z czym niekiedy kojarzy się matematyka udręczonej młodzieży). Kiedy matematycy mówią o dowodach, zastanawiają się nad tym, czy dowód jest głęboki, czy „siłowy", czy wyjaśnia zjawiska, czy jedynie wykazuje pewien fakt, nie dając głębszego wglądu w naturę zagadnienia. Matematycy mówią o treści dowodu, a nawet o estetycznych wartościach dowodów, o swoistym pięknie zawartym w grze idei. Nie ulega też wątpliwości, że przy uprawianiu matematyki mamy do czynienia z bardzo ciekawymi zjawiskami o charakterze psychologicznym – zarówno przy prowadzeniu własnych badań, jak i przy śledzeniu wyników czyjejś pracy. Można mówić o swoistych przebłyskach intuicji, „olśnieniach", dzięki którym możliwe staje się uchwycenie zasadniczej idei – niejako istoty – danej konstrukcji matematycznej, teorii czy dowodu. Nie ulega wątpliwości, że przy uprawianiu matematyki mamy do czynienia z przełamywaniem poznawczych barier – niezależnie od tego, czy dotyczą one zrozumienia tego, jak rozwiązać szkolne zadanie z geometrii, czy też zrozumienia zasadniczej idei dowodu hipotezy Poincarégo. Są to przeżycia znane wszystkim matematykom. Podstawą uprawiania matematyki (tworzenia nowych pojęć, formułowania i rozwiązywania problemów matematycznych, konstruowania nowych teorii) są więc pewnego typu akty intelektualne. Zrozumieć istotę dowodu to zrozumieć naturę tych aktów i wyjaśnić aspekty semantyczne – bo to one odgrywają zasadniczą rolę w uprawianiu matematyki.

Taki pogląd można uznać za klasyczny w historii filozofii i matematyki. Jego przedstawicielem był np. Kartezjusz, którego zdaniem fundamentem naszego poznania jest zdolność do ujmowania w aktach intelektualnych pewnych podstawowych prawd w jasny i wyraźny sposób[1]. Kryterium jasnego i wyraźnego widzenia stosuje się w szczególności do matematyki, zaś intuicja – swoista zdolność umysłu do ujmowania pewnych zdań jako prawd – jest w tym wypadku kluczowa. Jednak intuicja jest angażowana nie tylko przy uzasadnianiu prawd pierwotnych. Odwołanie do intuicji jest konieczne także w rozumowaniach, kiedy chcemy uzasadnić prawomocność danego kroku dowodowego: „owa oczywistość i pewność intuicji wymagana

[1] Podstawowe czynności naszego umysłu, za pomocą których „możemy nie obawiając się omyłki dojść do poznania rzeczy"; (Kartezjusz, *Prawidła kierowania umysłem; poszukiwanie prawdy poprzez światło przyrodzone rozumu*, tłum. L. Chmaj, PWN, Warszawa 1958, s. 12) to intuicja i dedukcja. Intuicję Kartezjusz określa jako „nie zmienne świadectwo zmysłów, lub zwodniczy sąd źle tworzącej wyobraźni, lecz tak łatwe i wyraźne pojęcie umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy, lub, co na jedno wychodzi, pojęcie niewątpliwe umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy"; tamże.

jest nie tylko dla samych wypowiedzi, ale także dla jakichkolwiek rozumowań... Zdania [...] poznaje się [...] już to przy pomocy intuicji, już to przy pomocy dedukcji; same zaś pierwsze zasady tylko przy pomocy intuicji; natomiast ich odległe wnioski jedynie przy pomocy dedukcji”[2]. Można więc powiedzieć, że rozumowania matematyczne stanowią proces oparty na naszym rozumieniu pojęć, a nie na formalnych własnościach systemów symbolicznych. O prawomocności dowodu decyduje więc – mówiąc skrótowo – jego treść, a nie forma[3].

Istotę tego punktu widzenia można w czytelny sposób przedstawić na przykładzie geometrii. W znanej wszystkim ze szkoły geometrii elementarnej wszelkiego typu elementy poglądowe, wyobrażeniowe są w dowodach angażowane w sposób bardzo silny. Niekiedy wystarczy szkic, aby przekazać ideę dowodu w sposób przekonujący, zaś towarzyszące owemu szkicowi wyjaśnienia (formalne) wydają się być nieomalże zbędne. Mówiąc z pewną przesadą: pewność uzyskujemy nie poprzez wypisanie

[2] Tamże, s. 13–14.

[3] Owe akty intelektualne dotyczą nie tylko pojedynczych kroków dowodu. Kartezjusz pisze: „Dla uzupełnienia nauki należy wszystkie i poszczególne rzeczy, które odnoszą się do naszego celu, przeglądnąć ciągłym i nieprzerwanym ruchem myśli i objąć je w dostatecznym i uporządkowanym wyliczeniu... Dlatego przebiegnę je kilkakrotnie swego rodzaju ciągłym ruchem wyobraźni, która widzi od razu człony poszczególne w chwili, gdy do innych przechodzi, aż się nauczę od pierwszego stosunku do ostatniego tak szybko przechodzić, iż będę mógł niemal zupełnie bez pomocy pamięci objąć jednym spojrzeniem całość”; tamże, s. 31–32. Mamy więc do czynienia z aktem „ogarnięcia” całości dowodu.

dowodu, ale poprzez swoisty „wgląd w geometryczną istotę zagadnienia”[4]. Wyrazicielem tego typu opinii jest np. Jean-Victor Poncelet (1788–1867), który pisał: „W zwykłej geometrii [...] opisywana jest figura, nigdy nie tracimy jej z oczu, zawsze rozumujemy z użyciem wielkości i form, które są rzeczywiste, i nigdy nie dochodzimy do wniosków, które nie mogą być odzwierciedlone w wyobraźni lub przed naszymi oczyma za pomocą obiektów zmysłowych”[5]. Niezależnie od przesadności tego stwierdzenia, nie ulega wątpliwości, że zazwyczaj odwołujemy się do pewnej formy geometrycznej intuicji, zaś rozumienie sytuacji jest kluczowe w elementarnych rozumowaniach geometrycznych.

Jednak w miarę rozwoju matematyki do głosu coraz silniej zaczął dochodzić odmienny punkt widzenia. W tym nowym ujęciu kryterium poprawności dowodu stanowi zgodność z pewnymi określonymi formalnie regułami – nie zaś intuicyjna akceptacja. Widać to bardzo wyraźnie na przykładzie geometrii, gdzie postulat „intuicyjnego wglądu” został zastąpiony postulatem możliwości sformułowania dowodu czyniącego zadość pewnym czysto formalnym wymaganiom[6]. W tym

[4] Odrębną sprawą jest to, że niekiedy takie „dowody rysunkowe” bywają mylące.

[5] Cytat za M. Detlefsen, *Formalism*, [w:] *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, (red.) S. Shapiro, Oxford University Press, Oxford 2005, s. 265.

[6] Ważną rolę odegrał tu także rozwój algebry, w której dokonywano czysto symbolicznych operacji na wyrażeniach matematycznych (wykorzystując np. jednostkę urojoną, której nie nadawano realistycznej interpretacji). Nie ma tu jednak miejsca na prezentację historyczną.

kontekście warto wspomnieć o badaniach Pascha i Hilberta, w których ta zmiana paradygmatu staje się wyraźna. Pasch pisał: „Jeśli geometria ma naprawdę być nauką dedukcyjną, proces wnioskowania musi we wszystkich fragmentach być niezależny od znaczenia pojęć geometrycznych, podobnie jak musi być niezależny od diagramów; pod uwagę mogą być brane jedynie relacje wyrażane w twierdzeniach i definicjach. W czasie wnioskowania jest użyteczne i dopuszczalne, ale nie konieczne myślenie o znaczeniach terminów; faktycznie, jeśli jest to konieczne, to w ten sposób widoczna staje się niepoprawność dowodu”[7]. Postulat wyeliminowania elementów o charakterze „wyobrażeniowo-poglądowych” (i – *de facto* – nawet odwołań do treści pojęć) jest radykalnie odmienny od postulatu intuicyjnej kontroli nad krokami dowodowymi. Przytoczony wcześniej pogląd Ponceleta Pasch uznałby za całkowicie niedopuszczalny. Kontrola opierająca się na naszej intuicyjnej zdolności do postrzegania przejść dowodowych jako prawomocnych nie ma znaczenia z punktu widzenia oceny poprawności dowodu. Dowody – w szczególności dowody geometryczne – można (i należy!) traktować w czysto formalny sposób, podobnie jak przekształcanie wyrażeń algebraicznych zgodnie z regułami formalnymi. Jeśli zaś w jakimś dowodzie m u s i e l i b y ś m y odwołać się do naszego rozumienia treści

[7] M. Pasch M., *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig 1882, s. 98 (cytowane za M. Detlefsen, *Formalism*, dz. cyt., s. 250–251).

pojęć i intuicyjnego postrzegania sytuacji, jest to świadectwo tego, że w dowodzie jest po prostu luka[8].

W takim duchu utrzymana jest praca Hilberta *Grundlagen der Geometrie* (1899). Hilbert dokonuje tam formalizacji geometrii poprzez zinterpretowanie jej w terminach struktur liczbowych. W takim ujęciu szkice czy wizualizacje przestają mieć znaczenie dowodowe (zachowując oczywiście znaczenie heurystyczne). Po dokonaniu takiej reinterpretacji geometrii, dowody geometryczne mogły nabrać pełnej ścisłości. Zaś kryterium owej ścisłości jest katalog reguł dowodowych o formalnym charakterze. Mówiąc obrazowo: w miejsce rozważań geometrycznych dotyczących np. położenia figur względem siebie, styczności figur, przecinania się prostych etc. pojawiają

[8] Hahn podsumował ów proces pojawiania się nowej wizji dowodu w następujący sposób: „Ponieważ intuicja okazała się zwodnicza w tak wielu przypadkach i ponieważ twierdzenia akceptowane na mocy intuicji okazywały się fałszywe (na mocy wnioskowania logicznego), matematycy stawali się coraz bardziej sceptyczni w odniesieniu do intuicji. Uznali, że nie jest rzeczą bezpieczną opieranie jakiegokolwiek stwierdzenia matematycznego [...] na intuicyjnych przekonaniach. Pojawiło się dążenie do wyeliminowania intuicji z rozumowań matematycznych i całkowitej formalizacji matematyki. [...] [K]ażde nowe pojęcie matematyczne miało być wprowadzane przez czysto logiczne definicje; każdy matematyczny dowód przeprowadzany za pomocą czysto logicznych środków"; H. Hahn, *Empiricism, Logic and Mathematics*, D. Reidel, Dordrecht – London – Boston 1980, s. 93. Niezależnie od tego, iż jest to być może zbyt radykalna prezentacja owego procesu, nie ulega wątpliwości, że w matematyce nastąpiła istotna zmiana.

się procedury rozwiązywania pewnych równań algebraicznych (które mogą być – do pewnego stopnia – zmechanizowane)[9].

Mamy zatem ujęcie „kartezjańskie", akcentujące rolę aktów intelektualnych i ujęcie „formalistyczne", akcentujące konieczność – i fundamentalną wręcz rolę! – formalizacji dowodów i podające kryteria o charakterze formalnym. Rzeczywiście, nie ulega wątpliwości, iż istotną rolę w matematyce odgrywa formalizacja, zaś niektóre operacje matematyczne mogą być prowadzone w czysto formalny, niejako mechaniczny sposób. Z czysto formalnymi regułami rachunkowymi stykamy się w szkole (np. wiemy, że można przenieść dane wyrażenie na drugą stronę równania zamieniając znak owego wyrażenia, znane są nam rozmaite formalne reguły do-

[9] Należy pamiętać, że oczywiście istnienie tych reguł nie powoduje, iż matematyka staje się nauką o przekształcaniu niezinterpretowanych symboli, czysto formalną grą. Owa gra ma swoje źródła, gdyż reguły naszego myślenia mają charakter systemowy. Celem analizy logicznej ma być więc „stworzenie protokołu reguł, zgodnie z którymi przebiega nasze myślenie. Myślenie, tak się składa, przebiega równolegle do mówienia i pisania: tworzymy wypowiedzi i umieszczamy je jedną za drugą"; D. Hilbert, *Die Grundlagen der Mathematik*, „Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität" 1928, 6, s. 65–85. Angielskie tłumaczenie [w:] *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879–1931*, (red.) J. Van Heijenoort, Harvard University Press, Cambridge, Mass. 2002, s. 475. (Nie jest to bynajmniej radykalny formalizm w duchu np. Curry'ego). Można dodać, że postulat poszukiwania ścisłości i pewności w geometrii znalazł rozwinięcie i dojrzałą postać w programie Hilberta, którego celem było ugruntowanie matematyki jako takiej.

konywania przekształceń algebraicznych *etc.*)[10]. Mamy z tym do czynienia także w bardziej zaawansowanych działach matematyki, gdzie zdarzają się przekształcenia mające charakter nieomalże mechaniczny – których możemy dokonywać nie zastanawiając się nad ich znaczeniem. To sugeruje formalistyczne spojrzenie na istotę dowodzenia, jako na manipulację symbolami. W takim ujęciu dowód matematyczny byłby w gruncie rzeczy ciągiem operacji formalnych – czy ściśle: ciągiem napisów, będących wynikiem prowadzonych operacji. W badaniach logicznych tak właśnie patrzymy na dowody. Dzięki rozwojowi logiki, mamy do dyspozycji ogólny model wnioskowań matematycznych i szereg narzędzi służących do analizy tychże. Logiczna definicja dowodu jest klarowna: jest to ciąg formuł precyzyjnie zdefiniowanego języka formalnego, spełniającego pewne (zadane w sposób czysto składniowy) warunki. Definiując język formalny musimy określić odpowiednie klasy wyrażeń (termów, formuł, aksjomatów *etc.*), a także reguły tworzenia dowodów. Poprawność dowodu jest rozpoznawana poprzez zastosowanie kryteriów syntaktycznych, gdzie abstrahujemy od interpretacji, czy rozumienia treści dowodu. Abstrahujemy także od kwestii ograniczeń praktycznych (związanych np. z dostępnością papieru, wielkością pamięci komputera czy wiekiem

[10] Szkolny algorytm znajdowania największego wspólnego dzielnika ma charakter czysto mechaniczny: „Jeśli na danym etapie liczby się różnią, odejmuj mniejszą od większej. Powtarzaj czynność, do momentu, kiedy będą równe. Wypisz wynik”. Nie musimy rozumieć tego algorytmu, aby go skutecznie zastosować.

Wszechświata). Przy tej czysto logicznej analizie nie badamy zagadnienia, czy dowód formalny mógłby być faktycznie przez kogoś przeprowadzony, ani problemu, czy jakikolwiek matematyk poczułby się nim przekonany – pomijamy więc aspekty semantyczne i pragmatyczne.

Pojawia się zatem pewnego rodzaju napięcie między praktyką matematyczną a analizą teoriodowodową. Traktowanie dowodu matematycznego jako konstrukcji czysto formalnej niewątpliwie nie znajduje potwierdzenia w praktyce matematycznej. Jest oczywistą rzeczą, że dowody znane z praktyki matematycznej (z podręczników, artykułów naukowych, referatów *etc*.) mają ścisły charakter, jednak z pewnością nie są dowodami formalnymi (rozumianymi jako ciągi napisów przekształcanych zgodnie z czysto syntaktycznymi regułami). Język praktyki matematycznej to język naturalny wzbogacony o pewne symbole[11]. Matematycy tworzą dowody w języku zrozumiałym dla kolegów po fachu, nie w języku, jaki jest przedmiotem zainteresowania specjalistów od teorii dowodu[12]. Rekonstrukcja logiczna stawia sobie inne cele, niż sprawne komunikowanie idei doty-

[11] Może lepiej powiedzieć, że jest to pewnego typu mieszanka języka naturalnego i symbolicznego – jednak to nie „procentowa zawartość znaczków" jest tu istotna, ale fakt, że z całą pewnością nie jest to ciąg napisów czysto formalnych.

[12] Tak jest w każdym razie w wypadku „zwykłych" działów matematyki. Kiedy przedmiotem badania jest np. tworzenie systemów automatycznego dowodzenia twierdzeń, formalizacja jest konieczna. Jednak także tutaj na metapoziomie pojawiają się rozważania nieformalne.

czących np. geometrii różniczkowej czy rachunku prawdopodobieństwa – zaś dowód z zakresu geometrii różniczkowej ma za zadanie rozwiązanie problemu matematycznego w sposób przekonujący dla specjalistów – nie zaś podanie rekonstrukcji w ulubionej przez logika formie! Z pełną formalizacją (abstrahując od względów praktycznych) nie wiązałaby się żadna poznawcza korzyść[13]. Prawdopodobnie (prawie) żaden autor dowodu (z zakresu ww. geometrii różniczkowej czy innych działów „prawdziwej matematyki") nie byłby w stanie rozpoznać sformalizowanej wersji swojego własnego dowodu, a nawet gdyby uwierzył w to, iż przedstawia się mu tę właśnie formalizację, nie byłby nią raczej zainteresowany, uznając, iż leży ona poza obszarem badań jego dyscypliny. Jego przedmiotem zainteresowania jest bowiem rozwiązywanie problemów (z czym często wiąże się tworzenie nowych pojęć, metod dowodowych *etc.*) – a nie formalizowanie dowodów, które już zostały zaakceptowane. Przypuszczam, że gdyby nawet okazało się, że jakiś uznany dowód matematyczny wymyka się pełnej formalizacji (np. że mimo wieloletnich prób nie udało się podać formalizacji dowodu hipotezy Poincarégo w języku ZFC), nie wpłynęłoby to

[13] Gwoli wyjaśnienia: z punktu widzenia teorii dowodu pełne sformalizowanie twierdzenia byłoby koniecznym etapem do podjęcia badań nad tym dowodem i oczywiście pozwalałoby na wzbogacenie naszej wiedzy. Jednak z punktu widzenia praktyki matematycznej nie miałoby to żadnego sensu. To właśnie mam na myśli mówiąc o braku zysku poznawczego: dotyczy to stanu wiedzy matematyka (zaś odrębną sprawą jest to, że z punktu widzenia logika dokonanie takiej formalizacji może pozwolić na istotne wzbogacenie jego wiedzy).

na jego akceptację w środowisku specjalistów. Można nawet zaryzykować tezę, że gdyby w jakiś sposób wykazano, że formalizacja dowodu nie jest możliwa, specjaliści nie uznaliby tego faktu za dyskwalifikujący dla dowodu[14]. Zapewne stwierdziliby, iż z punktu widzenia ich dyscypliny problem został rozwiązany, zaś posiadany przez nich dowód jest przekonujący. To, że nie jest możliwe jego przetłumaczenie na język notacji logicznej – to już nie ich problem (to problem ciekawy dla logików, zajmujących się takimi rekonstrukcjami). Ich zadaniem jest zdobywanie nowej wiedzy na temat rozmaitości różniczkowalnych, rozwiązywanie otwartych problemów – a nie przeformułowywanie (skądinąd w pełni satysfakcjonujących) dowodów do postaci, jaką lubią logicy.

Dowody matematyczne znane z praktyki nie są więc sformalizowane. Z drugiej jednak strony, trudno zaprzeczyć temu, iż jesteśmy przekonani o zasadniczej formalizowalności dowodów matematycznych. Jeśli w dowodzie pojawia się luka, możemy ją wypełnić – i taki proces uszczegółowienia możemy przeprowadzić w sposób niezwykle pedantyczny. Nie są znane przypadki, w których autorzy dowodu oświadczają, że uściślenie dowodu nie jest możliwe, i że trzeba po prostu dać się unieść „nastrojowi dowodu", który wytworzy w nas poczucie przekonania. Dowodzenie nie jest zestawem zabiegów perswazyjnych, a matematyka nie jest postmodernistyczną publicystyką. Choć

[14] Nie podejmuję tu problemu, co znaczy, że wykazano, iż formalizacja nie jest możliwa.

więc w praktyce dowody nie są przesadnie sformalizowane, to jednak matematycy są przekonani, iż takie pełne uściślenie dowodu jest możliwe. Co do zasady są więc przekonani, że dowody matematyczne dają się sformalizować[15]. Najczęściej też przyjmuje się, że ramy takiej rekonstrukcji formalnej są wyznaczone przez teorię mnogości[16]. Można więc powiedzieć, że dowodom „z życia" odpowiadają (potencjalne) dowody sformalizowane. Pojawia się więc pytanie o naturę „mostu Hilberta", który łączy „dwa królestwa: formalne królestwo obiektów syntaktycznych… z królestwem nieformalnego dyskursu matematycznego"[17].

Postulat sformułowania uniwersalnych, ogólnie przyjętych ram dowodowych ma swoje źródło w potrzebie klarownego ustalenia standardów matematycznej argumentacji, ustalenia „kodeksu postępowania matematycznego" – i w szczególności uwolnienia matematyki od elementów czysto subiektywnych. Jeszcze w wieku XIX owe standardy nie były do końca jasne, zaś zabiegi m.in. Pascha i Hilberta miały tę trudność

[15] Indukcyjnego argumentu na rzecz tej tezy dostarczają badania dotyczące formalizowania obszernych fragmentów matematyki (w szczególności polski projekt Mizar).
[16] W wielu przypadkach taka formalizacja może się odbywać z użyciem słabszych systemów formalnych – np. fragmenty teorii liczb można sformalizować w arytmetyce Peano, zaś znaczące fragmenty matematyki w arytmetyce drugiego rzędu. Szczegóły techniczne nie mają w kontekście tej dyskusji większego znaczenia: ważne jest to, że w ogóle można dokonać takiej formalizacji.
[17] Y. Rav, *Why do we prove theorems?*, „Philosophia Mathematica" 1999, 7, s. 31.

usunąć[18]. Z tego punktu widzenia teza o zasadniczej formalizowalności dowodów matematycznych może być postrzegana jako postulat metodologiczny.

Zauważmy jednak, że możemy ową tezę interpretować na dwa różne sposoby – odzwierciedlające nasze rozumienie tego, czym jest dowód matematyczny i jaka jest jego natura. Możemy bowiem ową tezę traktować jako:

(a) tezę ujawniającą istotę dowodów matematycznych;
(b) postulat o charakterze normatywnym.

Ad (a). Z tego punktu widzenia teza o zasadniczej formalizowalności stanowi po prostu tezę o charakterze empirycznym, która ujawnia posiadanie przez wszystkie dowody matematyczne pewnej wspólnej cechy: są one formalizowane. Można powiedzieć, że jest to teza zawierająca definicję sprawozdawczą dowodu matematycznego, jako rozumowania, które podlega formalizacji. To odróżnia rozumowania matematyczne od – najbardziej nawet przekonujących – analiz prawniczych, socjologicznych czy psychologicznych. Można powiedzieć, że w myśl tej tezy, „w tle" każdego zwykłego dowodu tkwi jego (potencjalna) formalna wersja[19]. W pewnym sensie nasze do-

[18] Pamiętamy spory dotyczące np. metod niekonstruktywnych, dyskusję na temat pewnika wyboru z pierwszych lat XX wieku etc. Prace Pascha i Hilberta stanowią jeden z etapów (czy: nurtów) procesu rygoryzacji matematyki.

[19] Tak sprawę stawia Azzouni w pracy *The derivation-indicator view of mathematical practice*, „Philosophia Mathematica" 2004, 3 (12),

wody są jedynie swoistymi skrótami dla owych prawdziwych dowodów, leżących u podłoża naszego – mówiąc żartobliwie – „machania rękami". Zaś tym, co powoduje, że nasze dowody są skutecznym środkiem argumentacyjnym jest właśnie istnienie owego dowodu formalnego w tle, który jest uprawdziwiaczem dla twierdzenia. Analizy pojęciowe prowadzone przez matematyków mają swoje ugruntowanie w tych systemach[20].

s. 81–105: dowody matematyczne są pewnego rodzaju skrótami dla dowodów sformułowanych w pewnych systemach algorytmicznych. Azzouni nazywa swoją koncepcję „derivation-indicator view". Zdaniem Azzouniego, realnie badane dowody są w gruncie rzeczy pewnymi wskaźnikami (stąd: *indicator*) istnienia stosownej procedury obliczeniowej stanowiącej idealną wersję dowodu (stąd: *derivation*). Ta procedura jest określona w pewnym systemie algorytmicznym. Azzouni pisze więc „jeśli dowody w gruncie rzeczy stanowią narzędzia, za pomocą których matematycy przekonują siebie nawzajem o istnieniu takiej czy innej mechanicznie weryfikowalnej derywacji, fakt ten wystarczy do wyjaśnienia, dlaczego matematycy zgadzają się ze sobą co do tego, kiedy pewien dowód faktycznie dowodzi pewnego twierdzenia" (tamże, s. 84). Tezy Azzouniego można interpretować w taki sposób, że znany nam realny dowód stanowi argument na rzecz istnienia takiej derywacji „w takim czy innym nieformalnie określonym systemie algorytmicznym" (tamże, s. 85). Analizę koncepcji Azzouniego Czytelnik znajdzie w pracach: Y. Rav, *A critique of a formalist-mechanist version of the justification of arguments in mathematicians' proof practices*, „Philosophia Mathematica" 2007, 15, s. 291–320 i K. Wójtowicz, *O pojęciu dowodu w matematyce*, seria Monografie Fundacji Na Rzecz Nauki Polskiej, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń 2012.

[20] Odrębną sprawą jest pytanie dotyczące poznawczych mechanizmów, które „na powierzchni" ujawniają się w formie pojęciowych analiz, stanowiąc reprezentację pewnych algorytmicznych mechanizmów „w tle". Jest to znacznie szerszy problem z zakresu filozofii umysłu.

Ad (b). Z tego punktu widzenia postulat o formalizowalności stanowi postulat metodologiczny, definiujący zakres pojęcia dopuszczalnej argumentacji w matematyce. O tym, czy dany dowód jest „legalny" stanowi to, czy daje się sformalizować. Formalizacja stanowi rękojmię (i warunek konieczny) akceptowalności dowodu. Pojawia się pytanie o status tego postulatu: czy byłby on zaakceptowany przez matematyków w takiej postaci? Wydaje się – że raczej nie. W praktyce matematycznej matematycy akceptują dowody bynajmniej nie dlatego, że ktoś wskazał formalizację tego dowodu. To w ogóle nie odgrywa żadnej roli, matematycy nie są zainteresowani formalnymi odpowiednikami ich dowodów. Celem dowodu matematycznego jest bowiem przekazywanie idei, a nie tworzenie formalizacji[21].

Powyższe rozważania dotyczą w gruncie rzeczy tego, czym są dowody matematyczne i jaka jest ich istota. Można tu wskazać dwa przeciwstawne punkty widzenia.

[21] Barwise pisze iż „pomysł, aby rozumowanie mogło zostać w jakiś sposób zredukowane do postaci czysto syntaktycznej w pewnym formalnym, sztucznie skonstruowanym języku jest stosunkowo nowym pomysłem w historii matematyki. Wyrasta z programu Hilberta. Dowody matematyczne istniały przez tysiące lat zanim pojawili się logicy i zmatematyzowali to pojęcie. [...] O żadnym systemie nie można powiedzieć, że to właśnie on jest tym rzeczywistym pojęciem dowodu, ponieważ istnieją niekończące się warianty [...]. One wszystkie nie mogą być rzeczywistym pojęciem dowodu [...] istnieją dobre dowody, które nie są modelowane w żadnym współczesnym systemie dedukcyjnym"; J. Barwise, *Mathematical proofs of computer system correctness*, „Notices of the American Mathematical Society" 1989, 36, s. 844–851; cytowanie za Y. Rav, *A critique of a formalist-mechanist...*, dz. cyt., s. 302.

(1) Prawdziwe dowody to znane z praktyki dowody nieformalne. One są źródłem wiedzy matematycznej. Ich formalne wersje nie są poznawczo istotne – stanowią jedynie pewnego typu artefakty, pojawiające się przy okazji (meta)analizy prowadzonej przez logików. Z punktu widzenia praktyki matematycznej są jedynie sztucznymi imitacjami prawdziwych dowodów i prawdziwej matematyki[22].

(2) To formalne dowody stanowią o istocie dowodu – i to one są prawdziwymi dowodami. Nieformalne dowody stanowią jedynie pewnego rodzaju skróty, wskaźniki (tak jak twierdzi Azzouni, por. przypis xxx), zaś akceptujemy je jedynie dlatego, że wiemy, iż mogą zostać sformalizowane. Formalizacja odkrywa ich prawdziwą naturę. Zaś fakt, że matematycy zadowalają się dowodami nieformalnymi stanowi ciekawe zjawisko psychologiczne – ale nie odkrywa prawdziwej natury dowodów.

Rozstrzygnięcie tego zagadnienia nie jest możliwe w tym tekście – i być może w ogóle nie jest możliwe… Zapewne oba punkty widzenia ukazują ważne aspekty zagadnienia i ukazują pewien fragment prawdy na temat natury dowodu.

[22] Mówiąc metaforycznie: formalna wersja dowodu nie ujawnia jego istoty, podobnie jak zapis zdjęcia gór w postaci ciągu zerojedynkowego nie ujawnia bezpośrednio ich piękna.

2. Problem wyjaśniania w matematyce

Problem wyjaśniania jest jednym z centralnych problemów w filozofii nauki, jednak w filozofii matematyki jest on podejmowany w stopniu stosunkowo znikomym. Jedna z nielicznych prac na ten temat to artykuł[23], w którym autor posługuje się pojęciem dowodu wyjaśniającego (*explanatory proof*)[24]. Steiner omawia to zagadnienie na przykładzie dowodu identyczności dwóch zbiorów (przy czym problem jest wyraźniej postawiony, kiedy będzie mowa o koekstensjonalności dwóch własności). Wyjaśnienie owej koekstensjonalności będzie możliwe dzięki wykazaniu związku między własnościami. Jeśli natomiast nie uda się takiego związku wykazać, to nawet jeśli podamy dowód identyczności odpowiednich zbiorów, ów dowód nie będzie miał charakteru wyjaśniającego[25].

Inną pracą podejmującą problem wyjaśnienia jest artykuł autorstwa Resnika i Kushnera[26]. Autorzy nawiązują w niej do

[23] M. Steiner, *Mathematics, explanation and scientific knowledge*, „Nous" 1978, 12, s. 17–28.

[24] Nie znaczy to bynajmniej, że dopiero Steiner zwrócił uwagę na fakt, iż pewne dowody mają taki charakter, a inne nie. Rozróżnienie na argumenty wyjaśniające i jedynie wymuszające zgodę jest znane od starożytności.

[25] Można dodać: w tej sytuacji będziemy wiedzieć, że dwa zbiory są identyczne, ale fakt ten nie będzie się nam jawił jako bardziej naturalny, niż gdyby było inaczej.

[26] M.D. Resnik, D. Kushner, *Explanation, independence and realism in mathematics*, „British Journal for the Philosophy of Science" 1987, 38 (2), s. 141–158.

analiz Steinera, odnotowując fakt, iż „matematycy żądają wyjaśnień czysto matematycznych problemów i takowe oferują; niektóre dowody są bardzo pouczające podczas gdy inne są raczej nieprzejrzyste”[27]. W odniesieniu do problemu wyjaśniania w matematyce Resnik i Kusher zauważają, iż:

> (1) Jeśli uznamy, że systematyzacja stanowi wyjaśnianie (w każdym razie tak możemy to pojęcie rozumieć w jednym z jego znaczeń) – to w matematyce spotykamy się z wyjaśnianiem. Nie ulega bowiem wątpliwości, że tworzone są teorie systematyzujące (wcześniej luźno powiązane i rozproszone) wyniki.[28]
> (2) W matematyce możemy zasadnie stawiać pytania typu „dlaczego…?”. Możemy uzyskiwać odpowiedzi na takie pytania za pośrednictwem dowodów, ale nie tylko: pewne zjawiska matematyczne można wyjaśniać poprzez odwołanie się np. do możliwości (re)interpretacji pojęć. Autorzy podają tutaj przykład definicji dodawania w terminach sum zbiorów: ich zdaniem stanowi ona dobre wyjaśnienie przemienności i łączności dodawania. Podają też przykład dowodu twierdzenia o wartości średniej, dla którego kluczowe jest założenie dotyczące spójności zbioru.

[27] Tamże, s. 142.

[28] Z tego typu procedurami wyjaśniającymi mamy do czynienia np. wtedy, kiedy dokonuje się aksjomatyzacja teorii: dzieje się to zazwyczaj wtedy, kiedy już posiadamy pewną liczbę wyników, dla których poszukujemy podstawy w postaci fundamentalnych zasad leżących u ich podłoża. Jest to mechanizm powszechny w matematyce – nie tylko w fazie aksjomatyzacji formalnej, ale przy porządkowaniu pola pojęciowego teorii.

Ponieważ jedynymi spójnymi podzbiorami **R** są przedziały (i półproste oraz cały zbiór **R**), ten fakt stanowi wyjaśnienie, dlaczego twierdzenie to nie zachodzi dla innych podzbiorów **R.** Nie jest to wyjaśnienie przez dowód, raczej przez kontrprzykłady wskazujące na rolę istotnych założeń w dowodzie.

(3) Wyjaśnienia w matematyce często polegają na wskazaniu pewnego zestawu wyników, opatrzonych odpowiednim komentarzem – a nie jedynie pojedynczych twierdzeń[29]. Można byłoby więc powiedzieć, że to całe teorie czy koncepcje matematyczne stanowią wyjaśnienie[30].

Niezależnie od szczegółowych uwag dotyczących dowodów wyjaśniających, Resnik i Kushner formułują pewną ogólną obserwację dotyczącą dowodów matematycznych: wszystkie (można tu dodać: poprawne) dowody mają charakter przekonujący – dowiadujemy się dzięki nim, że dany fakt zachodzi. Jednak niektóre z dowodów pozostawiają nas w stanie swoistego zdumienia, d l a c z e g o ów fakt zachodzi. Wynika to z faktu,

---

[29] Przykładem podanym przez autorów jest zagadnienie kategoryczności arytmetyki drugiego rzędu, skonfrontowane z brakiem kategoryczności arytmetyki pierwszego rzędu. Różnią się one tym, że w arytmetyce drugiego rzędu mamy pełen aksjomat indukcji, natomiast w arytmetyce pierwszego rzędu schematy aksjomatów indukcji. Fakt ten wyjaśnia różnice, ale nie można uznać, iż to pojedyncze twierdzenie (czy pojedynczy dowód) stanowi wyjaśnienie: raczej cała grupa dowodów.

[30] Tamże, s. 151–152.

że mogą istnieć dowody, które są w pełni poprawne, ale zarazem nie ujawniają istoty zagadnienia[31].

W systematyczny sposób problem wyjaśniania podejmowany jest w pracy Mancosu[32]. Formułuje on 5 zasadniczych pytań dotyczących wyjaśniania w matematyce:

(1) Czy w matematyce występują wyjaśnienia?
(2) Jaką przybierają formę?
(3) Czy problem wyjaśniania to nowość w filozofii matematyki?
(4) Jakie są filozoficzne podejścia do problemu wyjaśniania w matematyce?
(5) Jaka jest zależność między wyjaśnianiem w matematyce a teoriami wyjaśniania w nauce?[33]

Autor wyraźnie odróżnia dowody, które wyjaśniają od takich, które wprawdzie dowodzą (można powiedzieć: wymuszają naszą zgodę na pewien fakt), ale nie wyjaśniają głębszych

[31] „Matematycy nie odkrywają dowodów poprzez dedukowanie na ślepo wniosków ze znanych wcześniej wyników, raczej najpierw starają się poznać strukturę matematyczną, w ten sposób są w stanie zobaczyć, co jest o niej prawdziwe, i jak te podstawowe prawdy wynikają z jej podstawowych własności"; tamże, s. 153–154.
[32] P. Mancosu, *Mathematical explanation: problems and prospects*, „Topoi" 2001, 20, s. 97–117.
[33] Tamże, s. 98.

przyczyn tego faktu[34]. Mancosu odnosi się także do problemu metodologicznej spójności (czy: jednolitości) dowodów – np. aby metody nieelementarne nie ingerowały wtedy, kiedy nie jest to konieczne, gdyż mogą zaburzać nasze rozumienie danej sytuacji matematycznej[35].

Mancosu w swoich analizach nawiązuje do faktu, iż w matematyce zdarza się, iż motywacje dla przyjęciach takich a nie innych aksjomatów wynikają ze względów metodologicznych: kryterium jest nie tyle ich oczywistość, co raczej rola w danej

[34] Mancosu odwołuje się tutaj do rozważanej przez Pringsheima propozycji nowego ujęcia teorii funkcji analitycznych zespolonych, które miało (zdaniem Pringsheima) umożliwić naturalne wyjaśnienie szeregu faktów z zakresu analizy zespolonej. Pisał m.in., iż dzięki temu ujęciu „podstawowe fakty, które w teorii Cauchy'ego pojawiają się jako sensacyjne wyniki działania tajemniczego mechanizmu prowadzącego do cudownych zjawisk, w ramach naszej teorii uzyskują naturalne wyjaśnienie"; A. Pringsheim, *Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre, Zweiter Band, Erste Abteilung: Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, B.G. Teubner, Leipzig – Berlin 1925, s. V (cytowanie za P. Mancosu, *Mathematical explanation...*, dz. cyt., s. 109). W swojej pracy Mancosu przedstawia dość szczegółowo koncepcję Pringsheima (por. też K. Wójtowicz, *O pojęciu dowodu w matematyce*, dz. cyt.). Odrębną sprawą jest to, że propozycja Pringsheima raczej nie znalazła uznania „na rynku idei matematycznych".

[35] Następujący przykład pozwoli na wyjaśnienie tego komentarza. Zauważmy, że twierdzenia szkolnej geometrii euklidesowej (np. że prosta jest styczna do okręgu) możemy dowodzić właśnie metodami geometrycznymi, ale także poprzez zastosowanie technik geometrii analitycznej. Po przetłumaczeniu na język geometrii analitycznej możemy odwoływać się do różnych silniejszych wyników matematycznych, także bardzo abstrakcyjnych. Z punktu widzenia pierwotnego problemu geometrycznego, te techniki nie wnoszą rozumienia, w zasadzie jedynie zaciemniają obraz (choć dają dowód).

teorii (można powiedzieć: rola porządkująca). Mancosu przywołuje tutaj m.in. stanowiska Russella[36] i Gödla.

Odnosząc się do koncepcji Gödla, Mancosu ma na myśli oczywiście kryterium owocności jako pragmatyczne kryterium przyjęcia aksjomatów w danej teorii. W swoim komentarzu do koncepcji matematyki Russella, Gödel pisze, iż ten „porównuje ...aksjomaty logiki i matematyki z prawami przyrody, a oczywistość logiczną z percepcją zmysłową, tak że aksjomaty nie muszą koniecznie być oczywiste same przez się, ale ich uzasadnienie bazuje (dokładnie tak, jak w fizyce) na fakcie, iż pozwalają one wydedukować te 'dane zmysłowe'"[37]. Mamy zatem do czy-

[36] „Kiedy badamy zasady matematyki [...] mamy tendencję do wiary w przesłanki, ponieważ widzimy, że ich konsekwencje są prawdziwe, zamiast wierzyć we wnioski, ponieważ przesłanki są prawdziwe. Jednak wyprowadzanie przesłanek z wniosków jest istotą indukcji, a zatem metodą badań zasad matematyki jest metoda indukcyjna, zasadniczo identyczna z metodą odkrywania ogólnych praw w dowolnej nauce"; B.A.W. Russell, *Essays in Analysis*, (red.) D. Lackey, George Allen & Unwin, London 1973, s. 273–274 (cytowanie za P. Mancosu, *Mathematical explanation...*, dz. cyt.). „Gdy czysta matematyka jest zorganizowana jako system dedukcyjny [...] staje się oczywiste, że nie wierzymy w prawdy czystej matematyki tylko dlatego, że wierzymy w prawdziwość przesłanek. Niektóre z przesłanek są mniej oczywiste niż ich konsekwencje i wierzymy w nie głównie ze względu na ich konsekwencje. Tak jest zawsze, kiedy nauka jest przedstawiona jako system dedukcyjny. [...] Nasze racje dla wierzenia w logikę i czystą matematykę są, po części, indukcyjne"; B.A.W. Russell, *Logical Atomism*, [w:] *Contemporary British Philosophy*, (red.) J. M. Muirhead, George Allen & Unwin, London 1924, przedrukowane [w:] *Logic and Knowledge*, (red.) R.C. Marsh, London, George Allen & Unwin, s. 325–326 (cytowane za P. Mancosu, *Mathematical explanation...*, dz. cyt.).

[37] K. Gödel, *Russell's Mathematical Logic*, [w:] *The philosophy of Bertrand Russell. Library of Living philosophers*, vol. 5, (red.) P.A.

nienia z zasadą o charakterze heurystycznym: uzasadnieniem (i swoistym wyjaśnieniem) dla danego aksjomatu jest to, że posiada on owocne konsekwencje[38].

3. Uwagi końcowe

Moim zdaniem analizy dotyczące pojęcia wyjaśniania w matematyce będą znacznie bardziej owocne, jeśli zostaną oparte o „treściową" koncepcję dowodu. Samo istnienie dowodu nie stanowi bowiem jeszcze wyjaśnienia – i tym bardziej takiego wyjaśnienia nie stanowi istnienie dowodu formalnego. Z punktu widzenia praktyki matematycznej, znacznie ważniejsza jest analiza pojęć matematycznych. Zarazem dobre ujęcie problematyki wyjaśnienia jest trudne, ponieważ kategorie znane z nauk empirycznych nie mogą być tu zastosowane wprost – zaś kategoria wyjaśnienia ma charakter po części psychologiczny. Mimo tych trudności (a może właśnie dlatego), problem wyjaśniania w matematyce – w szczególności problem eksplanacyjnej roli dowodów matematycznych – uważam za jeden z kluczowych problemów przy poszukiwaniu istoty matematyki.

Schlipp, Open Court Publishing Company, La Salle, Ill. 1944. Polskie tłumaczenie [w:] *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, (red.) R. Murawski, Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2002, s. 81.

[38] Podobne myśli znajdziemy u Lakatosa, na co zwraca uwagę Mancosu (por. też K. Wójtowicz, *O pojęciu dowodu w matematyce*, dz. cyt.).

Bibliografia

Azzouni J., *The derivation-indicator view of mathematical practice*, „Philosophia Mathematica" 2004, 3 (12), s. 81–105.

Barwise J., *Mathematical proofs of computer system correctness*, „Notices of the American Mathematical Society" 1989, 36, s. 844–851.

Detlefsen M., *Formalism*, [w:] *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, (red.) S. Shapiro S., Oxford University Press, Oxford 2005, s. 236–317.

Gödel K., *Russell's Mathematical Logic*, [w:] *The philosophy of Bertrand Russell. Library of Living philosophers*, vol. 5, (red.) P.A. Schlipp, Open Court Publishing Company, La Salle, Ill. 1944, s. 123–153. Polskie tłumaczenie [w:] *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, (red.) R. Murawski, Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2002, s. 77–102.

Hahn H., *Empiricism, Logic and Mathematics*, D. Reidel, Dordrecht – London – Boston 1980.

Hilbert D., *Über das Unendliche*, „Mathematische Annalen" 1926, 95, s. 161–190. Tłumaczenie polskie [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, (red.) R. Murawski, Wydawnictwa UAM, Poznań, s. 288–307.

Hilbert D., *Die Grundlagen der Mathematik*, „Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität" 1928, 6, s. 65–85. Angielskie tłumaczenie [w:] *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879–1931*, (red.) J. Van Heijenoort, Harvard University Press, Cambridge, Mass. 2002, s. 464–479.

Kartezjusz, [1958] *Prawidła kierowania umysłem; poszukiwanie prawdy poprzez światło przyrodzone rozumu*, tłum. L. Chmaj, PWN, Warszawa 1958.

Mancosu P., *Mathematical explanation: problems and prospects*, „Topoi" 2001, 20, s. 97–117.

Pasch M., *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig 1882.

Pringsheim A., *Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre, Zweiter Band, Erste Abteilung: Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, B.G. Teubner, Leipzig – Berlin 1925.

Rav Y., *Why do we prove theorems?*, „Philosophia Mathematica" 1999, 7, s. 5–41.

Rav Y., *A critique of a formalist-mechanist version of the justification of arguments in mathematicians' proof practices*, „Philosophia Mathematica" 2007, 15, s. 291–320.

Resnik M.D., Kushner D., *Explanation, independence and realism in mathematics*, *„British Journal for the Philosophy of Science" 1987,* 38 (2), s. 141–158.

Russell B.A.W., *Logical Atomism*, [w:] *Contemporary British Philosophy*, (red.) J. M. Muirhead, George Allen & Unwin, London 1924, s. 357–383. Przedrukowane [w:] *Logic and Knowledge*, (red.) R.C. Marsh, London, George Allen & Unwin, s. 323–343.

Russell B.A.W., *Essays in Analysis*, (red.) D. Lackey, George Allen & Unwin, London 1973.

Steiner M., *Mathematics, explanation and scientific knowledge*, „Nous" 1978, 12, s. 17–28.

Wójtowicz K., *O pojęciu dowodu w matematyce*, seria Monografie Fundacji Na Rzecz Nauki Polskiej, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń 2012, s. 250.

Matematyka eksperymentalna – kilka refleksji historyka nauki

Krzysztof Maślanka
Instytut Historii Nauki PAN
Warszawa – Kraków

Experimental mathematics – several remarks from historian of science

Abstract

The paper deals with the ever growing role of computers in pure mathematics. Several examples, mainly from number theory, when numerical experiments did shed some light on difficult problems are given.

Key words

number theory, history of computations, computer-assisted proof

Pamięci Profesora Andrzeja Pelczara (12 IV 1937 – 18 V 2010)

Beati mortui qui in Domino moriuntur,
opera enim illorum sequuntur illos.
Apokalipsa 14,13

1. Refleksje ogólne

Tekst niniejszego referatu, wygłoszonego przeze mnie 7 lutego 2011 r., jest kontynuacją i rozwinięciem niektórych wątków, które przedstawiłem wspólnie ze śp. profesorem Andrzejem Pelczarem 10 maja 2010 roku[1]. Przedwczesna śmierć Profesora, która nastąpiła osiem dni później, skłania do kilku nieformalnych refleksji i wspomnień. Przedstawię też szerzej motywacje dla wyboru tematyki obydwu referatów.

Profesor Pelczar był recenzentem mojej rozprawy habilitacyjnej pt. *Liczba i kwant* (OBI 2004) dotyczącej pewnych hipotez w analitycznej teorii liczb oraz ich nieoczekiwanych związków z fizyką kwantową. Związków, podkreślmy, nieoczekiwanych, bowiem łączących teorię liczb – czyli najczystszą z dziedzin matematyki – z żywą, doświadczalną fizyką mikroświata. A przecież jeszcze kilkadziesiąt lat temu wybitny matematyk angielski G.H. Hardy z niekłamaną dumą podkreślał, że teoria liczb nie ma i nigdy nie będzie mieć żadnych zastosowań w praktyce.

Kolokwium habilitacyjne odbyło się w Instytucie Historii Nauki PAN w Warszawie 14 kwietnia 2005 r. w pamiętnym okresie pomiędzy pogrzebem Jana Pawła II a rozpoczęciem konklawe. Później profesor Pelczar kilkakrotnie bardzo pozytywnie nawiązywał do mojej rozprawy. W połowie lutego

[1] K. Maślanka, *Ćwierć wieku od obalenia hipotezy Mertensa (1985). Refleksje na temat dowodu komputerowego*, „Prace Komisji Filozofii Nauk Przyrodniczych PAU", t. V, 2011, s. 19–39.

2010 r. zaproponował mi wspólny referat na Komisji Filozofii Nauk Przyrodniczych PAU. Uczynił to w sposób dość nieformalny i żartobliwy: „Jest zamach na pana…". Oczywiście zgodziłem się.

Planowany na kwiecień referat opóźnił się o miesiąc z powodu żałoby po katastrofie smoleńskiej. 10 maja Profesor pomylił godziny i pojawił się w sali nr 26 PAU o godzinę za wcześnie: o 15-tej. Początkowo był trochę zażenowany swoją pomyłką. Ostatecznie jednak mieliśmy, wraz z przewodniczącym komisji prof. Jerzym Janikiem (1927–2012), całą tę godzinę na luźniejszą rozmowę, wspomnienia i anegdoty. Dziś skłonny jestem sądzić, że nie była to pomyłka: to raczej Przeznaczenie podarowało nam tę godzinę…

Wspomniany referat z 10 maja 2010 r., jak i jego kontynuacja z 7 lutego 2011 r., dotyczyły tzw. matematyki eksperymentalnej; mniej formalnie mówi się o „komputerach w matematyce". Kwestia ta, jak często podkreślał Profesor, stanowi od niedawna autentycznie n o w ą j a k o ś ć i jako taka domaga się usprawiedliwienia. Jest rzeczą wiadomą, że nawet wybitni matematycy nie stronili od obliczeń numerycznych mających dopomóc intuicji, choć w ostatecznych wersjach swych publikacji starannie, jakby wstydliwie zacierali wszelkie ślady po takich próbach. Na temat obliczeń Gaussa i Riemanna mówiłem w poprzednim referacie. Choć nieczęsto się to podkreśla – a jeśli już, to bardziej w niezobowiązujących wypowiedziach matematyków, ale nigdy w podręcznikach – początkiem każdego twierdzenia i każdego dowodu jest i n t u i c j a. Trafnie wyraził

Rys. 1. Ostatnie zdjęcie prof. Pelczara wraz z przyjaciółmi, wykonane w dniu Jego śmierci 18 maja 2010 r., wkrótce po zakończeniu uroczystego posiedzenia Senatu Uniwersytetu Jagiellońskiego w Collegium Maius z okazji jubileuszu 50-lecia doktoratu prof. Józefa Siciaka. Od lewej profesorowie: Bolesław Szafirski, Czesław Olech, Józef Siciak i Andrzej Pelczar. (Zdjęcie ze zbiorów prof. Siciaka, dzięki uprzejmości prof. Szafirskiego).

to matematyk węgierski George Pólya (1887–1985): „Intuicja przychodzi do nas znacznie wcześniej niż ścisłe, formalne argumenty, ale tych z kolei nie możemy do końca zrozumieć, dopóki nie osiągniemy odpowiednio wysokiego stopnia abstrakcji”[2].

[2] G. Pólya, *Odkrycie matematyczne. O rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu rozwiązywania zadań*, tłum. A. Góralski, WNT, Warszawa 1975.

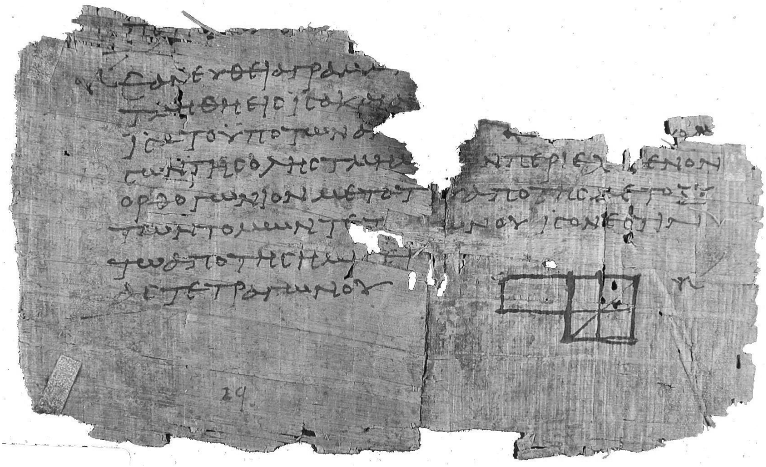
2. Parę uwag o dowodach

Z metodologicznego punktu widzenia matematyka zawsze różniła się od nauk przyrodniczych ze względu na swą naturę formalną oraz nacisk na rozumowanie dedukcyjne. Atrybutem matematyki był – i zawsze będzie – ścisły dowód, rozumiany oczywiście jako dzieło ludzkiego umysłu. Eksperymenty i obserwacje, czyli kamień węgielny nauk przyrodniczych oraz ostateczny probierz poprawności ich teorii, nie grały dotąd w matematyce specjalnej roli. Przynajmniej tak było jeszcze 30 lat temu.

Zaaprobowany przez środowisko matematyków dowód jest albo poprawny, albo nie jest dowodem i w zasadzie nie powinno tu być miejsca na subiektywne wartościowanie. Pomimo tego, szczególnie cenione są dowody „estetyczne", np. bardzo zwięzłe lub korzystające z zaskakujących powiązań z różnymi działami matematyki. Klasycznym przykładem jest znaleziony przez pitagorejczyków elementarny dowód typu nie wprost pokazujący niewymierność liczby $\sqrt{2}$, jak również dowód Euklidesa na to, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. To ostatnie nie jest oczywiste. Wiadomo, że w miarę przechodzenia do coraz większych liczb naturalnych, znajdujemy coraz mniej liczb pierwszych. Jest to niewątpliwie wynik numerycznych e k s p e r y m e n t ó w. Czy jednak napotkamy gdzieś hipotetyczną największą liczbę pierwszą? Czystym rozumowaniem Euklides pokazał, że tak nie jest i wyraził to w słowach: „Οι πρωτοι αριθμοι πλειους εισι παντος του προτεθεντος πληθους πρωτων αριθμον" („Liczb pierwszych jest więcej, niż jakiekolwiek dane ich mnóstwo", *Elementy*, księga IX, twierdzenie 20).

Obydwa te starożytne dowody przytaczane są do dziś w podręcznikach w formie podanej przez odkrywców, co dobitnie świadczy o trwałości matematycznych prawd: raz odkryte trwają, niewrażliwe na upływ czasu lub zmiany naukowej mody.

Alternatywny dowód pokazujący, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele odkrył w roku 1737 Leonhard Euler (1707–83). Używając ulubionego porównania profesora Pelczara można powiedzieć, że dowód Eulera to jakby inna



Rys 2. Starożytny papirus zwany *Oxyrhynchus* zawierający najstarszy znany zapis fragmentu sławnych *Elementów* Euklidesa. Nazwa pochodzi od miejscowości w Górnym Egipcie (obecnie El-Bahnasa, 160 km na południe od Kairu), gdzie natrafiono na olbrzymie ilości starożytnych papirusów z czasów, gdy Egiptem rządzili Ptolemeusze i Rzymianie (IV w. przed Chr. – VII w. po Chr.). Miejsce to, jako źródło cennych papirusów, jest eksploatowane bez przerwy od stu lat!

ścieżka prowadząca na ten sam szczyt. Więcej, jest to ścieżka, z której roztacza się bogatszy widok. Euler pokazał bowiem ponadto, że gęstość liczb pierwszych wśród liczb całkowitych jest na tyle duża, że suma ich odwrotności jest rozbieżna – w przeciwieństwie np. do kwadratów kolejnych liczb naturalnych, które z kolei są na tyle rzadkie, że suma ich odwrotności jest skończona. Euler pokazał również, że ta ostatnia suma wynosi $\pi^2/6$. (Odkrycie to stanowiło rozwiązanie zagadnienia znanego pod nazwą problemu bazylejskiego; dla wielu znanych matematyków był to próg nie do przekroczenia i dopiero młody Euler rozwiązał go poprawnie, ujawniając tym samym światu swój wielki talent).

Dowód Eulera opiera się na odkrytej przez niego głębokiej tożsamości, w której pojawia się definicja matematycznej funkcji dzeta:

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{\substack{\text{wszystkie} \\ \text{liczby pierwsze } p}} \frac{1}{1-p^{-s}} \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

Przechodząc w tej formule ze zmienną s do jedynki dostajemy po lewej szereg harmoniczny, który, co można pokazać w sposób elementarny, jest rozbieżny. Gdyby liczb pierwszych było skończenie wiele, to iloczyn po prawej byłby skończoną liczbą wymierną, co stanowi sprzeczność.

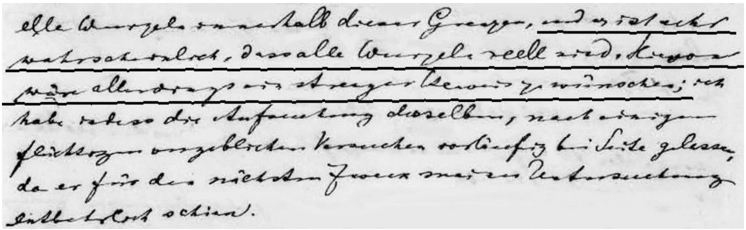
Jeszcze inna wersja tego dowodu polega na podstawieniu w formule Eulera $s = 2$:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = \prod_{\substack{\text{wszystkie} \\ \text{liczby pierwsze } p}} \frac{p^2}{p^2 - 1}$$

W roku 1794 Adrien-Marie Legendre (1752-1833) w swym dziele *Géométrie* pokazał, że π^2 jest liczbą niewymierną, o czym sam Euler nie wiedział. Gdyby zatem ilość liczb pierwszych była skończona, po prawej stronie mielibyśmy wartość wymierną, co ponownie stanowi sprzeczność. Tu właśnie tkwi wspomniany element zaskoczenia, ten przejaw matematycznego piękna i ukrytej, globalnej koherencji całej matematyki, która nie jest zbiorem konwencji, ale spójnym logicznie systemem. Na pierwszy rzut oka niewymierność liczby π^2 (która to liczba ma naturalny rodowód geometryczny) oraz należący do teorii liczb problem ilości liczb pierwszych zdają się nie mieć ze sobą nic wspólnego.

Dlaczego piszę tu tyle o liczbach pierwszych? Ktoś może podejrzewać, że dlatego, iż wiążą się one z funkcją dzeta, gdzie mam swoje skromne osiągnięcia[3]. Każdy czytał w prasie o hipotezie Riemanna, czyli jednym z Problemów Milenijnych i milionie dolarów nagrody za rozstrzygnięcie każdego z nich. Prawda jest jednak bardziej skomplikowana i ciekawsza. Tu właśnie kończą się ambicje oraz finanse, a w naturalny sposób pojawia się głęboka filozofia matematyki.

[3] Więcej szczegółów zawiera mój tekst w internetowym wydaniu „PAUzy Akademickiej", nr 130, 30 czerwca 2011. Por też L. Baez-Duarte, *On Maslanka's reprezentation for the Riemann zeta-function*, arXiv:math/0307214v1 [mathNT] 16 Juni 2003.



Rys 3. Fragment rękopisu Riemanna jego pracy z roku 1859, przechowywany z pietyzmem w bibliotece uniwersyteckiej w Getyndze. Zawiera on jedno z najbardziej doniosłych zdań w całej literaturze matematycznej. Jest to hipoteza dotycząca funkcji dzeta mówiąca, że wszystkie zespolone pierwiastki tej funkcji leżą dokładnie na linii prostej. Gdyby faktycznie tak było, miałoby to wielkie znaczenie dla naszej wiedzy o liczbach pierwszych. „Oczywiście – pisze Riemann – ścisły dowód byłby tu bardzo pożądany. Po kilku krótkich, nieudanych próbach odłożyłem na jakiś czas poszukiwania tego dowodu".

Leopold Kronecker (1823–91) powiedział kiedyś, że „wszelkie wyniki najbardziej podstawowych badań matematycznych muszą ostatecznie dać się wyrazić w prostej postaci – jako własności liczb całkowitych"[4]. Idąc krok dalej można dodać, że skoro liczby pierwsze są elementarnymi „atomami" wszystkich liczb całkowitych, to ostatecznie wszystko, co matematyczne ma swój początek w liczbach pierwszych. A z kolei zagadka ich rozmieszczenia ukryta jest w niepozornej funkcji dzeta odkrytej przez Eulera i wnikliwie zbadanej przez Riemanna...

Pogląd skrajny i niewątpliwie kontrowersyjny. Krytycy zarzucą Kroneckerowi to, że teoria liczb przesłoniła mu inne gałęzie

[4] D. Schumayer, D.A.W. Hutchinson, *Physics of the Riemann Hypothesis*, arXiv:1101.3116v1 [math-ph] 17 Jan 2011.

matematyki i zaszeregują takie stwierdzenie jako radykalny, tendencyjny i nieuzasadniony redukcjonizm. Przyjmijmy jednak na moment pogląd Kroneckera, i to nawet w mocniejszej wersji, że matematyka (i opisywana nią rzeczywistość fizyczna) ma swe źródło w funkcji dzeta. Matematyk niemiecki Jörn Steuding wypowiedział sentencjonalne zdanie: *Wer die Zetafunktion kennt, kennt die Welt!* (Kto poznał funkcję dzeta, ten poznał [cały] świat!)[5]. Jak zobaczymy dalej, nie jest to tylko pusty slogan.

W roku 1975 Siergiej Michajłowicz Woronin (1946–97) z Instytutu Matematycznego im. W.A. Stiekłowa w Moskwie udowodnił twierdzenie dotyczące funkcji dzeta, dla którego – dopuszczane czasem przez matematyków – określenia: „głębokie" ewentualnie „estetyczne" są stanowczo zbyt skromne; najchętniej nazwałbym ten wynik sensacyjnym, gdyby określenie to nie miało rozmaitych prymitywnych i nadużywanych w prasie skojarzeń. Nosi ono nazwę twierdzenia o uniwersalności funkcji dzeta[6]. W języku precyzyjnym brzmi:

Twierdzenie: Rozważmy pas na płaszczyźnie zespolonej:

$$\left\{s \in \mathbb{C}: \frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < 1\right\}$$

[5] J. Steuding, *Primzahlverteilung*, wykład z teorii liczb w Uniwersytecie Goethego we Frankfurcie.

[6] S.M. Voronin, *Theorem on the Universality of the Riemann Zeta Function*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem. 39, s. 475–486. Przedruk w „Math. USSR Izv." 1975, 9, s. 443–445.

oraz zwarty podzbiór U w tym pasie taki, że jego dopełnienie jest również zwarte (czyli, mówiąc zwyczajnie, U nie ma dziur). Niech funkcja $f : U \to \mathrm{C}$ będzie ciągła na U, holomorficzna wewnątrz U i nie posiada miejsc zerowych wewnątrz U. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka wartość $t = t(\varepsilon)$, że:

$$|\zeta(s+it) - f(s)| < \varepsilon \quad \text{dla } s \in U$$

Innymi słowy: zadajmy w obszarze U spełniającym powyższe warunki d o w o l n ą, dostatecznie regularną funkcję f. Przesuwając U równolegle do osi urojonej odpowiednio daleko znajdziemy kształt zadany na U przez f odtworzony z zadaną z góry dokładnością ε przez funkcję dzeta! Natomiast w języku dostępnym dla laików (oczywiście nieprecyzyjnym, co nie znaczy, że gorszym) można powiedzieć, że funkcja dzeta zawiera w sobie wszelkie kształty, dosłownie wszystko: Biblię, dzieła Szekspira, symfonie Beethovena, niniejszy tekst – nawet samą siebie[7]... Oczywiście, miejsca na płaszczyźnie zespolonej Gaussa, w których znajdują się owe treści, pozostaną zapewne zawsze poza zasięgiem naszych komputerów, niemniej mamy absolutną pewność, że takie miejsca, choć niedostępne, istnieją.

Trzeba być matematycznym daltonistą, by nie zatrzymać się nad takim wynikiem i nie poczuć w nim tej autentycznej ta-

[7] S.C. Woon, *Riemann zeta function is a fractal*, arXiv:chao-dyn/9406003 v1, 11 Jun 1994.

Rys. 4. Siergiej Michajłowicz Woronin (11 marca 1946 – 18 października 1997).

jemnicy, której na imię Nieskończoność. Czy może być lepszy punkt wyjścia dla uprawiania filozofii królowej nauk?

Zauważyłem, że ulubione tematy filozofów matematyki to odwieczne pytanie o istnienie obiektów matematycznych (platonizm), „niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych" (pytanie E. Wignera o racjonalność przyrody) oraz twierdzenia Gödla o niezupełności (komentowane często bez zrozumienia szczegółów jego dowodu). Niezwykły wynik Woronina nie doczekał się takiego uznania w ich oczach. Może dlatego, że znaleziono go za „żelazną kurtyną", a jego odkrywca zmarł przedwcześnie? A może dlatego, że koncepcje rozkładu wartości funkcji dzeta albo krzywych wszędzie gęstych nie wyglądają dla filozofów zbyt zachęcająco? Któż to może wiedzieć?

3. Komputery: za i przeciw

Można sentencjonalnie powiedzieć, że komputer to liczby ucieleśnione z pomocą elektroniki, która z kolei jest namacalnym, praktycznym tryumfem mechaniki kwantowej, tej nader skutecznej, choć budzącej tyle zdumienia i niedosytu teorii. Platońskie byty sprowadzone ze świata idei na ziemię za pomocą krzemowych układów scalonych. Dla praktyków to powód do satysfakcji i dowód potężnej skuteczności ludzkiej inwencji. Ale dla purystów to znak sprofanowania świata wzniosłych i niezależnych od eksperymentu idei, penetrowanych dotąd jedynie przez czystą myśl człowieka.

Wszechobecne dzisiaj komputery kolejnych generacji oraz liczne przykłady pouczających eksperymentów numerycznych sprawiły, że powstała nowa gałąź wiedzy: m a t e m a t y k a e k s p e r y m e n t a l n a. Jednak w świetle tego, co napisałem powyżej o matematycznych dowodach, już samo zestawienie tych słów brzmi jak sprzeczność albo wręcz rozmyślna prowokacja. Czy nie jest to tylko, tak modne ostatnio, szukanie na siłę nowych dziedzin nauki w celu otwierania kolejnych wydziałów na coraz słabszych uczelniach? Jeszcze krok dalej i usłyszymy o teologii doświadczalnej lub socjologii kwantowej! Czegóż to się teraz nie robi, by tylko była sensacja i nabór na nowe kierunki? Ale wróćmy do tematu.

Jeden z prekursorów i entuzjastów matematyki eksperymentalnej, matematyk kanadyjsko-brytyjski Jonathan Borwein (obecnie w University of Newcastle, Callaghan, Australia), sformułował następujący program badawczy, swoistą deklarację ideową matematyków, którzy nie gardzą komputerami jako skutecznym narzędziem. Według niego, matematyka eksperymentalna to pewna metoda uprawiania matematyki, której zadaniem jest:

1. Zdobyć dogłębne zrozumienie, wgląd (*insight*) w dany problem oraz intuicję,
2. Odkryć nowe prawidłowości oraz powiązania,
3. Przy użyciu możliwości graficznych komputera zapostulować głębsze, ukryte, leżące u podstaw reguły matematyczne,
4. Testować [niedowiedzione] założenia, a w szczególności szukać kontrprzykładów,
5. Zbadać znaleziony wynik w celu odpowiedzi na pytanie, czy jest on wart formalnego dowodu,
6. Zasugerować podejście do takiego formalnego dowodu,
7. Unikać długich, nużących obliczeń zastępując je rachunkami komputerowymi,
8. Weryfikować wyniki znalezione analitycznie[8].

Nie są to gołosłowne deklaracje, bowiem za nimi idą coraz liczniejsze fakty i zastanawiające przykłady. Kilka z nich przytoczyłem w poprzednim referacie[9]. Oto kolejny: w kwietniu 1993 r. Enrico Au-Yeung, student w University of Waterloo, eksperymentując na komputerze zauważył, że:

[8] J. Borwein, D. Bailey, *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*, 2004..
[9] Prace Komisji Filozofii Przyrody PAU.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)^2 = 4.59987\ldots \approx \frac{17}{360}\pi^2$$

i pokazał ten wynik Borweinowi. Ten początkowo był bardzo sceptyczny; uważał, że to tylko przypadkowa koincydencja oraz, że na którymś z dalszych miejsc nastąpi wyraźna rozbieżność w ostatniej, przybliżonej równości. Ale kiedy zgodność numeryczna obu stron tej domniemanej tożsamości osiągnęła 100 cyfr po przecinku, trudno już było przypisać to przypadkowi. Borwein zaczął uważnie badać takie sumy – i udowodnił hipotezę studenta. Później udowodniono też drugą tożsamość:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{-2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)^2 = \frac{11}{360}\pi^4$$

Do dziś jednak nie udało się dowieść kolejnej hipotezy, że:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{-2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)^3 \stackrel{?}{=} \frac{17}{360}\zeta(5)+\zeta(2)\zeta(3)$$

Nie wszyscy jednak są takimi entuzjastami komputerów, jak wspomniany Borwein. Komputery weszły już pod przysłowiową strzechę, co ma sporo zalet, ale też niemało ubocznych skutków. Jest faktem, że czerpana z Internetu wiedza jest w społeczeństwie coraz szersza; jednocześnie jednak jest coraz bardziej powierzchowna. Roman Galar z Instytutu Informatyki, Automatyki i Robotyki Politechniki Wrocławskiej w swoim odważnym artykule[10] podkreśla z naciskiem, że w komputerze, inaczej niż w rzeczywistości fizycznej:

– wszystko ma charakter przyczynowo-skutkowy, celowy i poznawalny,
– wszystko podlega kontroli rozumu – kompetencja użytkownika w pełni kontroluje wydarzenia,
– wszystkie błędy są zawinione i można zawsze je odkryć oraz skorygować,
– w przypadku katastrofy można zawsze system „zresetować" i zacząć od początku.

W dalszym ciągu Galar formułuje dwa brutalnie szczere wnioski na podstawie własnych obserwacji środowiska studentów:

– maleje korelacja między pasjami komputerowymi i talentami matematycznymi; typ psychologiczny rasowego komputerowca zdaje się ewoluować w stronę intuicyjnej osobowości kierowcy rajdowego,
– zainteresowanie komputerami wypiera zainteresowanie resztą rzeczywistości; zmierza to do sytuacji, w której osoby potrafiące zastosować komputery do wszystkiego, nie znają się na niczym.

[10] R. Galar, *Krajobraz z komputerem*, „Matematyka" 2010, 4, s. 223. – Jak napisano w komentarzu od redakcji, „główne tezy zostały sformułowane przez Autora kilka lat temu i odebrane wówczas jako prowokacja. Życie pokazało jednak słuszność diagnozy i przewidywań Autora".

Jest zatem jasne, że w kwestii komputerów trzeba by znaleźć jakiś złoty środek, a to stanowi dobrą okazję do przedstawienia refleksji ogólnych w celu rzetelnego zrozumienia przyczyn wielu tych jakościowych zmian oraz ich potencjalnych skutków, słowem – dla filozofii nauki, jej metodologii oraz historii.

4. Zgryźliwa dygresja socjologiczna

Powyżej pokazałem, że refleksje filozoficzne, oparte oczywiście na rzetelnych podstawach i mające jako punkt wyjścia solidne wyniki, są nieuniknione i mogą być inspirujące.

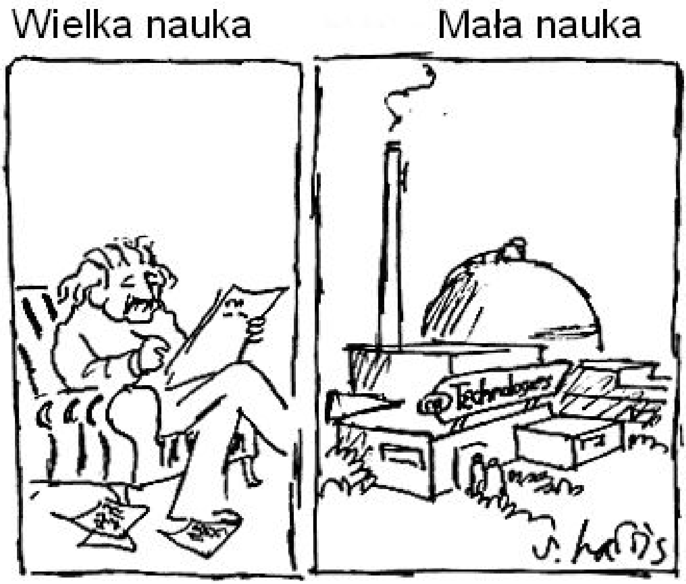
Z drugiej strony wiadomo, że – w przeciwieństwie do humanistów – przedstawiciele nauk typu *science* często jawnie lekceważą ogólne refleksje dotyczące ich dziedzin nauki i świadomie ich unikają. Czynią tak głównie z powodów pragmatycznych: współczesny system ocen naukowych, oparty na przeszczepionych ze sportu rankingach ilościowej wydajności, promuje niekoniecznie głębokie, ale konkretne wyniki, za które wyszkolony w sumowaniu liczb urzędnik przyznaje potem punkty i fundusze na badania.

Znajdujący się na fali domniemanych sukcesów naukowiec, w atmosferze bezwzględnej konkurencji, wśród licznych formularzy grantowych i gorączki częstych wyjazdów konferencyjnych – aby tylko być na bieżąco w swej tematyce – po prostu nie może sobie pozwolić na luksus głębszej refleksji filozoficznej, czy studia nad historią swej dyscypliny. Co więcej, refleksje tego typu są mało wymierne, nie mają szans na zastosowania praktyczne i trzeba by niezwykłej zręczności, żeby jakoś wpleść w nie puste, ale obowiązkowe teraz hasła w rodzaju: „znaczenie dla gospodarki", „zarządzanie zasobami ludzkimi", „innowacyjność", „kreatywność" czy „konkurencyjność". Refleksje takie nie mają więc szans wobec urzędniczej mentalności. Funkcjonują tu osobliwe implikacje: „trudne" to „niezrozumiałe", a z kolei „nie mające zastosowań" to automatycznie „bezwartościowe". Słowem, nauka jako biznes, a instytuty jako przedsiębiorstwa produkcyjne. Absurdy te, lansowane oficjalnie i bez zażenowania przez polityków, zyskują ostatnio normy prawne; dochodzą nawet do redakcji naukowych periodyków, które odrzucają rzetelne prace jako „nieatrakcyjne dla czytelników".

Rozmawiałem niedawno na ten temat z pewną błyskotliwą osobą, która żartobliwie zasugerowała mi, jako antidotum, taki oto – niewątpliwie atrakcyjny! – tytuł artykułu z mojej dziedziny: *Skandal w teorii liczb*...

Ktoś nawet powiedział, że „filozofia nauki jest tak potrzebna naukowcom, jak ornitologia ptakom"[11]. Powiedzenia lapidarne, inteligentne, złośliwie, a niewątpliwie też pożyteczne, bo inspirujące do rzetelnej, przemyślanej obrony historii i filozofii nauki. A tymczasem proponuję rzut oka na poniższy *cartoon* znanego rysownika amerykańskiego Sidneya Harrisa, którego ironiczne grafiki i trafne spostrzeżenia inspirowane są głównie naukami ścisłymi. Na koniec tego tekstu przytoczę jeszcze dwa obrazki dowcipnie ilustrujące kwestię dowodów matematycznych.

[11] Cytat anonimowy za: S. Weinberg, *Newtonianism, Reductionism and the Art of Congressional Testimony*, „Nature" 1987 (3 XII), 330, s. 433.



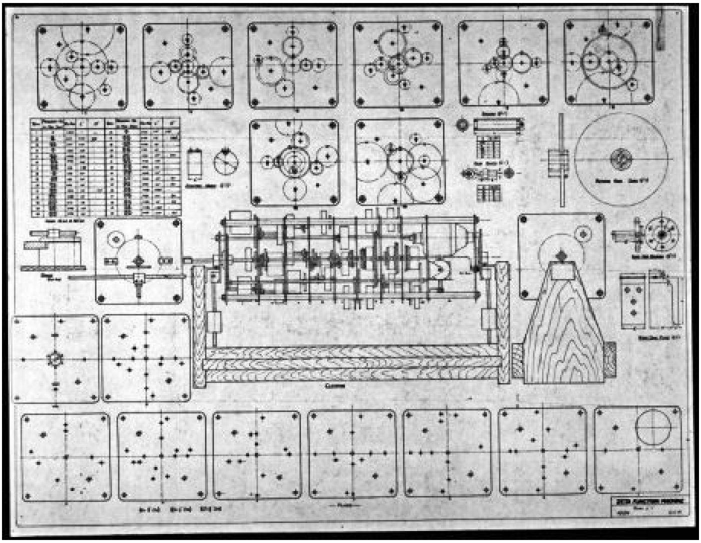
Rys. 5. Autor: Sidney Harris, źródło: http://www.sciencecartoonsplus.com/pages/gallery.php.

5. Dygresja historyczna: dwie nieudane próby ataku na hipotezę Riemanna

W dalszym ciągu przedstawię dwie pouczające, choć z dzisiejszego punktu widzenia dość naiwne i zupełnie nieudane próby ataku, za pomocą maszyn analogowych, na problem skrajnie trudny – na hipotezę Riemanna. Dziś niektórzy byliby skłonni pochopnie uznać takie pomysły za maniackie, ale obydwa były dziełem uznanych autorytetów i w swoim czasie były to próby bardzo ambitne.

Pierwsza z nich pochodzi od powszechnie znanego matematyka, kryptologa i pioniera informatyki Alana M. Turinga (1912–54), który krótko przed drugą wojną światową postanowił skonstruować mechaniczne urządzenie w celu analogowego znajdowania kolejnych zespolonych miejsc zerowych – pierwiastków funkcji dzeta. (Sławna hipoteza Riemanna, najważniejszy z nierozstrzygniętych problemów teorii liczb, dotyczy właśnie położenia tych pierwiastków na płaszczyźnie zespolonej i mówi, że w s z y s t k i e one leżą dokładnie na pewnej linii prostej zwanej tradycyjnie, choć niezbyt logicznie, prostą krytyczną. Ewentualna prawdziwość tej hipotezy byłaby fundamentalna dla naszej wiedzy o liczbach pierwszych). Trzeba przyznać, że rozumowanie Turinga było dość osobliwe jak na matematyka: skoro nikomu przez prawie sto lat nie udało się udowodnić hipotezy Riemanna, to najwidoczniej jest ona fałszywa. Musi zatem istnieć kontrprzykład dla niej: pierwiastek funkcji dzeta leżący poza prostą krytyczną.

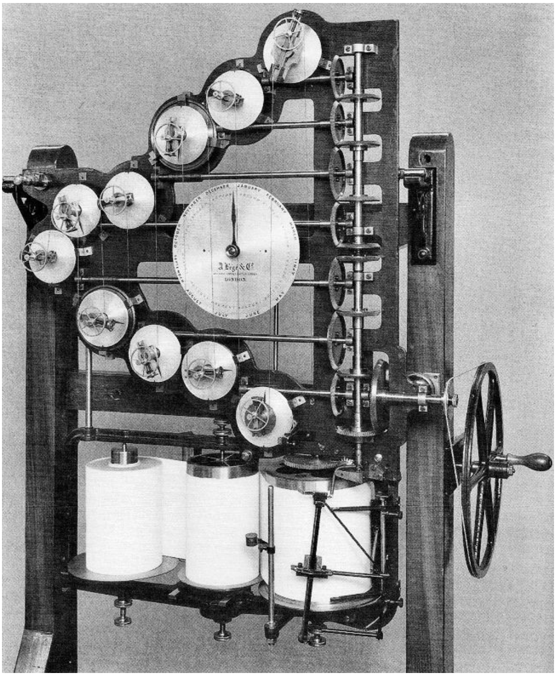
Wspomniane urządzenie miało taki kontrprzykład efektywnie znaleźć. By je odróżnić od sławnej m a s z y n y T u r i n g a, z którą nie ma nic wspólnego, i która jest pomysłem czysto teoretycznym, będę dalej mówił o „maszynce Turinga". Według jego planu, był to układ kilkunastu kół zębatych obliczających pewną zawiłą, choć elementarną sumę funkcji trygonometrycznych.



Rys 6. Światłokopia (tzw. *blueprint*) planu projektu maszynki Turinga w negatywie.

Ku zdziwieniu swych kolegów-matematyków, Turing osobiście nadzorował wytaczanie tych kół przez studenta, a jednocześnie inżyniera, niejakiego MacPhaila. Było to bardzo jawne odstępstwo od uświęconej tradycją matematycznej czystości, znacznie gorsze od inżynierskich oszacowań z użyciem suwaka logarytmicznego.

Inspiracją dla idei Turinga, w zasadzie poprawnej, była inna maszyna służąca od dawna w Liverpoolu do praktycznego przewidywania wartości pływów morskich i obliczająca analogowo podobną sumę trygonometryczną, choć oczywiście o innej interpretacji. I tu dygresja: jakże cenna jest w nauce „intuicja ważniejsza od wiedzy" (pogląd Einsteina), która pozwala trafnie skojarzyć dwa pozornie odległe problemy! Jest to też wymowna ilustracja potęgi analogii w nauce oraz tej trywialnej prawdy, że „te same równania mają te same rozwiązania" – niezależnie od interpretacji ich współczynników. Oczywiście, dziś taka suma nie stanowi problemu dla posiadacza lepszego kalkulatora, ale opisany projekt powstał, zanim pojawiły się pierwsze komputery elektroniczne.

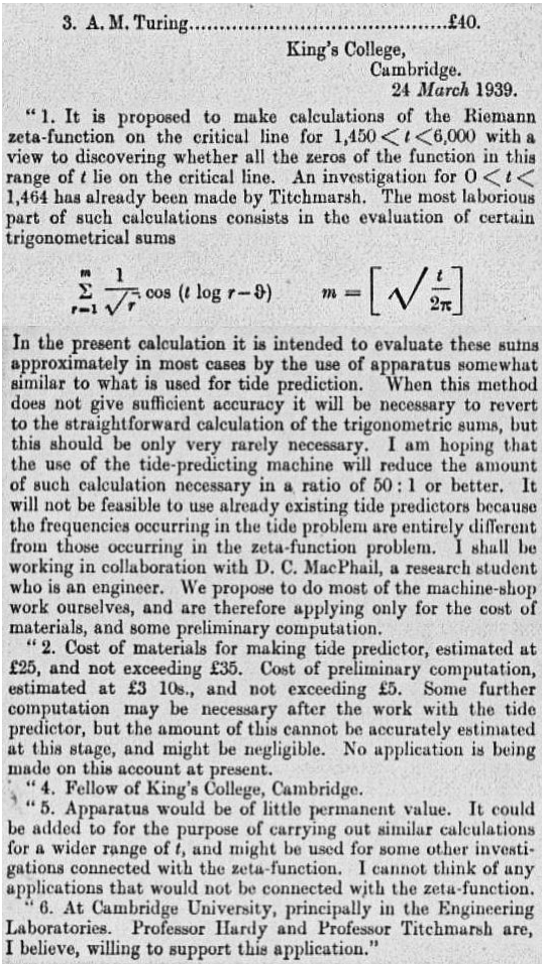


Rys 7. Analogowe urządzenie do przewidywania pływów morskich w Liverpoolu zbudowane przez Williama Thomsona w roku 1872. Urządzenie to skutecznie zainspirowało Turinga. Widać układ kół sumujących analogowo funkcje trygonometryczne oraz rejestrator wyników na taśmie papierowej (u dołu).

Turing wystąpił do Royal Society o grant w wysokości 40 funtów na wykonanie swej maszynki i uzyskał go dzięki pozytywnej rekomendacji matematyka, eksperta od funkcji dzeta i autora podstawowej do dziś monografii na ten temat, Edwarda Titchmarsha (1899–1963). Inny wspomniany powyżej matematyk, Hardy, był także pozytywnie nastawiony do tego pomysłu. Jednak wkrótce potem wybuchła wojna i do głosu doszedł antynaukowy pragmatyzm: w nowych warunkach Turing, jako pracujący dla armii kryptolog, okazał się bardziej przydatny niż Turing jako teoretyk liczbowy z platońskiego świata matematycznych idei. Kółka zębate nie doczekały się złożenia w działającą całość i prawdopodobnie zaginęły.

Dziś wiemy, dzięki eksperymentom numerycznym wykonanym z pomocą nowoczesnych superkomputerów, że hipoteza Riemanna nie jest na pewno naruszona aż do miejsca zerowego o numerze 10^{13}. Liczba ta to, z jednej strony, „bardzo dużo" w porównaniu z prawie sześcioma tysiącami takich miejsc będących w zasięgu maszynki Turinga; z drugiej jednak strony, to bardzo niewiele w porównaniu z atrybutem teorii liczb – nieskończonością, której z pewnością nie osiągnie nigdy żaden komputer.

Drugi przykład analogowego aparatu do badania funkcji dzeta jest późniejszy o prawie dziesięć lat i pochodzi od ambitnego inżyniera z Holandii, Balthasara van der Pola (1889–1959), znanego głównie ze swych osiągnięć w teorii propagacji fal radiowych oraz projektów odbiorników radiowych dla zasłużonej firmy Philips. Biografowie piszą o nim, że „miał niewątpliwie talent, choć był wyjątkowo próżny". Van der Pol dopro-



3. A. M. Turing..£40.

King's College,
Cambridge.
24 *March* 1939.

"1. It is proposed to make calculations of the Riemann zeta-function on the critical line for $1{,}450 < t < 6{,}000$ with a view to discovering whether all the zeros of the function in this range of t lie on the critical line. An investigation for $0 < t < 1{,}464$ has already been made by Titchmarsh. The most laborious part of such calculations consists in the evaluation of certain trigonometrical sums

$$\sum_{r=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{r}} \cos (t \log r - \vartheta) \qquad m = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right]$$

In the present calculation it is intended to evaluate these sums approximately in most cases by the use of apparatus somewhat similar to what is used for tide prediction. When this method does not give sufficient accuracy it will be necessary to revert to the straightforward calculation of the trigonometric sums, but this should be only very rarely necessary. I am hoping that the use of the tide-predicting machine will reduce the amount of such calculation necessary in a ratio of 50 : 1 or better. It will not be feasible to use already existing tide predictors because the frequencies occurring in the tide problem are entirely different from those occurring in the zeta-function problem. I shall be working in collaboration with D. C. MacPhail, a research student who is an engineer. We propose to do most of the machine-shop work ourselves, and are therefore applying only for the cost of materials, and some preliminary computation.

"2. Cost of materials for making tide predictor, estimated at £25, and not exceeding £35. Cost of preliminary computation, estimated at £3 10s., and not exceeding £5. Some further computation may be necessary after the work with the tide predictor, but the amount of this cannot be accurately estimated at this stage, and might be negligible. No application is being made on this account at present.

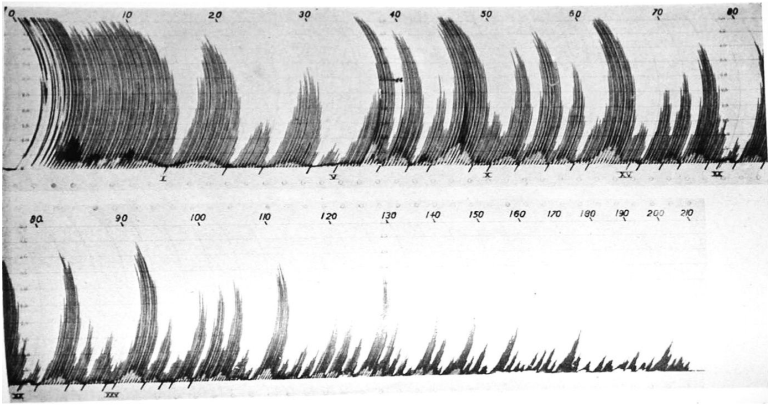
"4. Fellow of King's College, Cambridge.

"5. Apparatus would be of little permanent value. It could be added to for the purpose of carrying out similar calculations for a wider range of t, and might be used for some other investigations connected with the zeta-function. I cannot think of any applications that would not be connected with the zeta-function.

"6. At Cambridge University, principally in the Engineering Laboratories. Professor Hardy and Professor Titchmarsh are, I believe, willing to support this application."

Rys 8. Opis projektu maszynki Turinga w jego prośbie do Royal Society o dofinansowanie. Autor wypełnił standardowy, kilkupunktowy formularz ówczesnego grantu (istota pomysłu, koszt wykonania, stanowisko autora, wnioski, kto popiera projekt). Całość mieściła się na jednej stronie. W porównaniu z dzisiejszymi stosami szpargałów, które trzeba wypełnić aplikując o grant, jest to godna polecenia zwięzłość.

wadził swój pomysł do skutku i opublikował (1947 r.), choć nie znalazł niczego przełomowego w dotychczasowej wiedzy. Było to urządzenie elektromechaniczne, które poprawnie wykryło położenia pierwszych kilkunastu pierwiastków funkcji dzeta. Niestety, wyższe zera pozostały nieosiągalne z powodu małej czułości i nieusuwalnych szumów aparatury.



Rys 9. Wynik pracy elektromechanicznego urządzenia van der Pola. Minima obwiedni chaotycznej krzywej, kreślonej piórkiem na papierowej taśmie, znajdują się w częściach urojonych kolejnych pierwiastków funkcji dzeta: 14.1347…, 21.0220…, 25.0109…, 30.4249…, 32.9351… .

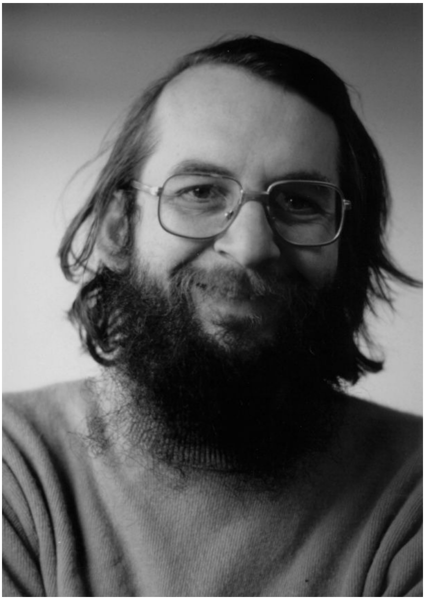
Oczywiście, przewaga naszej wiedzy pozwala nam patrzeć z wyższością na naiwne próby Turinga i van der Pola. Trzeba jednak być pobłażliwym, jak również mieć tę świadomość, że za kilkadziesiąt lat niektóre z naszych, obecnie najlepszych prób, również wydadzą się naiwne. Historia nauki uczy, że nie można przeskoczyć pewnych obowiązkowych dla rozwoju nauki progów.

6. Po śladach Jerry'ego B. Keipera

Sądzę, że dobrym pretekstem i punktem wyjścia do obrony zdrowo rozumianego filozofowania w nauce może być jakaś postać niebanalnego uczonego, który osiągnął trwałe wyniki naukowe i w swych pracach kierował się własną intuicją, a nie aktualnie zalecaną modą. Bohaterem niniejszego rozdziału będzie przedwcześnie i tragicznie zmarły w roku 1995 amerykański matematyk oraz informatyk Jerry B. Keiper (1953–95). Dowiedziałem się o nim przypadkiem i od razu poczułem silną więź duchową z jego poglądami i stylem pracy.

Według obiegowych poglądów Keiper był tylko nieżyciowym dziwakiem, niepoprawnym idealistą, przywiązującym nadmierną wagę do własnych marzeń oraz do religii (był członkiem Kościoła mennonitów, jednego z nurtów protestanckich, który powstał w 1539 r. w Holandii). Był niby przysłowiowy kot: nieprzekupny i chadzający swoimi drogami. Ale to bardzo powierzchowne wrażenie; w głębi krył się wrażliwy człowiek oraz zdolny i skuteczny uczony.

Oto zupełnie niezwykły rys jego osobowości. Nie jest tajemnicą, że znaczna (i zupełnie niekontrolowana przez społeczeństwo) część podatków idzie na zbrojenia wojskowe. Nikt jednak nie odczuwa z tego powodu szczególnego dyskomfortu. Kwestii tej nie nagłaśnia się, a większość podatników albo o tym nie wie, albo odpędza od siebie takie myśli wzruszając ramionami: a cóż ja mogę na to poradzić? Albo wreszcie skuteczne zatruwa sumienie jakimś gładkim sloganem o bezpieczeństwie państwa, o roz-



Rys. 10. Jerry B. Keiper (1953–95). (Fotografia dzięki uprzejmości Michaela Trotta, Wolfram Research).

maitych poczynaniach, które dla dobra społeczeństwa muszą być tajne itp. Wobec logicznego argumentu, że skrajnie dochodowy handel bronią jest niemoralny wobec tragicznego ubóstwa i głodu w wielu regionach świata, dyskretnie zmienia się temat. Można też otrzymać etykietkę pacyfisty, w sensie negatywnym – jako kogoś oderwanego od rzeczywistości lub wręcz tchórza unikającego służby wojskowej. I tak zignorowany, albo wyśmiany problem pozornie znika ze świadomości społecznej.

Na myśl przychodzą tu rozterki owego anonimowego robotnika, bohatera młodzieńczego wiersza Karola Wojtyły pt. *Robotnik z fabryki broni* z tomu *Profile Cyrenejczyka* (1957 r.):

Nie wpływam na losy globu, nie wszczynam wojen.
Czy idę z Tobą, czy przeciw Tobie – nie wiem.
Nie grzeszę.
Dręczy mnie właśnie to, że nie ja wpływam i nie ja grzeszę,
że toczę drobne zakrętki i gotuję fragmenty zniszczeń,
a nie ogarniam całości, nie ogarniam doli człowieczej.

W tej kwestii Keiper był bardzo radykalny: za żadną cenę nie chciał współfinansować zbrojeń, choćby i bezwiednie. Nie zatruwał swego sumienia pseudopatriotycznymi sloganami o bohaterstwie i poświęceniu dla kraju „naszych chłopców" z Korei, Laosu, Wietnamu czy Iraku, przelewających swoją krew za ojczyznę w walce z terrorystami. (Nawiasem mówiąc, pojęcie „terrorysty" stało się ostatnio równie pojemne, jak pojęcie „bandyty" w czasie II wojny światowej).

Z drugiej strony, niepłacenie podatków od dochodów jest naruszeniem prawa, a wykrycie tego sprowadza poważne kłopoty. Czy zawsze? Czy można bezkarnie nie płacić podatków? Na to pytanie Keiper znalazł odpowiedź tyleż zdumiewającą w swej prostocie, co zupełnie nie do przyjęcia dla większości ludzi. Podatek jest stosowną częścią dochodów. Zerowy dochód oznacza zerowy podatek. Całkowita rezygnacja z dochodów zwalnia więc z podatku. Keiper świadomie wybrał takie właśnie mało spektakularne i równie mało amerykańskie rozwiązanie. W tej sytuacji jego pracodawca, firma Wolfram Research, w której był od początku niezastąpionym pracownikiem, zapewniła mu elementarny byt powołując pewną niedochodową fundację. Jak potem powiedział pastor Larry Wilson z Kościoła mennonitów w rodzinnym mieście Keipera, on „autentycznie żył swoją wiarą" i dlatego taki styl życia uznał za zupełnie naturalny. Z kolei promotor jego pracy Kenneth B. Stolarsky napisał mi, że Keiper był „w jakimś sensie po prostu za dobry, jak na ten świat" (*In a way he was just too good for this world*)[12].

Czując wewnętrzną potrzebę poświęcenia się pracy dydaktycznej, Keiper złożył też propozycję pracy w kilku koledżach. Jednak posady nie dostał: na decydentach złe wrażenie zrobiła drobna uwaga, którą wpisał w formularzu aplikacyjnym: „pensja bez znaczenia" (*salary goal: not an issue*). W istocie Keiper nie chciał żadnej pensji. Gdyby zażądał wiele, byłby typowym, „swoim" człowiekiem; tymczasem zachował się w sposób niezrozumiały, co dla wielu jest równoznaczne z epitetem „podejrzany".

Prawdziwie ewangeliczna prostota i doskonała zgodność poglądów z życiem. W dobie obłudy, konformizmu i dyplomatycznych masek przywdziewanych na każdą okazję, postać Keipera wydaje się jakby wyjęta z innej epoki, po prostu nienormalna. Jeśli przez normalność rozumieć typową, akceptowaną przez ogół postawę, to Keiper był z pewnością nienormalny, oczywiście bez odcienia pejoratywnego. Ale to takie właśnie jednostki stanowią przysłowiową „sól ziemi". To oni pozostają w pamięci. Jednych bulwersują, innych niepokoją, jeszcze innych zmuszają do refleksji, niekiedy podziwu. Na ogół jednak nie znajdują naśladowców.

[12] Mail z 16 listopada 2006 r.

*

Około roku 1997 w swoich – dość jeszcze wtedy amatorskich – badaniach nad funkcją dzeta Riemanna obliczałem m.in. tzw. stałe Stieltjesa γ_n, które *de facto* są współczynnikami rozwinięcia na szereg Laurenta tej sławnej i bardzo ważnej funkcji, wokół jej jedynego bieguna dla $s = 1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\gamma_n (s-1)^n$$

Stałe te pojawiły się po raz pierwszy w listach Thomasa J. Stieltjesa do Charlesa Hermite'a (1885 r.)[13] w postaci definicji:

$$\gamma_n = \lim_{m\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\log^n k}{k}\right) - \frac{\log^{n+1} m}{n+1}\right]$$

Jak to zwykle w kwestiach numerycznych bywa, formalna, ścisła i naturalna definicja jest bezwartościowa, gdy chcemy numerycznie obliczyć wartość danej stałej z zadaną z góry dokładnością, np. 100 cyfr znaczących. Naiwne zastosowanie powyższej definicji dla jednej choćby stałej, np. γ_1, wymagałoby mocy obliczeniowej wszystkich dostępnych teraz na świecie komputerów pracujących przez czas wielokrotnie dłuższy od wieku Wszechświata. Wymyśliłem więc własną formułę, która, choć

[13] Thomas Jan Stieltjes, [w:] B. Baillaud, H. Bourget, *Correspondance d'Hermite et Stieltjes*, Gauthier–Villars, Paris 1905, s. 160–164.

lepsza (szybciej zbieżna), daleka była od skuteczności. W literaturze znalazłem kilka innych reprezentacji tych ważnych liczb, ale wszystkie one nie nadawały się do praktycznych obliczeń. Zdesperowany skorzystałem więc z profesjonalnego programu *Mathematica* firmy Wolfram Research, który w ułamku sekundy (poniżej 1/10 s) podawał kolejne wartości γ_n z dokładnością 100 cyfr. Zaintrygowany zajrzałem do pliku pomocy tego programu, gdzie wyczytałem: „StieltjesGamma uses Keiper's algorithm based on numerical quadrature of an integral representation of the zeta function and alternating series summation using Bernoulli numbers".

Programy komputerowe mają zawsze obszerny plik pomocy. Dla niecierpliwych jest też skrót pomocy, czyli plik FAQ (*Frequently Asked Questions* – Często Zadawane Pytania), ale z reguły nie podaje się tam odnośników do fachowej literatury. Nie byłem więc w stanie odtworzyć i zrozumieć „zaimplementowanego" w programie algorytmu. Niemniej było to moje pierwsze spotkanie z Jerrym Keiperem. Wkrótce potem z nekrologu napisanego przez założyciela i szefa firmy Wolfram Research Stevena Wolframa dowiedziałem się, że rozpoczynając pracę w jego firmie Keiper podjął się ambitnego zadania opracowania i efektywnego zastosowania w *Mathematice* optymalnych algorytmów, które by pozwalały obliczyć wartość d o w o l n e j funkcji specjalnej dla d o w o l n y c h wartości jej, na ogół zespolonych, argumentów. Zadanie to zostało przez wielu, w tym przez samego Stevena Wolframa, uznane za nierealistycznie trudne, ale cierpliwy i metodyczny Keiper powoli wywiązywał się z niego. W szczególności znalazł stosowny, szybko zbieżny algorytm dla wspomnianych stałych Stieltjesa i opublikował go w roku 1992 w czasopiśmie „Mathematics of Computations”[14].

I tu nastąpiło kilka epizodów, które ze wzniosłego świata matematycznych idei Platona skutecznie sprowadziły mnie do twardej rodzimej rzeczywistości. Okazało się bowiem, że wspomniany artykuł Keipera znajduje się w obszernej internetowej bazie czasopism JSTOR, gdzie można go kupić za istotny ułamek i tak już głodowej pensji pracownika PAN-u. Standardowy na Zachodzie legalny zakup przez macierzystą instytucję tutaj groziłby zachwianiem jej budżetu. Natomiast osławiona i nielegalna strona internetowa *Pirate Bay* (*Zatoka Piratów*) nie oferuje tak nieatrakcyjnego towaru, jak publikacje z teorii liczb; zresztą skorzystanie z takiej strony wiązałoby się z ryzykiem, że ktoś „życzliwy inaczej” nagłośni sprawę i lojalnie doniesie gdzie trzeba.

Na szczęście z pomocą przybył mój niezawodny przyjaciel z Wenezueli matematyk Luis Báez-Duarte, który polecił zeskanować bibliotekarzowi ów artykuł i przesłał mi go mailem. Zamiast zastanawiać się na legalnością takiego postępowania i ewentualnym znaczeniem funkcji dzeta dla zastosowań w gospodarce narodowej, zacząłem wnikliwie studiować otrzymany tekst. Okazało się, że jest tam nie tylko wspomniany algorytm obliczania stałych Stieltjesa; są także prawdziwe perły analitycznej teorii liczb. Ale to już temat na kolejny referat.

[14] J.B. Keiper, *Power Series Expansions of Riemann's Zeta Function*, „Mathematics of Computations” 1992, 58, 198, s. 765–773.

*

Jerry B. Keiper zmarł tragicznie będąc w pełni swych sił twórczych i ambitnych planów. Śmierć dopadła go niespodziewanie na skrzyżowaniu Prospect Avenue i John Street w miejscowości Champaign w amerykańskim stanie Illinois. W zimowy wieczór 18 stycznia 1995 r. wracał do domu po pracy swoim stałym zwyczajem, czyli w sposób raczej mało amerykański: nie samochodem, lecz rowerem. Było około godziny osiemnastej, kiedy czekał na skrzyżowaniu na zmianę świateł na prowadzącym na północ pasie Prospect Avenue, żeby skręcić w lewo. Najpierw niezidentyfikowany samochód uderzył rowerzystę z tyłu i zepchnął na sąsiedni pas, którym akurat z wielką prędkością jechał z naprzeciwka wielki biały buick. Jego kierowca, starszy człowiek, zatrzymał się dopiero parę przecznic dalej. Wróciwszy na miejsce wypadku tłumaczył, że nie zauważył leżącego na jezdni człowieka; sądził, że trafił na wybój w asfalcie. Został zwolniony z braku dowodów winy.

Przewieziony do szpitala Carle Foundation Hospital w sąsiednim Urbana, Keiper został poddany bezskutecznej reanimacji. O godz. 18:22 stwierdzono formalnie zgon wskutek rozległych obrażeń, głównie ran głowy[15]. Potem okazało się, że w pracowni jego macierzystej firmy na kilku komputerach od

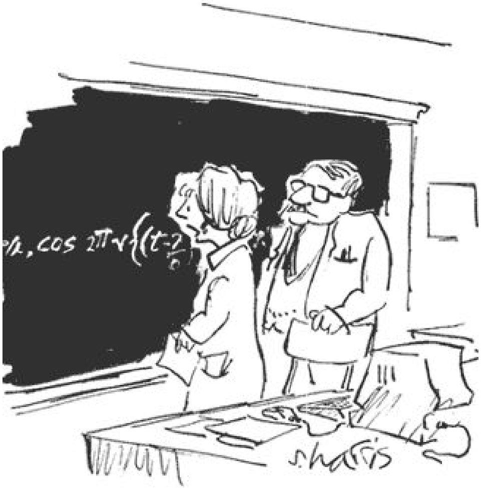
[15] Lokalna gazeta internetowa „Daily Illini Online Archive", http://www.illinimedia.com/di/archives/1995/January/20/driver-p3.html (plik wycofany).

wielu miesięcy „zapuszczonych” jest kilka programów w *Mathematice* testujących nowe algorytmy.

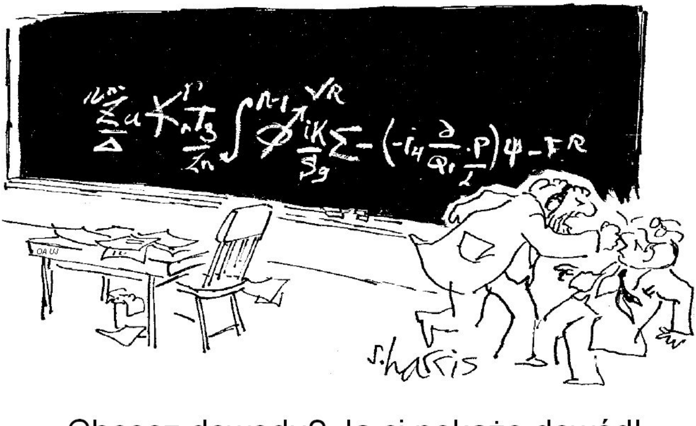
Dziś nazwisko Keipera znane jest tylko wąskiej grupie specjalistów. Ale z jego intelektualnych dokonań oraz z odkrytych przez niego algorytmów w każdej chwili korzystają rozsiani po świecie użytkownicy żywiołowo rozwijającego się już ponad dwadzieścia lat programu *Mathematica*, chociaż tylko nieliczni wśród nich zdają sobie z tego sprawę. Mógłby więc Keiper powtórzyć za Horacym: *Non omnis moriar*.

*

Na koniec dwa rysunki Sidneya Harrisa dotyczące dowodów matematycznych. Sporo zachodnich książek naukowych zamieszcza *cartoons* tego grafika, jako humorystyczne przerywniki. Znając poczucie humoru nieodżałowanego profesora Pelczara mogę mieć nadzieję, że zaakceptowałby takie nieznaczne naruszenie uświęconego tradycją stylu także w niniejszej publikacji.



To jest świetny dowód,
ale brakuje mu ciepła i uczucia.



Chcesz dowodu? Ja ci pokażę dowód!

Rys. 11 i 12. Autor: Sidney Harris, źródło: http://www.sciencecartoonsplus.com/pages/gallery.php.

Bibliografia

Baez-Duarte L., *On Maslanka's reprezentation for the Riemann zeta-function*, arXiv:math/0307214v1 [mathNT] 16 Juni 2003.

Borwein J., Bailey D., *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*, 2004.

Galar R., *Krajobraz z komputerem*, „Matematyka" 2010, 4.

Keiper J.B., *Power Series Expansions of Riemann's Zeta Function*, „Mathematics of Computations" 1992, 58, 198.

Maślanka K., *Ćwierć wieku od obalenia hipotezy Mertensa (1985). Refleksje na temat dowodu komputerowego*, „Prace Komisji Filozofii Nauk Przyrodniczych PAU", t. V, 2011.

Pólya G., *Odkrycie matematyczne. O rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu rozwiązywania zadań*, tłum. A. Góralski, WNT, Warszawa 1975.

Schumayer D., Hutchinson D.A.W., *Physics of the Riemann Hypothesis*, arXiv:1101.3116v1 [math-ph] 17 Jan 2011.

Steuding J., *Primzahlverteilung*, wykład z teorii liczb w Uniwersytecie Goethego we Frankfurcie.

Thomas Jan Stieltjes, [w:] B. Baillaud, H. Bourget, *Correspondance d'Hermite et Stieltjes*, Gauthier–Villars, Paris 1905.

Voronin S.M., *Theorem on the Universality of the Riemann Zeta Function*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem. 39, s. 475–486. Przedruk w „Math. USSR Izv." 1975, 9.

Weinberg S., *Newtonianism, Reductionism and the Art of Congressional Testimony*, „Nature" 1987 (3 XII), 330.

Woon S.C., *Riemann zeta function is a fractal*, arXiv:chao-dyn/9406003 v1, 11 Jun 1994.

Bezgłośna komputerowa rewolucja w naukach eksperymentalnych

S. Leciejewski, *Cyfrowa rewolucja w badaniach eksperymentalnych: studium metodologiczno-filozoficzne*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2013, ss. 168.

Komputery na dobre zagościły w naszym codziennym życiu. Nie sposób wyobrazić sobie bez nich również współczesnej nauki – wystarczy wspomnieć, że dziś każdy tekst o charakterze naukowym przetwarzany jest komputerowo. Komputery służą również jako doskonałe narzędzia komunikacji naukowej, dość wspomnieć, że usługa e-mail została stworzona przez naukowców i na potrzeby komunikacji naukowej. Choć komputery wypełniły różnorakie sfery naszego życia, to wciąż mało rozumiemy zmiany, jakie się pod ich wpływem dokonały.

Z pewnością przemiany te są ogromne, ale często umykają nam niezwykle ważne ich aspekty. Sławomir Leciejewski w swej najnowszej monografii stawia odważną tezę – prawie wszystkie współczesne filozoficzne opracowania nauk przyrodniczych wykazują zastanawiającą ślepotę. Filozofowie nie dostrzegają ważnej rewolucji, która dokonała się w metodologii badań eksperymentalnych kilku ostatnich dekad. Chodzi mianowicie o rewolucję związaną z wprowadzeniem do tych badań zautomatyzowanych systemów cyfrowych. Rewolucja nie została dostrzeżona, bo rozgrywa się bezgłośnie, a filozofowie nie podjęli jeszcze do tej pory wysiłku zmierzenia się z przemianami metodologicznymi rozgrywającymi się w naukach przyrodniczych.

Należy wspomnieć, że tezy o rewolucyjnym wpływie komputerów na filozofię nie są nowe. Wystarczy wymienić choćby książkę Aarona Slomana *The Computer Revolution in Philosophy: Philosophy, Science and Models of Mind* z roku 1978, czy książkę Jaya D. Boltera *Turing's Man: Western Culture in the Computer Age* z roku 1984. Sławomir Leciejewski postawił sobie jednak bardzo precyzyjny cel: ukazanie, w jaki sposób pod wpływem komputerów zmieniły się nauki eksperymentalne (głównie fizyka i chemia) i jakie nowe problemy w związku z tym pojawiły się dla filozofii nauki.

Książka rozpoczyna się od przedstawienia podstawowej ramy teoretycznej służącej analizie metodologii badań eksperymentalnych. Autor wywodzi się ze środowiska poznańskiego, nie dziwi więc fakt, że jako punkt wyjścia przyjęte zostały poglądy związane z nowym eksperymentalizmem. Trzeba przyznać, że jest to dogodna płaszczyzna dla dalszych analiz, a poglądy Hackinga nie są traktowane dogmatycznie, co więcej Leciejewski wchodzi z nimi nawet w twórczą polemikę. Przeciwstawienie teoretycyzmu i eksperymentalizmu oraz prezentacja głównych pomysłów Hackinga dokonane zostały sprawnie, tak że i dla studenta, i dla wytrawnego badacza powinny okazać się interesujące.

Taksonomia prac eksperymentalnych zastosowana przez Hackinga w pracy *The Self Vindication of the Laboratory Science* stała się punktem odniesienia dla dalszych analiz. Warto podkreślić, że uczyniono z niej doskonały użytek – udało się ukazać różnorodne sposoby wykorzystania sprzętu komputerowego w badaniach eksperymentalnych (niekiedy jeden zestaw komputerowy spełniać może równocześnie kilka odmiennych ról w eksperymencie).

W drugim rozdziale szczegółowo omówione zostały elementy układu eksperymentalnego wspomaganego komputerowo: urządzenia pomiarowe, przetworniki analogowo-cyfrowe, interfejsy, komputer z oprogramowaniem oraz przetworniki cyfrowo-analogowe i układy wykonawcze. Dzięki odpowiedniej dawce techniki udało się ukazać specyfikę tych elementów i ich rolę w pracach eksperymentalnych. Opisy są kompetentne, ale powinny być również czytelne dla osób posiadających wiedzę z informatyki co najmniej na poziomie szkoły średniej.

W kolejnej części autor rozwija analizę metodologiczną eksperymentów wspomaganych komputerowo. Już na wstępie stawia tezę o tym, że wprowadzenie takiego sprzętu powoduje, że „niewątpliwie zwiększa się ‘odległość’ pomiędzy podmiotem eksperymentu (P) a jego przedmiotem (O)” (s. 62). Jaki jest wpływ zwiększonej „odległości”? Czy zmusza nas to przeformułowania metodologicznych podstaw nauk empirycznych? Odpowiedź autora jest twierdząca – uważa, że wprowadzenie cyfryzacji sygnału wprowadza nowe problemy epistemologiczne i metodologiczne. Z drugiej strony w monografii odnajdziemy rozważania o niezbędności wprowadzenia technik komputerowych do badań eksperymentalnych – wszak badania prowadzone są na takim poziomie wyrafinowania, że ręczne manipulacje układami eksperymentalnymi i tradycyjne zbieranie danych przekracza jakiekolwiek rozsądne granice ludzkich możliwości. Wprowadzenie komputerów cyfrowych obarczone jest jednak również pewnymi problemami: pojawiają się artefakty poznawcze, których nie można wyeliminować przy pomocy dotychczas stosowanych metod. Z drugiej strony ograniczona jest również dokładność pomiarów albo ich szybkość (wielkości te są negatywnie skorelowane ze sobą) – pojawiają się więc ograniczenia wypływające z aparatury technicznej, ale o charakterze fundamentalnym, bo wynikają z procesów fizycznych leżących u podstaw przetwarzania analogowo-cyfrowego. Okazuje się zatem, że warstwa techniczna – traktowana dotąd jako nieproblematyczna z punktu widzenia fundamentalnych ograniczeń poznawczych – wprowadza jednak (niejako tylnymi drzwiami) silne ograniczenia. Są one nieuniknionym kosztem, który płacimy za możliwość prowadzenia wyrafinowanych badań.

S. Leciejewski zwraca również uwagę na dodatkowe ograniczenia wprowadzane przez oprogramowanie komputerowe. W przypadku programów na licencjach zamkniętych naukowiec w zasadzie nie ma możliwości weryfikacji poprawności działania narzędzia, musi zatem bezkrytycznie zaufać twórcom oprogramowania. W tym kontekście zrozumiałe stają się głosy nawołujące do tworzenia *Free and Open Source Software* – wówczas naukowiec (grupa) nie jest pozbawiony możliwości wglądu w mechanizmy programu. Z drugiej strony autor wskazuje, że intersubiektywna sprawdzalność – uznawana za podstawę metody eksperymentalnej – staje się powoli mitem. Uzależniona jest ona choćby od posiadanych środków finansowych i w praktyce coraz częściej staje się tylko epistemologicznym ideałem. Autor stwierdza: „Intersubiektywna sprawdzalność w badaniach eksperymentalnych wspomaganych komputerowo zamieniona została na procedury autokalibracji unikatowego sprzętu badawczego (np. LHC w CERN)” (s. 74–75).

Interesujące są również rozważania dotyczące statusu eksperymentatora w badaniach wspomaganych komputerowo i jego niezbędności. To ostatnie dotyka kwestii możliwości pełnej automatyzacji procesu odkrycia naukowego. Jak można się spodziewać, dotychczasowe próby nie napawają w tej kwestii zbytnim optymizmem. Okazuje się bowiem, że to co łatwe dla człowieka jest trudne dla komputera i na odwrót. Zatem układ eksperymentator-system komputerowy (ogólnie człowiek-komputer) okazuje się najbardziej wydajnym połączeniem, które nie ma na razie żadnej rozsądnej alternatywy po stronie systemów sztucznej inteligencji.

W monografii pojawiają się rozważania o symulacjach komputerowych i ich epistemologicznej roli. Są one podporządkowane głównym celom pracy, w związku z czym wypadły mocno ograniczone. Z pewnością warto będzie rozwinąć to zagadnienie w przyszłości, bo kryje się w nim wiele intrygujących, filozoficznych kwestii, jak to ukazał Eric Winsberg[16]. Interesująca jest również związana z tymi zagadnieniami kwestia eksperymentu w matematyce, ale to z pewnością temat na zupełnie inne opracowanie.

Rozdział czwarty przynosi dwa najbardziej ważkie wątki filozoficzne. Po pierwsze, mamy tu kompetentną i dobrze uzasadnioną krytykę nowego eksperymentalizmu. Główny zarzut można sprowadzić do nieadekwatności rekonstrukcji praktyki eksperymentalnej. Krytyka ma na celu raczej przeformułowanie nowego eksperymentalizmu niż jego całkowite obalenie.

[16] E.B. Winsberg, *Science in the age of computer simulation*, Chicago 2010. E.B. Winsberg, *Computer Simulations in Science*, [w:] http://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/simulations-science/ (ostatni dostęp 21 X 2014).

Po drugie, autor stawia tezę, że wytworzył się nowy, komputerowy styl badań eksperymentalnych (w sensie stylu myślowego w ujęciu L. Flecka). Wprowadzenie tego stylu uważa autor za tytułową rewolucję. Uzasadnienie rewolucyjności tej zmiany nastąpiło poprzez odwołanie do czterech najważniejszych koncepcji rewolucji naukowej: T. Kuhna, I.B. Cohena, S. Shapina i I. Hackinga. Stosując kryteria rewolucyjności zmiany naukowej sformułowane przez wspomnianych filozofów S. Leciejewski ukazał, że większość tych kryteriów jest dobrze spełniona przez zmiany wprowadzone dzięki zastosowaniu komputerów do badań eksperymentalnych, najlepiej pasują zaś one do założeń Hackinga.

Praca wyróżnia się bardzo dobrym metodycznym i metodologicznym podejściem. Konstrukcja logiczna pracy jest bardzo klarowna, podobnie jak język stosowany przez autora. Również i od strony edycyjnej praca opracowana jest wyśmienicie (w całym tekście udało się znaleźć zaledwie dwa drobne błędy literowe: s. 79 i 25). Z uwag historiograficznych warto wspomnieć jedynie, że zbyt silnym uproszczeniem jest stwierdzenie, iż E. Mach jest prekursorem pozytywizmu, podane bez żadnych zastrzeżeń (s. 20) – wszak historycy filozofii prekursorów pozytywizmu doszukują się w początkach XIX wieku.

Podkreślić należy, że autor swobodnie porusza się zarówno w kwestiach technicznych, jak i filozoficznych. Znakomicie pokazuje również, dlaczego bez zrozumienia warstwy technicznej nie możemy zrozumieć nowych problemów metodologicznych pojawiających się w nauce, jak choćby problem niemożliwości wyeliminowania artefaktów poznawczych z cyfrowych układów pomiarowych. Wydaje się, że w tym kontekście wcześniejsze analizy Hackinga – mimo wielkiego ich znaczenia w kontekście analizy eksperymentu naukowego – rzeczywiście cierpią z powodu niezrozumienia specyfiki technicznej warstwy instrumentarium naukowego. Oczywiście Hacking nie jest jedyny, raczej jest typowym przykładem XX-wiecznego filozofa nauki, który nie zaprząta sobie głowy techniczną tkanką odkryć naukowych. Warto wspomnieć, że po pracach Pierre'a Duhema – doskonałego eksperymentatora i myśliciela – brakło w filozofii nauki osób, które byłyby w stanie dostrzec głębsze filozoficzne znaczenie technik eksperymentalnych w nauce. Na szczęście w ostatnich latach sytuacja zaczyna ulegać zmianie, również na polskim gruncie, czego dowodem są omawiane ostatnio na łamach „Zagadnień" książki J. Rodzenia *Na tropie widma...* jak i recenzowana teraz książka S. Leciejewskiego. Miejmy nadzieję, że problemy wskazane przez autora *Cyfrowej rewolucji...* znajdą swe dalsze opracowania. Z pewnością przysłużyłaby się temu publikacja niniejszej książki w języku angielskim, co pozwoliłoby rozszerzyć dyskusję poza krąg rodzimej filozofii.

Z dzisiejszej perspektywy cyfrowa rewolucja rozgrywająca się w naukach eksperymentalnych przyniesie wiele nowych, fascynujących problemów filozoficznych, które pozwolą wyjść poza utarte i wyeksploatowane już ramy dotychczasowych dyskusji wokół nauki. Warto więc polecić lekturę tej pracy zarówno studentom filozofii – jako źródło wiedzy o nowoczesnej filozofii nauki, jak i doświadczonym badaczom – jako wyzwanie intelektualne.

Paweł Polak

Czy metafizyka może być eksperymentalna?

Tadeusz Pabjan, *Eksperymentalna metafizyka. Johna S. Bella filozofia mechaniki kwantowej*, Copernicus Center Press, Kraków 2011, ss. 368.

Do niedawna żaden filozof zajmujący się metafizyką nigdy nie postawiłby pytania znajdującego się w tytule niniejszej recenzji. Jednak Tadeusz Pabjan w swojej książce stara się przekonać czytelnika, że w przypadku poglądów Johna S. Bella (1928–90), powyższe pytanie wydaje się być zasadne. Stanowisko Bella najogólniej można byłoby przedstawić, jako ciekawą propozycję przebicia się przez schematy myślowe akceptowane przez filozofów przyrody i filozofów nauki, które związane są z relacją filozofii z naukami przyrodniczymi. Książka Tadeusza Pabjana jest odważną próbą krytycznej oceny tej wyraźnie filozoficznej propozycji Johna S. Bella. Autor podejmuje się w pewnym sensie nowatorskiego podejścia. Co prawda, pojawiło się parę prac poświęconych wybranym aspektom filozofii Bella (co autor odnotowuje), ale na rynku wydawniczym nie ma pracy, która dokonywałaby tak całościowej i wnikliwej rekonstrukcji tych poglądów. Gdyby jednak realizacja całego projektu badawczego ujętego w książce oparta została tylko na rekonstrukcji filozoficznej myśli Bella i jej ocenie, to wówczas trudno byłoby uznać prezentowaną książkę za poważnie wpisującą się w rozwój filozofii uprawianej w kontekście nauk przyrodniczych. Nowość zasygnalizowana jest wszakże w tytule rozprawy. Chodzi o zrozumienie użytego terminu „eksperymentalna metafizyka” w odniesieniu do filozoficznych wątków tego wybitnego fizyka. Jest oczywiste, że terminy łatwo się tworzy, ale gorzej jest z ich uzasadnieniem. Trzeba jednak podkreślić, że prezentowana monografia wskazuje na ciekawe i ważne przesłanki oraz interesujące argumenty za słusznością przyjętego terminu w zastosowaniu do przemyśleń Bella.

Postać Johna S. Bella znana jest zwłaszcza fizykom zajmującym się mechaniką kwantową. Jego propozycja nowego podejścia do podstaw mechaniki kwantowej (tzw. twierdzenia Bella) już za życia Bella wzbudziła wiele kontrowersji. Warto jednak pamiętać, że teoretyczne sformułowania Bella dały mocny impuls dla przemyśleń dotyczących filozoficznych aspektów mechaniki kwantowej. W całym zestawie opracowań myśli Bella brakowało kompleksowego opracowania z zakresu filozofii, które, bazując na jego pracach, wskazałoby najważniejsze i najciekawsze ustalenia filozoficzno-naukowe.

Bell nie stworzył żadnej spójnej koncepcji filozofii nauki, co więcej, brak jest również w jego spuściźnie naukowej dzieła o ściśle filozoficznym charakterze. Porozrzucane fragmenty filozoficzne autor książki musiał odnaleźć i poddać krytycznej analizie filozoficznej. To kolejny ważny aspekt tej rozprawy. Autor pracował na oryginalnych dziełach Bella i krytycznie odnosił się do istniejących opracowań, w których obecne były tylko wzmianki o filozofii Bella.

Po tych wprowadzających uwagach przejdźmy do bliższego przyjrzenia się strukturze pracy oraz treści poszczególnych rozdziałów. Monografia poświęcona filozofii Johna Stewarta Bella zawiera cztery obszerne rozdziały wraz ze wstępem, zakończeniem, a także bibliografią i indeksem osób. Książka nie zawiera indeksu rzeczowego oraz streszczenia w języku obcym. Brak tych dwóch elementów trochę osłabia stronę redakcyjną. W tego typu opracowaniach standardem jest indeks rzeczowy oraz streszczenie w języku obcym.

Struktura pracy jest przejrzysta i spójna. Kolejność rozdziałów jest uzasadniona i dobrze wpisuje się w realizację zamierzonego celu. Dla ułatwienia wniknięcia w treść poszczególnych rozdziałów każdy z nich poprzedzony jest krótkim wstępem, często o charakterze historycznym. To kolejny element pracy podnoszący wartość omawianej książki. T. Pabjan porządkuje poszczególne rozdziały poprzez wyodrębnienie w podrozdziałach szczegółowych tematów. W książce jest sporo cytatów; w niektórych przypadkach zostały one (w przypisach) przytoczone w wersji angielskiej. W pracach naukowych jest to dobry zwyczaj, gdyż pozwala łatwo skonfrontować tłumaczenie autora z oryginalnym tekstem. Przypisy są ważnym elementem całości. Przejdźmy do omówienia treści poszczególnych rozdziałów. W pierwszym rozdziale została przedstawiona postać Johna Stewarta Bella. Nie jest to życiorys Bella, ale przede wszystkim prezentacja jego dokonań naukowych na tle epoki. Ten północnoirlandzki fizyk jest już dla nas postacią historyczną (zm. w 1990 r.), ale właśnie historyczne rozczytanie jego miejsca w toczących się dyskusjach nad mechaniką kwantową jest ważnym wprowadzeniem do książki.

Pierwszy rozdział składa się z dwóch części. W pierwszej autor zajął się prostym i ogólnym wprowadzeniem do problematyki mechaniki kwantowej. W drugiej części skupił się na osobie Johna Bella. Wprowadzenie do problematyki mechaniki kwantowej z pierwszej części tego rozdziału pozwala zorientować się czytelnikowi, z jakim etapem dyskusji w zakresie interpretacji mechaniki kwantowej spotkał się Bell. Pojawia się tu ważne pytanie, czy opis układu kwantowo-mechanicznego jest zupełny. Kolejną kwestią dyskutowaną wówczas w fizyce było stanowisko szkoły kopenhaskiej w sprawie statusu obiektu kwantowego. Pojawiają się tu także pierwsze propozycje związane z zmiennymi ukrytymi. Sam Bell uważał, że rozwiązanie tych problemów można osiągnąć poprzez uporządkowanie podstaw mechaniki kwantowej. Zdaniem Bella, stanowisko Einsteina, de Broglie'a i Schrödingera, mówiące o niezupełności standardowego sformułowania mechaniki kwantowej, należy uzupełnić o koncepcję zmiennych ukrytych. Jak sam Bell wspomina, inspirował się w tej kwestii teorią fali pilotującej de Broglie'a-Bohma. Zanim jednak doszło do sformułowania słynnego twierdzenia Bella, poddał on krytyce dowody niemożliwości wprowadzenia zmiennych ukrytych do formalizmu mechaniki kwantowej. Autor rozprawy interesująco omawia to zagadnienie przypominając, że Bell nie kwestionował poprawności mechaniki kwantowej, a jedynie niemożliwość jej uzupełnienia. Przełomowym dla prowadzonych przez Balla analiz okazał się rok 1964. Wówczas zaproponował rozwiązanie problemu zmiennych ukrytych, formułując odpowiednie twierdzenie. W swojej pracy z tego roku przedstawia on nierówność, w której zawarte są właśnie ukryte parametry.

W rozdziale drugim Pabjan bliżej omawia samo twierdzenie Bella. Ten trudny problem wymagał najpierw przybliżenia kwestii terminologicznych, a następnie omówienia założeń związanych z tym twierdzeniem. Podstawowe znacznie w tym przypadku odgrywa pojęcie lokalności, ale z filozoficznego punktu widzenia nie mniej istotne są pojęcia realizmu, przyczynowości oraz determinizmu. Autor zaznacza, że fundamentalną rolę odegrały pojęcia lokalności i realizmu. Pabjan wyraźnie pokazuje, że Bell świadom był konsekwencji pominięcia powyższych założeń. Samo twierdzenie prowadzi do wniosku, że jeżeli „dowolna teoria fizyczna przyjmuje warunek lokalności i zarazem warunek realizmu, to musi spełniać matematyczne wyrażenia zwane nierównością Bella". W następnej części tego rozdziału autor przechodzi do omówienia eksperymentalnych testów związanych z tym twierdzeniem Bella. Obszernie omawia całe spektrum przeprowadzanych testów. Jak wiadomo, eksperyment Aspecta ostatecznie wykazał łamanie tych nierówności. W dalszej części autor zastanawia się nad konsekwencjami tego złamania. Jest to ważna część analiz prowadzonych w rozprawie, gdyż odsłania ona głębszy problem stosunku teorii do wyniku eksperymentu. Ostatnia część rozdziału poświęcona jest dyskusji związanej z recepcją twierdzenia Bella. Autor rozpoczyna od przedstawiania ewolucji rosnącego zainteresowania twierdzeniem. Wiele elementów filozoficznych i pozafilozoficznych wpłynęło na jego zrozumienie, ale wydaje się, że najważniejszymi spośród nich są pojęcia realizmu i nielokalności. Dalsze analizy prowadzone przez autora wskazują na nielokalność, jako główne źródło problemów dotyczących interpretacji twierdzenia Bella. Nie można także pominąć ciekawych rozważań związanych z nieporozumieniami powstającymi na tle tych interpretacji. Za autorem monografii warto przytoczyć konkluzywne zdanie w tej kwestii: „niemal wszystkie nadinterpretacje mechaniki kwantowej, a w szczególności samego twierdzenia Bella, biorą się stąd, że w sposób całkowicie nieuzasadniony przechodzi się od tej teorii do innych ‘niesamowitych’ i ‘nieprawdopodobnych’ fenomenów, które albo nie mają nic wspólnego z nauką, albo – w najlepszym wypadku – nie są jeszcze w wystarczającym stopniu zbadane i wyjaśnione przez zastosowanie metody naukowej” (s. 223).

Kolejny rozdział pracy Tadeusz Pabjan poświęca analizie samej lokalności. Jest to ważny głos we wciąż aktualnej dyskusji nad rolą lokalności (może lepiej nielokalności) w konflikcie zachodzącym między mechaniką kwantową a szczególną teorią względności. Analizę tego problemu autor rozpoczyna od przedstawienia różnych koncepcji nielokalności, a następnie wchodzi w dyskusję na temat nieporozumień związanych z terminami „oddziaływanie” i „korelacja”. Problematyka jest również związana z zagadnieniem kauzalności. Charakterystyka nielokalnych korelacji w istotny sposób wpływa na odpowiedź na pytanie o konflikt między mechaniką kwantową a szczególną teorią względności. Chodzi o to, czy nielokalność kwantowa dopuszcza przenoszenie sygnałów z prędkością większą niż prędkość światła, podczas gdy, jak wiadomo, „do wygenerowania i przesłania ‘jakiegokolwiek sygnału fizycznego’ potrzebna jest energia (pewna forma materii), a żadna znana fizyce forma energii nie porusza się z taką prędkością” (s. 238). Sam Bell, co relacjonuje autor książki, miał z jednej strony dość sceptyczne podejście do stanowiska o pozornej sprzeczności między tymi teoriami, ale z drugiej strony widział, że zbyt ostre rozdzielenie obu teorii może prowadzić do poważnych problemów z przyczynowością. Nigdy nie twierdził, że nie jest możliwe uzgodnienie między mechaniką kwantową a szczególną teorią względności. Nie opowiadając się za skrajnymi stanowiskami, Bell podkreślał, że „nielokalność jest fundamentalną własnością świata kwantowego i że własności tej nie da się z opisu świata usunąć żadną prostą metodą" (s. 240). Z kwantową nielokalnością musi zmierzyć się i mechanika kwantowa, i szczególna teoria względności. Problem nadal jest dyskutowany w fizyce. W ostatniej części tego rozdziału autor dość szczegółowo omawia przemyślenia Bella nad możliwymi interpretacjami fenomenu kwantowej nielokalności. Jednym z ostatnich wniosków wyłaniających się z tego rozdziału jest stwierdzenie, że „wszystkie próby wyjaśnienia tego, czym jest kwantowa nielokalność i jaka jest relacja tego fenomenu zarówno do teorii względności, jak i do innych pozostałych teorii naukowych, wcześniej czy później napotykają problem pomiaru i związaną z nim trudność ustalenia granicy pomiędzy światem kwantowym i makroskopowym" (s. 277).

Ostatni rozdział swojej monografii Pabjan poświęca zasygnalizowanemu już wcześniej problemowi pomiaru. Jest to nierozwiązany problem mechaniki kwantowej, który łączy się z problemem nielokalności kwantowej, a zwłaszcza z problemem jasnego określenia obserwabli. Autor rozpoczyna od nakreślenia w tej kwestii stanowiska szkoły kopenhaskiej, która wprowadzała dychotomię między oboma światami oraz od przedstawienia stanowiska Bella, który nie widział tak jednoznacznie wyznaczonej granicy. Zdaniem Bella, mechanika kwantowa nie wyklucza jednorodnego opisu świata. Pabjan omawia różne stanowiska w tej kwestii, jednak zauważa, że ciągle pozostaje nierozwiązany problem granicy między oboma światami. W dalszej części rozważany jest problem obserwabli. Bell, aby uniknąć nieporozumień z takimi terminami, jak pomiar i obserwacja, proponuje wprowadzić nowy termin, który autor tłumaczy jako biabla (w liczbie mnogiej: biable). Zdaniem Pabjana, ujawniają się tu te aspekty świata fizyki, „które dotyczą zagadnień metafizycznych; okazuje się bowiem, że 'ruchoma granica' w rzeczywistości jest granicą oddzielającą dwa światy o całkowicie różnych ontologiach" (s. 300). Dopóki problem „granicy" nie zostanie dobrze rozwiązany, to „znalezienie wspólnej ontologii opisującej jednocześnie obydwa światy jawić się będzie jako wyjątkowo trudne zadanie".

Ostatnie kwestie poruszane w tej książce dotyczą najpierw stanowiska, które Bell określa skrótem FAPP (*for all practical purposes*). Głosi ono, że nie należy przejmować się interpretacyjnymi trudnościami, gdyż nie wpływają one na wyniki mechaniki kwantowej. Bell odrzuca takie podejście i wskazuje na dwa rozwiązania, które jego zdaniem są najkorzystniejsze dla rozstrzygnięcia interpretacyjnych problemów. Za Bellem autor omawia teorię fali pilotującej de Broglie'a-Bohma oraz teorię spontanicznego kolapsu funkcji falowej (Ghirardiego, Rimini i Webra, GRW).

Na koniec warto dokonać podsumowania recenzowanej książki:

Pabjan dokonał rekonstrukcji filozoficznych poglądów Johna S. Bella. Zadanie to było trudne, gdyż wymagało wnikliwego prześledzenia całej spuścizny naukowej opracowywanego autora. Bell był przede wszystkim fizykiem i sam dziwił się, gdy zauważył, że niektóre jego sformułowania mają wydźwięk filozoficzny. Pewnym ułatwieniem przy tej rekonstrukcji była – jak zauważa autor książki – „niezwykła przejrzystość i logika argumentów zawartych w pracach Bella" (s. 18). Warto jeszcze raz podkreślić, że Pabjan zaproponował samodzielne analizy oryginalnych tekstów irlandzkiego fizyka. Ważnym narzędziem, które posłużyło Pabjanowi do wyłowienia filozoficznych myśli Bella, było solidne wczytanie się w interpretację formalizmu mechaniki kwantowej.

Analizy prowadzone w rozprawie w dużym stopniu uzasadniają użycie terminu „eksperymentalna metafizyka". Dlaczego nie w pełni? Jak słusznie stwierdza autor, problem leży w zagadnieniach o charakterze konceptualnym. W obszarze interpretacyjnym zagadnienia te nie mają wymaganej jasności i przejrzystości. Pabjan dobrze pokazuje to na przykładzie problemu pomiaru oraz kwantowej nielokalności.

Trzeba jednak odpowiedzieć na pytanie: na jakie elementy zwrócił uwagę Pabjan uzasadniając termin „metafizyka eksperymentalna"? Z rozprawy trzeba je trochę wyławiać. Prace Bella są dobrym przykładem zacierania się wyraźniej granicy między filozofią a nauką. Osiągnięciem autora jest uzasadnienie, że postawienie ostrej granicy między filozofią a nauką prowadzi do poważnych problemów z interpretacją formalizmu teorii. W pracy nie trudno dostrzec, jak interpretacja wyłaniająca się z twierdzeń Bella wpływa na kształtowanie się pojęć filozoficznych, np. pojęcie przyczynowości. Innymi słowy autor pokazał, że nauka (w tym przypadku fizyka, mająca charakter eksperymentalny) wpływa na modyfikację pojęć filozoficznych (o charakterze metafizycznym).

W tym kontekście warto zwrócić uwagę na termin „eksperyment" w odniesieniu do metafizyki. Jest to coraz silniej pojawiająca się nowa jakość w rozważaniach meta-metafizycznych. Chodzi o to, że metoda empiryczna może wpływać w sensowny sposób na rozumienie przesłanek metafizycznych. Nie można nie zauważyć, że autor rozprawy do terminu eksperymentalna metafizyka pochodzi od strony analiz konkretnej teorii naukowej. Nie ma w pracy klasycznych metafizycznych rozważań. Autor wyraża przekonanie, że jego propozycja (od nauki do metafizyki), co prawda nie jest nowa, ale znajduje nowe wsparcie w przemyśleniach Bella. Może się ona przyczynić do rozwikłania sporów (przynajmniej niektórych), jakie toczą się w obrębie pojęć i kategorii metafizycznych. Pabjan słusznie zauważa, że „'zwykła' metafizyka może stać się metafizyką eksperymentalną tylko w takim sensie, że przypisywane jej tradycyjne zagadnienia i problemy uzyskują całkowicie nową interpretację przez to, iż pojawiają się w kontekście teorii fizycznych, w ramach których przeprowadza się – zgodnie z metodą nauk empirycznych – różnego rodzaju eksperymenty" (s. 22).

Wstęp i zakończenie książki wyraźnie swoim stylem odbiegają od rozważań prowadzonych w rozprawie. Pomimo tej odmienności wstęp dobrze wprowadza do dalszych analiz. Zakończenie ma raczej charakter filozoficznego eseju niż podsumowania.

Książka Tadeusza Pabjana nie należy do łatwych lektur. Wymaga ona przygotowania filozoficznego, a zwłaszcza znajomości (choćby na podstawowym poziomie) mechaniki kwantowej.

Swoista odwaga myślenia autora tej książki może zainspirować wielu filozofów, nie tylko filozofów przyrody, by krytycznie przyjrzeć się różnym modelom związku filozofii z naukami przyrodniczymi i matematyką.

Janusz Mączka