Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
LI (2012), 131–149

Adam Olszewski
Wydział Filozoficzny, Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych

MATEMATYKA CZY TEOLOGIA? HILBERT, GORDAN I POCZĄTKI FORMALIZMU

1. Niniejszy artykuł ma zrealizować dwa cele. Pierwszym jest wskazanie na ważną (często niezauważaną) inspirację powstania programu Hilberta, zaś drugi ma ukazać pewne związki między matematyką a teologią.[1]

2. W XIX wieku, a szczególnie od lat czterdziestych, teoria algebraicznych niezmienników była jednym z najbardziej żywych obszarów badań matematycznych.[2] Pewne spostrzeżenia na temat niezmienników algebraicznych poczynił już Gauss na początku XIX wieku, w

[1] Artykuł niniejszy opiera się częściowo na tekstach źródłowych, zaś częściowo na pracach wtórnych. Nie ma on charakteru ściśle historycznego, lecz raczej należy do teorii rozwoju idei. Niektóre z rozważanych spraw są znane np. anglosaskiej społeczności filozoficznej, jednak uznałem, że warto je uzmysłowić filozofom polskim. Niniejsza praca, pod względem struktury, jest zbliżona do pracy McLarty'ego, ale uwypuklone zostały inne aspekty tytułowego zagadnienia. Dziękuję Bartoszowi Brożkowi za dyskusje nad tym artykułem.

[2] Definicja niezmiennika formy:
„Niezmiennikiem formy o dwu zmiennych $F_n(x, y)$ dowolnego stopnia n nazywamy wyrażenie I_{F_n} o współczynnikach formy F_n takim, że zawsze kiedy liniowe podstawienie przekształca F_n w F'_n:
$F_n(x, y) = F_n(ax' + by', cx' + dy') = F'_n(x', y')$
to niezmiennik jest mnożony przez jakąś potęgę tego wyrażenia w podstawieniu współczynników $I_{F'_n} = (ad–bc)^m \cdot I_{F_n}$. Kwadratowa forma $F(x, y) = ax^2+2bxy+cy^2$; posiada nieskończenie wiele niezmienników, ale wszystkie one są potęgą wyróżnika Δ_F tzn.: $I = \Delta^k{}_F$, dla dowolnego I i pewnego k. W tym sensie wyróżnik jest sam zupełnym systemem niezmienników kwadratowej formy.” McLarty, s. 5.

pracy poświęconej binarnym kwadratowym formom. Impulsem dla rozwoju tej teorii, w latach czterdziestych XIX wieku, były prace angielskiego matematyka George'a Boole'a oraz Otto Hesse'go w Niemczech.[3] Badania te były niezależne i miały różne inspiracje. Boole udowodnił pewne szczegółowe twierdzenia o niezmiennikach form binarnych drugiego rzędu (1841). Badania te podjął jego uczeń, A. Cayley[4], wraz ze swoim przyjacielem Jamesem Josephem Sylvestrem, który zauważył relacje zachodzące pomiędzy niezmiennikami i wprowadził termin „syzygies" (1853).[5] To właśnie Cayley sformułował problem ogólny, znalezienia niezmienników dla dowolnych form. Natomiast w wątku niemieckim Hesse[6], a także jego uczeń Siegfried Aronhold, postawili podobny problem ogólny dotyczący niezmienników, który rozwiązał właśnie Hilbert. Angielska gałąź badania niezmienników posługiwała się w poszukiwaniu niezmienników pełnymi postaciami form zdaniowych, co czyniło obliczenia niezwykle długotrwałymi i nużącymi. Niemiecka grupa badaczy poszła w kierunku bardziej „symbolicznym" i posługiwała się równoważnymi, lecz skrótowymi postaciami form. W tym kontekście można mówić o „szkołach": niemieckiej i angielskiej. Nad szczególnymi przypadkami ogólnego problemu, dla określonego stopnia i liczby zmiennych, pracowali wybitni matematycy z różnych krajów. Można powiedzieć, że problem stał się sławny. W 1868 roku Paul Gordan (ur. 27.04.1837, zm. 21.12.1912), mając 31 lat, rozwiązał zagadnienie dla form binarnych dowolnego rzędu, co uczyniło go „królem niezmienników" (form binarnych). Udowodnił twierdzenie mówiące, że pierścień niezmienników form binarnych dowolnego stopnia jest skończenie generowalny.[7] Dowód Gordana spełniał konstruktywistyczne oczekiwania współczesnych mu matematyków i podawał efektywną procedurę znajdowania skończonej bazy. Jak wspomniano powyżej, metody stosowane przez szkołę niemiecką w ba-

---

[3] W XIX wieku badano tzw. jednorodne (homogeniczne) formy. Na przykład jednorodna kwadratowa forma dwu zmiennych miała postać $F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

[4] Cayley miał wprowadzić termin „niezmienniki" (invariants).

[5] Por. Encyclopaedia Italiana – Storia della Scienza (2003), Vol. VII, 1025-1029.

[6] Hesse wyszedł od pewnych zagadnień geometrycznych, które doprowadziły go do niezmienników.

[7] Używając współczesnej terminologii.

daniach nad niezmiennikami nazywane były „symbolicznymi". Procedura opisana przez Gordana wymagała skomplikowanych i długotrwałych obliczeń. Nie nadawała się z tego powodu dla form stopnia większego niż 6, została jednak później uproszczona i można było badać nawet formy stopnia 8. Warto tutaj zwrócić uwagę na specyfikę metody symbolicznej Gordana, taką mianowicie, że „nie wolno było pytać o konkretne znaczenie obliczeń w złym momencie" oraz „...[J]eśli spróbujesz śledzić, co to wszystko znaczy w terminach rzeczywistych wielomianów, to się z pewnością zagubisz w nieistotnych i skomplikowanych szczegółach. Tylko kluczowe punkty obliczeń mogą być wyrażone w tych terminach. Gordan podkreśla, że jedna z jego kluczowych symbolicznych operacji, zwana *Faltung*, nie posiada w ogóle żadnego nie-symbolicznego znaczenia".[8]

Prawdziwy król niezmienników dowolnych form – Dawid Hilbert – miał w 1868 roku zaledwie 6 lat. Hilbert ukończył swą pracę doktorską zatytułowaną *Ueber invariante Eigenschaften spezieller binaerer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen* w 1885 roku, pod kierunkiem Ferdynanda von Lindemanna. Dotyczyła ona również niezmienników, co jeszcze bardziej potwierdza fakt niezwykłego zainteresowania niezmiennikami wśród ówczesnej elity matematyków. W roku 1888, w wieku 26 lat, Hilbert rozwiązał ogólny problem postawiony przez Gordana dowodząc tzw. twierdzenia o bazie.

Twierdzenie Hilberta o bazie (wersja orginalna) :
Dla dowolnego nieskończonego ciągu $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$ form w n zmiennych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ istnieje liczba m taka, że każdy wielomian w tym ciągu może być przedstawiony w postaci

$$\phi = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + \ldots + a_m\phi_m;$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_m$ są odpowiednimi formami w tych samych zmiennych. (Hilbert,1888 -1889, s. 450).

Hilbert, w latach 1888-1889. opublikował trzy krótkie artykuły w *Goettinger Nachrichten*, gdzie skrótowo informuje o swoich wynikach dotyczących algebraicznych niezmienników. Podany tam dowód

[8] Por. McLarty, s. 6. Również Rota s. 26.

twierdzenia o bazie, który był dowodem indukcyjnym i niewprost, okazał się być niepoprawny. Właściwa (i rozszerzona) publikacja ukazała się w 1890 roku w *Mathematische Annalen*. Gordan, jako uznany znawca tej problematyki, został poproszony o recenzję, w której napisał:

> Z przykrością muszę powiedzieć, że jestem tym bardzo nieusatysfakcjowany. Twierdzenia są rzeczywiście całkiem ważne i poprawne, i mój krytycyzm ich nie dotyczy. Odnosi się on raczej do dowodu podstawowego twierdzenia, który nie spełnia najbardziej skromnych wymagań odnoszących się do dowodu matematycznego. Nie wystarcza to, że autor wyjaśnił problem sobie samemu. Żąda się, że zbuduje on dowód według bezpiecznych reguł. [...] Hilbert pogardza wyłożeniem swoich myśli za pomocą formalnych reguł; uważa, że wystarcza, iż nikt nie może wykazać sprzeczności jego dowodu, i wszystko jest w porządku. Postępując w ten sposób nie uczy on nikogo niczego. Ja mogę się nauczyć tylko czegoś, co zostanie tak mi wyjaśnione jak to, że jeden razy jeden równa się jeden. Powiedziałem mu w Lipsku, że jego rozumowanie nie mówi mi niczego, zaś on utrzymywał, że waga i poprawność jego rezultatów wystarczają. To może wystarczać na początkowym etapie odkrycia, ale nie wystarcza na szczegółowy artykuł do *Annalen*. (Hilbert, Klein, 1985, s. 65)[9]

Współczesne wersje twierdzenia Hiberta, po odkryciach Emmy Noether, różnią się od oryginalnego:
(Twierdzenie Hilberta o bazie) Dowolny ideał pierścienia wielomianów $K[x_1, \dots, x_n]$ jest skończenie generowalny.
Ogólniejsza wersja: Jeśli R jest lewym (odpowiednio prawym) Noetherowskim pierścieniem, to pierścień wielomianów $R[X]$ jest również lewym (odpowiednio prawym) pierścieniem Noetherowskim.[10]

[9] Cytuję za McLarty, s. 10.

[10] Dla porządku przytaczam dowód tego twierdzenia. Dowód (niekonstruktywny): Niech I będzie ideałem w $R[X]$ i przyjmijmy dla dowodu niewprost, że I nie jest skończenie generowalny. Indukcyjnie konstruujemy ciąg $f_1, f_2, \dots$ elementów I taki, że f_{i+1} ma najmniejszy stopień w $I \setminus J_i$, gdzie J_i jest ideałem generowanym przez $f_1, f_2, \dots, f_i$.

Główne różnice współczesnych postaci samego twierdzenia o bazie w stosunku do wersji Hilbertowskiej polegają na tym, że:

- nie odwołują się do tradycyjnego ujęcia form, w szczególności do ich homogeniczności;
- odnoszą się do pierścieni Noetherowskich;
- Hilberta wersja odnosi się do przeliczalnych i uporządkowanych zbiorów wielomianów.[11]

Wyrażeniem *problem Gordana* posługuję się w niniejszym artykule w dwóch znaczeniach: pierwsze odnosi się do zagadnienia z teorii niezmienników, zaś drugie dotyczy krytycznych uwag względem dowodu Hilberta. Biorąc pod uwagę drugie znaczenie, zarzuty Gordana można sprowadzić do trzech:

(G1) że dowód Hilberta jest dowodem niewprost;

(G2) że jest to dowód egzystencjalny (dowodzi jedynie istnienia pewnego obiektu);

(G3) że jest to dowód, który nie charakteryzuje obiektu (nie określa jego własności).

Zarzuty te wymagają krótkiego komentarza. Dowód niewprost używany był w obrębie matematyki niemal od początku jej istnienia. Klasyczne uzasadnienie poprawności logicznej takiego dowodu opiera się między innymi na przesłance o dwuwartościowości (biwalencji zdań

Niech a_i będzie prowadzącym współczynnikiem wielomianu f_i. Niech J będzie ideałem w R generowanym przez $a_1, a_2, \ldots$. Ponieważ R jest pierścieniem Noetherowskim istnieje taka liczba N, że J jest generowalny przez $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Znaczy to w szczególności, że $a_{N+1} = u_1 a_1 + \ldots + u_N a_N$ dla pewnych $u_1, \ldots, u_N$ w R. Rozważmy teraz $g = u_1 f_1 x^n{}_1 + \ldots + u_N f_N x^n{}_N$ where $n_i = deg\, f_{N+1} - deg\, f_i$. Ponieważ $deg\, g = deg\, f_{N+1}$ i współczynniki wiodące wielomianów g oraz f_{N+1} zgadzają się, to różnica $f_{N+1} - g$ ma stopień ostro mniejszy niż f_{N+1}, co jest w sprzeczności z wyborem f_{N+1}. Zatem I jest skończenie generowalny. Por. internet oraz Prasolov ss. 220-221.

[11] Dokładna analiza pierwszej wersji dowodu Hilberta i jego wad jest poza zasięgiem niniejszego artykułu.

matematycznych). Przesłanka ta sprawia, iż nie ma potrzeby, by logicznie rozróżniać pomiędzy zdaniem i jego podwójną negacją, gdyż są równoważne. McLarty (ss. 10-11) uważa, że Gordan nie formułował świadomie zarzutu co do tego, że dowód jest niewprost. Matematycy dziewiętnastowieczni nie zdawali sobie sprawy (wg. McLarty'ego) ze specyfiki takiego dowodu. Musimy jednak pamiętać, że Gordan nie artykułował dokładnie źródeł swojego niepokoju odnośnie do rozumowania Hilberta.[12] Dopiero Brouwer w pełni sformułował zarzut, że pewne postacie dowodu niewprost są wątpliwe z punktu widzenia ich logicznej poprawności. Zarzut ten dał impuls do powstania logiki intuicjonistycznej, której adekwatna matryca nie jest skończona, co wykazał Goedel w 1932 roku, i jest nieskończona, co wykazał Jaśkowski w 1936 roku. Uchylenie założenia biwalencji, z uzasadnienia poprawności dowodu niewprost, skutkuje brakiem równoważności pomiędzy zdaniem i jego podwójną negacją. W szczególności zdanie egzystencjalne zanegowane podwójnie $\neg\neg\exists xA$ nie implikuje logicznie zdania $\exists xA$. Intuicjonistycznie to, że $\exists xA$ prowadzi do absurdu, samo prowadzi do absurdu, nie daje żadnej sposobności konstrukcji odpowiedniego x.[13] W przypadku dowodu Hilberta udowodnione zostało właśnie jedynie $\neg\neg\exists xA$. Być może również tę właśnie intuicję (nieformalne przeczucie) miał Gordan, gdy napisał o dowodzie Hilberta, że *nie spełnia najbardziej skromnych wymagań odnoszących się do dowodu matematycznego.* Zarzuty (G2) i (G3) zostały sformułowane *explicite*:

> dowód, który podał Hilbert jest zasadniczo poprawny w swej istocie; jednakże wyczuwam lukę w jego wyjaśnieniu, iż jest zadowolony z udowodnienia istnienia [rozwiązań], bez rozważenia ich własności.[14]

Porównajmy teraz dwie formuły: $\exists xA(x)$ oraz $A(d)$, gdzie d jest obiektem z uniwersum U, będącym potencjalną wartością zmiennej x.[15] Wedle nieformalnej interpretacji BHK[16] dla logiki intuicjonistycznej, przy

---

[12] Zob. cytat z recenzji Gordana powyżej.

[13] Może inaczej: $\neg\exists xA$ implikuje absurd, co znaczy konstruktywistycznie $\neg\neg\exists xA$.

[14] Cytuję za McLartym. Por. Gordan (1893), ss. 132-133.

[15] Dla uproszczenia utożsamiam obiekt i jego nazwę.

[16] Od nazwisk Brouwera, Heytinga i Kołmogorowa.

której zdanie jest prawdziwe, jeśli posiada dowód (konstrukcję), pomiędzy obiema powyższymi formułami zachodzi następujący związek: (BHK6) dowód dla $\exists x A(x)$ polega na dostarczeniu dowodu (konstrukcji), że $d \in U$ oraz dowodzie (konstrukcji), że $A(d)$. Widać, że nie da się konstruktywistycznie oddzielić prawdziwości obu powyższych przypadków. Dla Gordana mogło to być paradygmatyczne przekonanie, którego nie potrafił jasno sformułować. Stąd w jego recenzji pracy Hilberta pojawia się zwrot: *jego rozumowanie nie mówi mi niczego*, który był próbą wyrażenia czegoś ówcześnie „niewyrażalnego”.[17] Problemem otwartym zdaje się być „konstruktywizm” Gordana. McLarty (s. 13) twierdzi, że nie ma żadnego dowodu (*evidence*) na to, iż Gordan odrzucał niekonstruktywną część matematyki, ani na to, że matematyka musi być konstruktywna. Natomiast samo niezrozumienie dowodu Hilberta wskazuje na to, że miał „konstruktywistyczne skrupuły”. Dowód Hilberta był zaskakujący, ponieważ dowodził zdania egzystencjalnego w sposób niezależny od dowodu wymienionego z prawej strony (BHK6).[18] Niejako „odkleił” istnienie obiektu od samego obiektu i jego własności. W podobnym duchu na temat twierdzeń o charakterze egzystencjalnym (niekonstruktywnych) wypowiedział się A. Markow:

> tak więc nie jest jasne w jakim sensie ten obiekt [o którym mowa w twierdzeniu AO.] istnieje, to znaczy, nie wiadomo, co właściwie wyraża to twierdzenie.[19]

Przytoczona wypowiedź Markowa pochodzi z roku 1958, czyli około 60 lat po recenzji Gordana, i pomimo tego przypomina język niemieckiego matematyka. Poza tym, na co zwrócił uwagę Heyting (s. 185-186) za G. Kreislem, w wypadku twierdzeń egzystencjalnych należy odróżnić konstruktywność dowodu od konstruktywności samego twierdzenia. Samo pojęcie konstruktywnego dowodu jest w ogólności nieprecyzyjne (*vague*), podczas gdy pojęcie konstruktywnego twierdzenia

[17] Wyrażalne stało się dopiero od czasów Brouwera. Po. Jednak uwagi Heytinga poniżej.

[18] Hilbert, wychodząc naprzeciw konstruktywistycznych żądaniom Gordana, podał zadowalający dowód twierdzenia o bazie w 1893 roku.

[19] Cytuję za Heyting, A. (1962), s 185.

może być doprecyzowane na kilka sposobów (s. 186).[20] Nieprecyzyjny charakter pojęcia konstruktywnego dowodu (czy też efektywnej obliczalności) jest wg. Heytinga niepokonywalną jego cechą, której nie należy się ani obawiać, ani wykorzystywać jako argumentu przeciwko konstruktywizmowi (s. 187-188). Pisze tak (s. 187):

> Jest jasne, że konstruktywizm nie może istnieć bez nieprecyzyjnego pojęcia efektywności. A czy nie-konstruktywizm może istnieć? Aby być precyzyjnym, musi on zostać sformalizowany. Wtedy, wcześniej lub później, oprócz poszczególnych derywacji, zostanie zdefiniowane ogólne pojecie wyprowadzalności. Albo to pojęcie będzie rozumiane konstruktywnie, i wtedy będzie nieprecyzyjne (*vague*), albo metamatematyka musi zostać sformalizowana, co prowadzi powtórzeń bez końca (*endless repetition*).[21]

Po tej prezentacji chciałbym wskazać na rolę, jaką, według mnie, odegrał *problem Gordana* (w drugim znaczeniu) dla sformułowania programu Hilberta. Dla ilustracji przypomnę sam program w wersji skróconej i postaram się wskazać, w których punktach był on inspirowany przez Gordana. Hilbert, formułując swój program, przyjął następujące cele (C1-C2) i założenia (Z3-Z6):[22]

(C1) Uratować całą matematykę (raj, do którego wprowadził nas Cantor), włącznie z jej częścią niekonstruktywną.[23]

(C2) Metody pozaskończone są problematyczne (należy je usprawiedliwić).

(Z3) Metoda symboliczna jest użyteczna (formalizacja).

---

[20]W rozważanym przez nas przypadku Gordan nie miał zarzutu co do zawartości samego twierdzenia, lecz jego dowodu.

[21]Te uwagi pokazują, że niepokój Gordana odnośnie do dowodu Hilberta nie miał wad wynikających z braku precyzji.

[22]Rozważania te należą zarówno do tzw. kontekstu odkrycia jak i kontekstu uzasadniania samego programu. Nie pretenduję tutaj do kompletności w opisie celów, założeń i realizacji programu Hilberta. Szerzej o tym por. Olszewski, A. Teza Churcha. Kontekst historyczno-filozoficzny, Kraków 2009.

[23]C. Reid w swej książce o Hilbercie pisze o jego podróży (po uzyskaniu doktoratu) po Niemczech i odwiedzinach wybitnych matematyków. Dużo uwagi Hilbert poświęcił poglądom Kroneckera. Por. C. Reid, Hilbert, Berlin- Heidelberg- New York, 1970.

(Z4) Można podać dowód wszelkich twierdzeń matematycznych (rozstrzygalność).[24]

(Z5) Bezwzględnie pewne w matematyce są wyłącznie metody finitystyczne.

(Z6) Metoda aksjomatyczna jest użyteczna (aksjomatyzacja).[25]

Natomiast sam program, którego składowymi były aksjomatyzacja i formalizacja, miał być zrealizowany w następujących etapach:

(ETAP 1) Identyfikacja nie budzącej wątpliwości, finitystycznej części matematyki realnej (treściowej).

(ETAP 2) Formalizacja tej części matematyki (przy czym nie ma znaczenia, czy tę formalną część będziemy już nazywać matematyką idealną, czy ciągle realną).

(ETAP 3) Zbudowanie odpowiedniego systemu formalnego (aksjomatów i reguł inferencyjnych), z użyciem którego da się zrekonstruować finitystyczne i coraz obszerniejsze fragmenty matematyki. Sformalizowana matematyka treściowa pełni w tym procesie funkcję heurystyczną; można zatem powiedzieć, że na tym etapie aksjomaty traktowane są „treściowo".

(ETAP 4) Potraktowanie tak skonstruowanego systemu formalnego jako zbioru skończonych znaków.

(ETAP 5) Dowód niesprzeczności (i ew. inne dowody metamatematyczne) systemu formalnego. Dowody te przeprowadzane są w me-

---

[24]Zob. odręczne zapiski Hilberta na ten temat. Por. Hayashi S., Nakatogawa K., „Hilbert and computation". (Z4) jest czasem określane w literaturze jako wyraz optymizmu Hilberta. Ów optymizm, jako stan psychiczny, może mieć związek pośredni z problemem Gordana. Należy pamiętać, że 26-letni młodzieniec rozwiązał jeden z głównych problemów zaprzątających umysły wielu matematyków dziewiętnastego wieku. Jest to z pewnością podstawa do optymizmu.

[25]Obszerne rozważania na temat pochodzenia i ważności metody aksjomatycznej u Hilberta por. Corry, L., "The Origin of Hilbert's Axiomatic Method". Hilbert dał wkład w aksjomatyki m.in. takich dziedzin jak: mechanika, termodynamika, rachunek prawdopodobieństwa, kinetyczna teoria gazów, elektrodynamika, a nawet psychofizyka. Por. powyższy artykuł Corry'ego s. 173 i nast. Oczywiście jeśli chodzi o matematykę to najważniejsze były aksjomatyki geometrii i teorii liczb rzeczywistych. Hilbert wymagał by aksjomatyki spełniały cztery warunki (rozumiane przez niego dość specyficznie): niezależność, prostota, pełność i niesprzeczność.

tamatematyce, która jest finitystyczna i treściowa (operuje się tu na skończonych znakach).

(ETAP 6) Metamatematyczna (treściowa) ocena („interpretacja”) twierdzeń wygenerowanych przez system formalny. Udowodniona wcześniej niesprzeczność tego systemu gwarantuje prawdziwość uzyskanych twierdzeń.

Oba cele, (C1) i (C2), jakie stawiał sobie Hilbert, nie są rozłączne i realizacja pierwszego z nich prowadzi do realizacji drugiego. Warto jednak ten drugi cel mieć na myśli osobno, gdyż był przedmiotem różnych badań i dyskusji.[26] Nie przytaczam tutaj znanych wypowiedzi Hilberta wyrażających (C1) na różne sposoby. Młody Hilbert, podając dowód twierdzenia o bazie, miał okazję, dzięki Gordanowi, osobiście zapoznać się z krytyką swego argumentu. Choć, podobnie jak jego krytyk, był przekonany o prawdziwości samego twierdzenia (twierdzeń), to nie był w stanie, jak się wydaje,[27] uczynić dwóch rzeczy: zrozumieć dokładnie, o co chodziło Gordanowi, który, jak wspomniano wcześniej, sam dokładnie tego nie wiedział, oraz sformułować jasnej obrony przed krytyką. Jak to Gordan sformułował, Hilbert [...] *pogardza wyłożeniem swoich myśli za pomocą formalnych reguł; uważa, że wystarcza, iż nikt nie może wykazać sprzeczności jego dowodu, i wszystko jest w porządku*.[28] Ta *pogarda* wynikała być może z nieumiejętności formalnego opracowania dowodu. Hilbert, według Gordana, przerzucał ciężar uzasadnienia niepoprawności dowodu na jego krytyków. Musiał jednak z tego sobie zdawać sprawę i z pewnością zostało to zapamiętane jako swoista porażka.[29] Tutaj też, według mnie, należy szukać podstawowej inspiracji dla (C1), która rozwinięta została, kiedy Hil-

[26]Warto w tym kontekście wymienić należy książkę zawierającą prace wybitnych logików: Infinitistic methods, PWN, 1961.

[27]Moje poglądy w tej sprawie mają charakter hipotetyczny i wyprowadzone są częściowo w oparciu o znane fakty, zaś częściowo są wnioskami z kontekstu i dalszego rozwoju wydarzeń.

[28] Por. powyżej.

[29]C. Reid w swojej książce próbuje pokazać profil psychologiczny Hilberta. Był on człowiekiem niezwykle ambitnym, bezkompromisowym i skutecznym. Niejasności w kwestii dowodu skłoniły zarówno Gordana jak i Hilberta do dalszych badań, i podania nowych dowodów twierdzenia o bazie.

bert wrócił do zainteresowania podstawami matematyki.[30] Wtedy też powrócił do *problemu Gordana* i napisał:

> Gordan miał mieszane uczucia odnośnie do pozaskończonych metod wykorzystanych w moim pierwszym dowodzie niezmienników [t.j. o skończoności zupełnych systemów] co wyraził, określając dowód mianem ”teologicznego”. Zmienił mój dowód, wprowadzając swoją ”symboliczną metodę” i uważał, że w ten sposób pozbawił go ”teologicznego” charakteru. W rzeczywistości, pozaskończone rozumowanie było ukryte za formalizmem.[31]

Cytat ten pokazuje w jaki sposób Hilbert rozumiał, po latach, zarzuty Gordana. Uważał, że odnosiły się do *pozaskończonych metod* i stąd można mówić o inspiracji dla (C2). Być może było tak jak pisał Hilbert,[32] jednak przytoczone fragmenty z Gordana, wskazują na coś innego, co potwierdził również H. Weyl wskazując jedynie na Gordanowskie *skrupuły egzystencjalne*, a pomijając problem pozaskończoności. Odnośnie do (Z3) Hilbert, jako uważny myśliciel, musiał zdać sobie sprawę z doniosłości metody symbolicznej, którą stosował Gordan. Szczególnie ważne było to, że owa metoda mogła, dzięki systematycznemu i starannemu zastosowaniu, przenieść badacza w obszary rozumowań, w których traci on intuicyjny kontakt z dowodzonymi zdaniami. Znaczy to, że, zgodnie z sugestią Gordana, w niektórych przypadkach nawet należy *przestać rozumieć*, a jedynie „ślepo” postępować za regułami. Hilbert zrealizował to założenie w swoim programie (formalizacja) w ten sposób, iż treściowa ocena zdań użytych w dowodzie twierdzeń następuje na początku i na końcu dowodu, i dokonuje się w obrębie metamatematyki.[33] Założenie (Z5) odnoszące się do fini-

---

[30]Podobnie uważa McLarty s. 12.

[31]Hilbert (1923), s. 161. Ten cytat potwierdza moje przypuszczenia odnośnie do inspiracji Hilberta. Warto wspomnieć, że w nieco podobnej sytuacji znalazł się G. Cantor atakowany przez konstruktywistów odnośnie do zbiorów aktualnie nieskończonych, w szczególności Kroneckera, który szukał sprzymierzeńców filozoficznych pośród przedstawicieli teologii neoscholastycznej (zachowały się fragmenty korespondencji). Uwagę tę zawdzięczam Jerzemu Dadaczyńskiemu.

[32]Niektóre sprawy mogły zostać jedynie omówione podczas osobistych spotkań obu matematyków i nie zostały opublikowane.

[33]Ten ciekawy wątek sam w sobie wymaga niezależnego rozwinięcia.

tystyczności pewnych fragmentów matematyki jest, według mnie, *implicite* zawarte w wypowiedzi Gordana: *[o]n [Hilbert, AO.] nie uczy nikogo niczego w ten sposób. Ja mogę się jedynie nauczyć tego, co jest jasne dla mnie, jak jeden razy jeden jest jeden.* Rozróżniał on różne obszary matematyki pojmowanej jak wytwór, w szczególności mówił o takim obszarze, którego twierdzenia są dla niego *jasne*. Jest to kategoria dość subiektywna, jednak niemal stale obecna w sformułowaniach matematyków i filozofów (Kartezjusz). Dowód Hilberta nie posiadał dla niego tej cechy *jasności*. Gordan był również, jak określił go Noether, *algorytmikiem (algorithmiker).*[34] Znaczyło to między innymi zaufanie do metody symbolicznej, czyli starannego postępowania według pewnych *jasnych* reguł obliczeniowych. (Z5) zostało przez Hilberta wykorzystane przy formalizacji (całej) m(M)atematyki[35], którą zaczął faktycznie realizować z W. Ackermannem w *Grundzuege der theoretischen Logik* (1928) oraz, pełniej, z P. Bernaysem w *Grundlagen der Mathematik I* (1934) i *II* (1939). Sformalizował rachunek zdań i predykatów, by dojść do arytmetyki liczb naturalnych. Pewna część arytmetyki tych liczb tworzyć miała finitystyczną i treściową bazę całego programu.[36] Tutaj właśnie mogło owocować to, co miał na myśli Gordan, pisząc: *Ja mogę się jedynie nauczyć tego, co jest jasne dla mnie, jak jeden razy jeden jest jeden.* Zresztą Hilbert sam miał wątpliwości co do finitystyczności zdań zaczynających się od kwantyfikatora. Wydaje się, że dopiero pojęcie systemu formalnego realizowało zamierzenie finitystyczności. System formalny realizował wymóg *jasności* (od czasów Goedla wiadomo, że wiele metajęzykowych predykatów orzekanych o systemie formalnym ma charakter pierwotnie rekurencyjny) oraz dowodzenie w takim systemie spełniało wymóg *jasności* postępowania według *jasnych* reguł. Dlatego właśnie dowodzenie w takim systemie było właściwą odpowiedzią na wątpliwości Gordana

[34]Por. Noether (1914), s. 37; McLarty s. 13.

[35]Mam wątpliwość czy pisać to słowo z dużej czy małej litery w kontekście poglądów Hilberta. Chciał on uratować całą matematykę, a nie tylko okrojoną przez konstruktywistów.

[36]Za taką bazę finitystyczną uchodzi (wg. nietórych np. W. Tait) arytmetyka Skolema oznaczana symbolem PRA.

i usprawiedliwiało metody pozaskończone matematyki, w szczególności jego sławny dowód.[37]

3. Max Noether[38] w mowie pochwalnej na cześć Paula Gordana, po raz pierwszy publicznie, w 1914 roku, wspomniał o następującej reakcji na dowód Hilberta: *To nie matematyka, to teologia*.[39] Opublikowana wypowiedź wywołała wiele komentarzy wśród matematyków i filozofów, którzy próbowali domyślić się, co miał na myśli jej autor. Sam Noether, który przyjaźnił się z Gordanem, odwoływał się do Gordanowskiego poczucia humoru. Z kolei Hilbert przez *teologiczny* charakter dowodu rozumiał jego pozaskończony charakter. Felix Klein wskazywał raczej na to, że *teologiczność* dowodu znaczyła jego bezwartościowość z punktu widzenia matematyki. Przywołał dodatkowo wypowiedź Gordana: *[p]rzekonałem się, że nawet teologia ma swoje dobre strony*. Otto Blumenthal dopatrywał się *teologiczności* w tym, że dowód posiadał lukę. Gerhard Kowalewski mówił o iluminacji od Boga, jaką otrzymać miał Hilbert podając swój dowód.[40] Podsumowując te poglądy, można wyróżnić co najmniej następujące rozumienia „dowodu teologicznego”:

(1) przyjęty na wiarę (nie spełniający metodologicznych kryteriów);

(2) wykorzystujący zasadę wyłączonego środka (zakłada istnienie obiektów platońskich);

(3) niezwykły, niespodziewany, natchniony;

(4) posługujący się wyrażeniami pozbawionymi znaczenia (”pustymi symbolami”);

(5) dowodzący jedynie istnienia, a nie własności danego obiektu;

(6) odwołujący się do nieskończoności aktualnej (= posługujący się metodami pozaskończonymi).

---

[37]Dowód Hilberta sprawdzono w systemie dowodzenia twierdzeń Mizar.
[38]Ojciec Emmy Noether, która była doktorantką Gordana.
[39]Por. Noether (1914), s. 18. Cytuję za McLartym.
[40]Szerzej te wypowiedzi są skomentowane w McLarty s. 12 i nast.

Niektóre z powyższych rozumień „dowodu teologicznego” przeciwstawiają go dowodowi matematycznemu, który jest, dla niektórych, idealnym wzorcem każdego dowodu. Jednak rozmienia (2), (3), (5) i (6) brzmią bardziej rekoncyliacyjnie. Wskazują bowiem na pewne elementy dowodów wspólne teologii i matematyce. Warto na tę sprawę spojrzeć również od strony teologii i filozofii, a nie wyłącznie matematyki.[41]

Teologia zaczyna się od uznania za prawdziwe zdania *Istnieje Bóg*. Sformułowanie takie jest do przyjęcia po tzw. *lingwistycznym zwrocie* w filozofii. Jednak naprawdę teologia zaczyna się od uznania, że *istnieje* obiekt, do którego odnosimy termin *Bóg* i w pewien sposób go rozumiemy.[42] Innymi słowy, teologia nie rozpoczyna się od zajęcia pewnej postawy propozycjonalnej, lecz pewnej ontologii. Jednym z aspektów tego rozumienia jest to, że *Boga* pojmujemy jako istotę duchową i niematerialną, istniejąca poza czasem, przestrzenią (np. św. Tomasz z Akwinu) i umysłem (np. św. Anzelm). Jej istnienie jest obiektywne i niezależne od podmiotu poznania, zaś cechy *Boga* są odkrywane (głównie dzięki przyjęciu pojęcia *Objawienia*). Aspekt ten przypomina uznawanie istnienia bytu platońskiego. W tym miejscu widać związek pomiędzy teologią i pewną interpretacją filozoficzną matematyki, mianowicie platonizmem matematycznym. Podstawowa różnica między tymi platońskimi bytami (w przypadku platonizmu matematycznego chodzi o całą klasę bytów) polega na tym, że *Bóg*, oprócz tego, że oczywiście jest przedmiotem poznania, jest również podmiotem działania (między innymi objawia się człowiekowi), podczas gdy byty matematyczne są *nieme* (nieaktywne). Ta ostatnia cecha bytów matematycznych jest podstawą do skutecznego ataku na pozycje platońskie w rozumieniu matematyki. Paradoksalnie dowód na istnienie Boga może być mocnym wsparciem dla platonizmu matematycznego,

[41] Autor pragnie uspokoić zaniepokojonego Czytelnika i wyjaśnia, że jest do tego kompetentny, gdyż jest również magistrem teologii.

[42] Na poniższe rozważania ma duży wpływ teologia chrześcijańska. Nie chciałbym wchodzić w rozmaite subtelności z tym związane. Warto zwrócić uwagę na to, że wykład metafizyki (w pierwotnym sensie tego terminu) kończy się dowodem na istnienie Boga i może być uważany za wykład teologii naturalnej.

gdyż implikuje możliwość istnienia (obszernej klasy?) bytów platońskich – *ab esse ad posse valet consequentia*.

Odnośnie do (3) wspomnieć tylko należy, że w teologii istnieje nauka o *Bożej Opatrzności*, wedle której działania człowieka związane są z działaniem łaski Bożej i każde odkrycie, w tym również dowód matematyczny, jest jej owocem.

Powróćmy do zdania *Bóg istnieje* i punktu (5). Przedmiotem sporu jest to, czy da się przedstawić dowód tego zdania. Niektórzy twierdzą, iż nie da się tego zdania dowieść, inni z kolei, że nie można podać dowodu spełniającego odpowiednie kryteria metodologiczne i mówią raczej o argumentach (nie od dowodzie), zaś niektórzy uważają, że dowód jest jak najbardziej możliwy. Zwolennikami ostatniego stanowiska byli filozofowie (św. Anzelm, Kartezjusz), jak i logicy (Goedel, Bocheński).[43] Św. Tomasz z Akwinu nadał swym argumentom nazwę *via*, co znaczy 'droga', i miał na myśli pewną ścieżkę rozumowania. Był zatem zwolennikiem drugiej opcji w sprawie rzeczonego dowodu. Nie jest mi znany dowód, w którym nie zostało podane jakieś rozumienie Boga zadane uprzednio. Niech wyrazem takiego rozumienia będzie forma zdaniowa $B(x)$, którą odczytamy „x jest Bogiem”. Zdanie $\exists x B(x)$ odczytamy „istnieje taki obiekt, który jest Bogiem”. Część formy zdaniowej „jest Bogiem” nazywa się w logice predykatem i jest orzekane o indywiduach. Predykat, którego częścią jest tzw. term predykatowy, w naszym przypadku B, wskazuje na pewną własność posiadaną, lub nie, przez zamierzony obiekt (obiekty). W tym właśnie sensie nie znam dowodu, który by takiego predykatu nie orzekał i równocześnie wyróżniał Boga z uniwersum istniejących bytów. Św. Tomasz z Akwinu dowodząc np. istnienia Pierwszego Poruszyciela pisał na końcu: *a to właśnie nazywamy Bogiem.* Niektórzy sądzą, że termin *Bóg* jest nazwą własną, ale przy dokładniejszej analizie teza ta jest trudna do zrozumienia i obrony. Ciekawe spostrzeżenia na ten temat można poczynić w obrębie teorii pojęć Pawła Materny, która nawiązuje do pewnych idei Pawła Tichy'ego.[44] W teorii tej mamy do

[43] Należy pamiętać, że wspomniani filozofowie nie pracowali w obrębie filozofii analitycznej i nie zajmowali się zdaniem, lecz problemem wyrażonym przez zdanie.

[44] Por. Tichy (1979).

czynienia z tzw. *individual role* albo *office*, które jest funkcją ze zbiorów możliwych światów i czasu w zbiór indywiduów.[45] Przykładem obecnie obsadzonego (*occupied*) *office* (pierwszego rzędu) jest: *prezydent USA*, zaś nieobsadzonego (*vacant*): *król Francji*. Istnienie jest własnością *offices*, zaś termin *Bóg* denotuje Boży-*office*. W tej teorii rekonstruuje się jedną z wersji dowodu św. Anzelma i wykazuje, że Bóg istnieje, co znaczy, iż Boży-*office* jest obsadzony, bez określania jaki jest Bóg (jest to tajemnicą). To ogólne przedstawienie być może niewiele wyjaśnia, ale pokazuje jedna ważną rzecz – można niemal[46] całkowicie w dowodzie oddzielić specyficznie pojęte istnienie obiektu od jego własności. Analogiczną sytuację mamy w przypadku dowodu Hilberta. Skończona baza (obiekt) zostaje wskazany przez predykat A, jednak nie określa się jego własności, a dowodzi się zdania $\exists x A(x)$.[47] Natomiast w znanym dowodzie Kurta Goedla przesłanką jest definicja Boga, tzn. definiuje się $G(x)$, by dowieść $\exists x G(x)$. Jako ciekawostkę można podać, że Goedel w rozmowie z Rudolfem Carnapem stwierdził, iż dowód na istnienie Boga pokazuje możliwość niesprzecznego posługiwania się terminem *Bóg*.

Ostatnią sprawą (ad. (6)) jest kwestia nieskończoności aktualnej. Bóg w teologii jest pojmowany rzeczywiście jako byt nieskończony. Ta nieskończoność Boga jest nieskończonością *jakościową* (widać to dobrze choćby na przykładzie dowodów św. Anzelma i Goedla), podczas gdy w matematyce mamy do czynienia z nieskończonością *ilościową*.

LITERATURA

Corry, L. ”The Origin of Hilbert’s Axiomatic Method”, [w:] Juergen Renn (ed.). *The Genesis of General Relativity,* Vol. 4, ss. 139-236.

[45]Teoria ta jest dość skomplikowana i wymaga dłuższego wprowadzenia. Podaję tutaj tylko niektóre intuicje.

[46]Użyłem słowa niemal rozmyślnie, ponieważ przesłanką takiego dowodu jest to, że Bóg jest bytem od którego nic większego nie można pomyśleć. Dowód ten i jego analiza pochodzi od współpracownicy P. Materny — Marie Duzi, z Czech.

[47]Cała ta sprawa jest dość złożona i wymaga osobnego opracowania.

Theories of Gravitation in the Twilight of Classical Physics: The Promise of Mathematics and the Dream of a Unified Theory 2006 Springer.

Davis, Philip J. "A Brief Look at Mathematics and Theology", internet.

Davis, Philip J. "A Brief Look at Mathematics and Theology Some 20th Century Opinions", internet.

Encyclopaedia Italiana – Storia della Scienza (2003), Vol. VII, 1025-1029.

Gordan, P. (1868) „Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binaren Form eine Ganze Function mit numerische Coefficienten einer endlichen Anzahl solchen Formen ist", *Jour. r. ang. Math.* 69, 323-354.

Gordan, P. (1893), „Ueber einen Satz von Hilbert", *Mathematische Annalen* 42, 132–42.

Hayashi, S. Nakatogawa, K. „Hilbert and computation", internet

Heyting, A. „Infinitistic methods from a finitist point of view" [w:] *Infinitistic methods*, Warszawa, Pergamon Press i PWN 1961, ss. 185-192.

Hilbert, David (1885), „Ueber die invarianten Eigenschaften spezieller binaerer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen", Inauguraldissertation, Koenigsberg. Przedruk [w:] Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*. Bd. 11. pp. 1–33.

Hilbert, David (1887), „Ueber einen allgemeinen gesichtspunkt fuer invariantentheoretische Untersuchung", *Mathematische Annalen* 28, 381–446.

Hilbert, David (1888–1889), „Zur Theorie der algebraischen Gebilde", *Goettinger Nachrichten* 1888, 450–57; 1889, 25–34 i 423–30.

Hilbert, David (1890), „Ueber die Theorie der algebraischen Formen", *Mathematische Annalen* 36, 473–534.

Hilbert, David (1891–92), „Ueber die theorie der algebraischen invarianten", *Nachrichten von der Koeniglichen Gesellschaft der*

Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universitaet zu Goettingen 1891, 232–41; 1892 6–16 i 439–48.

Hilbert, David 1893 „Ueber die vollen Invariantensysteme", *Math. Ann.* 42, 313-373. (*Ges. Abh.* Vol. 2, 287-344.).

Hilbert, David (1923), „Die logischen Grundlagen der Mathematik", *Mathematische Annalen* 88, 151–65.

Hilbert, David Klein, Felix (1985), *Der Briefwechsel David Hilbert Felix Klein (1886–1918), G. Frei ed*, Vandenhoeck & Ruprecht, Goettingen.

Infinitistic methods, Warszawa, Pergamon Press i PWN 1961.

McIntyre, Dale L. "The God-Fearing Life of Leonhard Euler", internet.

McLarty, Colin (2008), "Theology and its discontents: the origin myth of modern mathematics", wersja April 15, 2008, internet.

Noether, Max (1914), „Paul Gordan", *Mathematische Annalen* 75, 1–41.

Olszewski , Adam (2009), *Teza Churcha. Kontekst historyczno-filozoficzny*, Kraków 2009.

Parshall, K.H. (1989) "Towards a History of Nineteenth-Century Invariant Theory", in D.E.

Rowe & J. McCleary (eds.) (1989), *The History of Modern Mathematics* (New York: Academic Press) *Vol.* 1, 157-206.

Prasolov S., *Polynomials*, Springer 2004.

Reid, C. *Hilbert*, Berlin- Heidelberg- New York, 1970.

Rota, G-C. (1999) „Two turning points in the invariant theory", *Math. Intelligencer* 21 (1) (1999) 20-27.

Ruediger, Thiele "Hilbert's Twenty-Fourth Problem", zob. www.maa.org/news/Thiele.pdf

Tichý, Pavel, „Existence and God", *Journal of Philosophy*, 1979

SUMMARY

MATHEMATICS OR THEOLOGY? HILBERT, GORDAN AND THE BEGINNING OF THE FORMALISM

The aim of the article is two-fold: first, to analyse the impact Gordan's problem had on Hilbert's Programme and, secondly, to discuss, mainly from the theological standpoint, Gordan's phrase: ”This is not Mathematics, this is Theology”.