Bernard Bolzano: pierwsze (historycznie) matematyczne ujęcie pojęcia *kontinuum*

Lukas Benedikt Kraus, *Der Begriff des Kontinuums bei Bernard Bolzano*, Beiträge zur Bolzano-Forschung, vol. 25, Academia Verlag, Sankt Augustin 2014, ss. 112

W punkcie wyjścia swej książki Lukas Kraus stwierdza, że pojęcie kontinuum nie tylko zajmuje centralne miejsce w Bolzanowskiej matematyce i filozofii, ale jest również zasadniczym pojęciem nowoczesnej matematyki. Jednakże istnieją bardzo rozbieżne opinie na temat tego, czy Bolzano we wszystkich fazach swojej działalności posługiwał się jednolitą definicją kontinuum. Pochodnym problemem jest to, jak z dzisiejszego punktu widzenia interpretować Bolzanowskie określenia kontinuum.

Celem Krausa jest podanie jednolitej interpretacji istotnych Bolzanowskich określeń kontinuum, a później porównanie jej z nowoczesnym – matematycznym – określeniem kontinuum. Dysponując tymi wynikami chce odnieść się do dotychczasowych interpretacji Bolzanowskiego pojęcia kontinuum.

Dla zrealizowania swych celów Kraus klarownie dzieli tekst na sześć rozdziałów. W pierwszym przedstawia cztery Bolzanowskie określenia pojęcia kontinuum. W drugim analizuje teksty praskiego matematyka i wskazuje, że są one ze sobą spójne, co pozwala mu wyinterpretować Bolzanowską definicję kontinuum. Trzeci rozdział zawiera próbę porównania tej definicji z nowoczesną (Cantor, Hausdorff) matematyczną koncepcją kontinuum. Czwarty rozdział wskazuje, że Bolzano nie traktował kontinuum jedynie jako abstrakcyjnego, matematycznego pojęcia, ale również jako pojęcie zaangażowane metafizycznie w jego filozofię przyrody. Kolejny rozdział zawiera przegląd dotychczasowych interpretacji Bolzanowskich określeń kontinuum i wskazuje na ich wady lub braki. Wreszcie szósty rozdział jest zebraniem cząstkowych wyników poszczególnych rozdziałów. Całość opatrzona jest aneksem, w którym formalnie przedstawione są wyniki trzeciego rozdziału, wykaz symboli logicznych i matematycznych, bibliografię oraz indeks osób.

Lukas Kraus w klarowny sposób pokazuje, że z czterech zasadni-

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce, nr 64 (2018), ss. 195–199

czych fragmentów tekstów Bolzana dotyczących kontinuum daje się wyprowadzić jednolita definicja tego pojęcia: „Kontinuum jest całością złożoną z (przestrzennych, czasowych lub materialnych) punktów, w której dla każdego jej punktu istnieje określona odległość, tak że w tej i każdej mniejszej odległości istnieje punkt należący do tej całości”.

Z tekstów Bolzana wynika też jego definicja punktu izolowanego: „Punktem izolowanym jest punkt całości złożonej z (przestrzennych, czasowych lub materialnych) punktów, dla którego, dla dowolnie wybranej małej odległości istnieje mniejsza odległość, w której nie znajduje się żaden inny punkt tej całości”.

Z owych definicji wynika, że „Kontinuum jest całością złożoną z (przestrzennych, czasowych lub materialnych) punktów, która nie zawiera żadnych punktów izolowanych”.

Autor dokonuje następującej translacji powyższych definicji na język współczesnej matematyki: „Podzbiór A przestrzeni metrycznej nazywa się Bolzanowskim kontinuum, kiedy dla każdego punktu p z A istnieje liczba rzeczywista $\epsilon > 0$, taka że dla wszystkich $\eta \in (o, \epsilon]$ istnieje przynajmniej jeden punkt q z A, który znajduje się od p dokładnie w odległości η”. „Punkt p podzbioru A przestrzeni metrycznej nazywa się punktem izolowanym (w znaczeniu Bolzanowskim) zbioru A, kiedy dla każdej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ istnieje liczba rzeczywista $\eta \in (o, \epsilon)$, taka że żaden punkt z A nie znajduje się w odległości η od p”.

Autor porównuje następnie Bolzanowską z Cantorowską (i nawiązującej do tej ostatniej Hausdorffowską) definicją kontinuum, dokonując przedtem translacji składowych definicji Cantora na język współczesnej matematyki. „Podzbiór A przestrzeni metrycznej nazywa się doskonały, kiedy jest on identyczny ze zbiorem wszystkich punktów skupienia A (czyli jest wszędzie-gęsty i domknięty)”. „Podzbiór A przestrzeni metrycznej nazywa się zwarty, kiedy dla dowolnych dwóch punktów $a, b \in A$ i dla dowolnej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ istnieje skończenie wiele punktów $a = p_1, p_2, \ldots, p_n = b$, gdzie $p_i \in A$, takich, że wszystkie odległości pomiędzy p_i i p_{i+1} są mniejsze od ϵ”.

Następnie autor przypomina Cantorowską definicję kontinuum – są to, przy przyjęciu odpowiedniej translacji, te podzbiory przestrzeni metrycznej, które są doskonałe i zwarte.

Rzecz jasna autor zauważa zasadnicze różnice pomiędzy definicjami kontinuum Bolzana i Cantora. Kontinuum Bolzana nie musi być zbiorem doskonałym, ponieważ definicję Bolzana spełnia np. obustronnie otwarty przedział liczb rzeczywistych (0, 1), niezawierający punktów skupienia tego zbioru 0 i 1. Poza tym kontinuum Bolzana nie musi być zbiorem zwartym, jako przykład służy zbiór punktów dwóch prostych równoległych.

Z tego porównania Lukas Kraus wyprowadza następujące wnioski:

1. Bolzanowskie pojęcie kontinuum jest szersze, niż Cantorowskie i Hausdorffowskie pojęcie kontinuum;
2. Bolzanowskie kontinua nie muszą być ani zwarte ani doskonałe;
3. Bolzanowskie kontinua są zbiorami wszędzie-gęstymi i dzielą tę cechę z kontinuami Cantorowskimi (Hausdorffowskimi);
4. Bolzanowskie pojęcie kontinuum jest węższe niż pojęcie zbioru wszędzie-gęstego;
5. Kontinua Bolzanowskie są zbiorami nieprzeliczalnymi.

Kraus wskazuje na krytykę Cantora Bolzanowskiego określenia kontinuum zawartego w *Paradoksach nieskończoności*. Matematyk z Halle pokazuje w niej, że kontinua Bolzanowskie nie muszą zawierać wszystkich swoich punktów skupienia i mogą być złożone z wielu oddzielonych od siebie, w znaczeniu niezwartych, zbiorów, co, zdaniem twórcy teorii mnogości, nie odpowiada powszechnym intuicjom związanym z pojęciem kontinuum. Jednak Lukas Kraus pokazuje, że krytyka Cantora, przynajmniej w jednym punkcie jest niesłuszna. Odwołuje się do elementów filozofii przyrody (*Naturphilosophie*) Bolzana.

Praski myśliciel twierdził, że obiekty materialne zbudowane są z punktowych atomów dwojakiego rodzaju. Jedne mają charakter materii, inne są atomami eterycznymi. Wszystkich atomów w takim obiekcie jest nieskończenie wiele, dzisiaj powiedziano by, że ich liczba wynosi kontinuum, jednak jest bardzo wątpliwe przypisywanie Bolzanowi świadomości istnienia różnych mocy pozaskończonych. Atomy eteryczne przedmiotu materialnego tworzą Bolzanowskie kontinuum. Atomy materialne to niektóre punkty skupienia przedmiotu materialnego rozumianego jako zbiór punktów. Owe atomy materialne – i tylko one – są źródłami sił, które organizują wokół punktów materialnych atomy eteryczne. Ponieważ zorganizowane wokół danego punktu materialnego zbiory punktów eterycznych posiadają miarę różną od 0, to punktów materialnych w obiektach materialnych może być tylko skończenie wiele.

Trzeba przypomnieć jeszcze, że Kraus pokazał, iż Bolzanowskie kontinua to nie są zbiory obiektów abstrakcyjnych, ale całości punktów czasowych, przestrzennych lub tworzących przedmioty materialne. Lukas Kraus wskazał, że koncepcja kontinuum Bolzana była zbudowana na potrzeby charakterystyki zbioru punktów eterycznych w obiekcie materialnym, który to zbiór, w jego filozofii przyrody, nie zawierał wszystkich swoich punktów skupienia. Koncepcja kontinuum Bolzana nie była błędna (nieodpowiadająca powszechnym intuicjom wiązanym z kontinuum), ale dostosowana do potrzeb formułowanych przez niego tez filozoficznych. Kraus przyznaje jednocześnie bardzo rzetelnie, że nie można rozstrzygnąć, czy dopuszczony przez Bolzana brak zwartości kontinuów był zamierzony, czy też nie.

Omawiając dalej kwestię dziejów interpretacji Bolzanowskiego pojęcia kontinuum, Kraus zauważa, że wszystkie one były zależne od przedstawionej wyżej krytyki Cantora i nikt nie zwrócił uwagi na zależność koncepcji kontinuum matematyka z Pragi od jego filozofii przyrody. Co więcej, jak stwierdza Kraus, zdarzały się interpretacje, które nawiązywały przede wszystkim do krytycznego komentarza Cantora, a mniej do tekstów Bolzana, albo też opierały się na wadliwym ich odczytaniu.

Praca Lukasa Krausa jest bardzo rzetelna. Opiera się na tekstach źródłowych. Kraus dokonuje bardzo wnikliwej analizy czterech podstawowych opisów kontinuum pozostawionych przez Bolzana i wykazuje, że można z nich wydobyć jednolitą definicję owego pojęcia. Autor przedstawia przekonującą translację definicji Bolzana na współczesny język matematyki. Pozwala mu to dokonać porównania koncepcji Bolzana z – przede wszystkim – koncepcją Cantora. Kraus wykazuje, że odmienność definicji Bolzana wynika z jego swoistej filozofii przyrody, w której angażuje on pojęcie kontinuum. Poza tym Kraus, niejako na marginesie, przypomina, że to Bolzanowska koncepcja stoi na początku linii rozwojowej, która została zwieńczona współczesnym topologicznym określeniem kontinuum – bardzo ważnego pojęcia dzisiejszej matematyki.

Myśl książki jest przedstawiona bardzo klarownie, wszystkie potrzebne pojęcia są wcześniej zdefiniowane. W aneksie wszystkie definicje przedstawione są w języku formalnym. Klarowny przekaz, oparcie tekstu na źródłach i zaprezentowane wnioski wprowadzają porządek w powikłane dzieje rozumienia Bolzanowskiej koncepcji kontinuum. Praca Krausa stanowi istotny element we współczesnych badaniach dorobku Bolzana.

Warto jeszcze przypomnieć, że książka ukazała się w serii *Beiträge zur Bolzano-Forschung*, w której zaprezentowano szereg wartościowych analiz matematyki, logiki i filozofii Bolzana. Należy spodziewać się kolejnych prac. Ogromna część wielkiego spadku piśmienniczego Bolzana przetrwała tylko w rękopisach. Dopiero ostatnie dziesięciolecia przynoszą książkowe wydania rękopisów. Dlatego wiele tekstów Bolzana wymaga jeszcze analiz, które wzbogacą wiedzę dotyczącą niezwykle wszechstronnego dorobku myśliciela z Pragi.

Jerzy Dadaczyński