Rozważania kosmologiczne na temat ogólnej teorii względności

Albert Einstein

Z niemieckiego oryginału tłum. Robert Janusz[1]

[1] Podstawą tłumaczenia było pierwsze wydanie pracy: A. Einstein, „Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie”, *Sitzung der Physikalisch-mathematischen Klasse vom 8. Februar 1917*, „Sitzungsberichte der Preußischen Akad. d. Wissenschaften, 1917”, s. 142–152; wersja cyfrowa jest dostępna online <http://adsabs.harvard.edu/abs/1917SPAW.......142E>. Tłumaczenie było również konfrontowane z przekładem angielskim: A. Einstein, „Cosmological considerations on the general theory of relativity”. W: [A.] Einstein, H.A. Lorentz, H. Weyl, H. Minkowski, *The principle of relativity. A collection of original papers on the special and general theory of relativity. Notes by A. Sommerfeld*. Mineola, NY: Dover Publications, Inc., 1952 (published by Methuen and Company, Ltd. 1923). Artykuł jest dostępny w Internecie pod adresem: <http://nausikaa2.mpiwg-berlin.mpg.de/ cgi-bin/ toc/ toc.x.cgi?dir= S250UZ0K& step=thumb> [oryginał niemiecki] (dn. 22 VI 2010) oraz <http://books.google.com/ books?id= yECokhzsJYIC> [przekład ang.] (dn. 25 VI 2010).
Do tekstu wprowadzono drobne zmiany redakcyjne związane z koniecznością dostosowania go do wymogów ZFN. Uzupełnienia tekstu podano w nawiasach kwadratowych.

Jest dobrze znane, że Poissonowskie równanie różniczkowe[2]:

$$\Delta\phi = 4\pi K\rho \qquad (1)$$

w połączeniu z równaniem ruchu punktu materialnego, nie zastępuje jeszcze całkowicie Newtonowskiej teorii oddziaływania na odległość. Musi się jeszcze dołączyć warunek, że w przestrzennej nieskończoności potencjał ϕ dąży do skończonej wartości granicznej. Podobnie zachowuje się on w teorii grawitacji ogólnej teorii względności; także tutaj do równań różniczkowych muszą być dołączone warunki brzegowe w przestrzennej nieskończoności, gdyby rzeczywiście rozważać wszechświat[3] przestrzennie rozległy w nieskończoność.

Przy opracowaniu zagadnienia planetarnego wybrałem te warunki brzegowe w formie następującego założenia[4]: Jest możliwe, ażeby tak wybrać układ odniesienia, aby wszystkie potencjały grawitacyjne $g_{\mu\nu}$ były stałe w przestrzennej nieskończoności. Nie jest jednak *a priori* całkiem oczywiste, że można wyznaczyć te same warunki brzegowe, gdy się chce uwzględnić[5] większe części fizycznego wszechświata[6]. W dalszej części

[2] W przekładzie ang.: „*Poisson's equation* [...] $\nabla^2\phi = 4\pi K\rho$ [...]" (s. 177). W języku polskim używa się niejednoznacznie określenia „równanie Poissona"; $\Delta = \nabla^2$.

[3] Niem. *Welt*: świat; *passim*.

[4] Niem. *Annahme*: przyjęcie, hipoteza, przesłanka, założenie, przypuszczenie.

[5] Niem. *ins Auge fassen*: rozważyć, przewidzieć, brać pod uwagę.

[6] Niem. *Körperwelt*: świat cielesny, świat fizyczny.

będą podane przemyślenia, do których dotąd doszedłem odnośnie tego zasadniczo ważnego problemu.

§ 1. Teoria Newtonowska

Jest dobrze znane, że Newtonowski warunek brzegowy stałej granicy ϕ w przestrzennej nieskończoności prowadzi do konkluzji[8], że gęstość materii [spada] w nieskończoności do zera. Przypuśćmy mianowicie, że można by znaleźć w przestrzeni kosmicznej takie miejsce, wokół którego pole grawitacyjne materii posiada, wielkoskalowo [*im großen betrachtet*], symetrię sferyczną (środek). Zatem z równania Poissonowskiego wynika, że średnia gęstość ρ musi zatem, z rosnącą odległością r od środka, spadać szybciej do zera niż $\frac{1}{r^2}$, tak aby ϕ osiągnęło w nieskończoności jakąś granicę[9]. W tym sensie, według Newtona, wszechświat jest także skończony, mimo tego, że może posiadać nieskończenie wielką masę całkowitą[10].

Stąd wynika następnie, że część promieniowania emitowanego przez ciała niebieskie opuści Newtonowski wszech-

[7] Niem. *prinzipiell wichtige Frage*.
[8] Niem. *Auffassung*: zapatrywanie, zdanie, pogląd, ujęcie, wniosek.
[9] ρ jest średnią gęstością materii wytworzoną [*gebildet*] w przestrzeni, która jest wielka w porównaniu z odległością sąsiednich gwiazd stałych, ale mała w porównaniu z rozmiarami całej galaktyki [*Sternsystem*] – przyp. A. Einsteina.
[10] Tekst niem.: *In diesem Sinne ist also die Welt nach Newton endlich, wenn sie auch unendlich große Gesamtmasse besitzen kann* (s. 143).

świat radialnie na zewnątrz, i potem zaniknie w nieskończoności, tracąc oddziaływanie. Czy nie można by podobnie rozważyć również wszystkich ciał niebieskich? Jest prawie niemożliwe zaprzeczyć temu pytaniu. *Nota bene*[11] z warunku skończonej granicy dla ϕ w przestrzennej nieskończoności wynika, że ciało niebieskie obdarzone skończoną energią kinetyczną może osiągnąć przestrzenną nieskończoność, przezwyciężając Newtonowskie siły przyciągające. Ten przypadek musi, zgodnie z mechaniką statystyczną, dotąd zachodzić, dopóki całkowita energia galaktyki jest wystarczająco wielka, aby – przeniesiona na tylko jedno ciało niebieskie – pozwoliła mu oddalić się do nieskończoności, z której nigdy więcej nie będzie mogło powrócić.

Można by próbować szukać ucieczki od tego swoistego[12] problemu przez przyjęcie, że ów potencjał graniczny ma w nieskończoności jakąś bardzo wielką wartość. To byłby sposób do przejścia, gdyby przebieg potencjału grawitacyjnego nie musiał być samouwarunkowany [*selbst bedingt*] przez ciała niebieskie. Zaprawdę będziemy zmuszeni koniecznie przyjąć, że jest sprzeczne z faktami pojawienie się[13] znacznych różnic potencjałów pola grawitacyjnego. One muszą być raczej mniejszego rzędu wielkości, tak aby generowane przez nie prędkości gwiazd nie przekraczały [prędkości] rzeczywiście obserwowanych.

[11] Niem. *denn*: ponieważ, albowiem, więc.

[12] Niem. *eigentümlich*: osobliwy, dziwny, charakterystyczny, szczególny, specyficzny, typowy.

[13] Niem. *Auftreten*: występowanie, zachodzenie, zachowanie się.

Przez zastosowanie do gwiazd Boltzmannowskiego prawa rozkładu dla cząsteczek gazu, w ten sposób, że porówna się galaktykę z gazem o stacjonarnym ruchu cieplnym, wynika, że Newtonowska galaktyka w ogóle nie mogłaby istnieć. *Nota bene* skończonej różnicy potencjałów między środkiem a przestrzenną nieskończonością odpowiada skończony stosunek gęstości. Zanik gęstości w nieskończoności pociąga za sobą także zanik gęstości w środku.

Chyba nie da się tych trudności pokonać na gruncie teorii Newtonowskiej. Można sobie postawić pytanie, czy da się je wyeliminować przez jakąś modyfikację teorii Newtonowskiej. Na razie[14] podamy tu na to taki sposób, który nie domaga się, by go brać poważnie; on posłuży tylko do tego, aby dało się lepiej uwydatnić to, co następuje [potem]. W miejsce równania Poissonowskiego wstawiamy:

$$\Delta\phi - \lambda\phi = 4\pi K\rho, \tag{2}$$

gdzie λ oznacza jakąś uniwersalną stałą[15]. Jeśli ρ_0 jest (równomierną) gęstością rozkładu masy, wtedy:

$$\phi = -\frac{4\pi K}{\lambda}\rho_0 \tag{3}$$

[14] Niem. *zunächst*: najpierw, po pierwsze, na razie.
[15] Przekład ang.: $\nabla^2\phi - \lambda\phi = 4\pi\kappa\rho$ [...] (s. 179; zamiana K z równania (1) na κ; tu i *passim*).

jest rozwiązaniem równania (2). To rozwiązanie odpowiadałoby takiemu przypadkowi, że materia gwiazd stałych byłaby równomiernie rozłożona w przestrzeni, przy czym gęstość ρ_0 byłaby równa rzeczywistej średniej gęstości materii w kosmosie. Rozwiązanie to odpowiada nieskończonej rozciągłości przestrzeni w środku równomiernie wypełnionej materią. Jeśli pomyśli się, bez jakiejkolwiek zmiany średniego rozkładu gęstości, materię lokalnie rozłożoną nierównomiernie, wtedy na stałą wartość ϕ z równania (3) będzie nakładać się dodatkowe ϕ, które w pobliżu gęstszych mas jest tym bardziej podobne do pola Newtonowskiego, im λ_ϕ[16] jest mniejsze w porównaniu z $4\pi K\rho$.

Tak uzyskany wszechświat nie miałby, odnośnie do pola grawitacyjnego, żadnego środka. Nie musiałoby się przyjmować spadku gęstości w przestrzennej nieskończoności, lecz zarówno średni potencjał, jak też średnia gęstość byłyby stałe aż do nieskończoności. Konflikt z mechaniką statystyczną, występujący[17] w teorii Newtonowskiej, jest tu nieobecny. Dla określonej (niezwykle małej) gęstości materia jest w równowadze, bez tego, aby były konieczne dla tej równowagi wewnętrzne siły materii (ciśnienie).

16 Przekład ang.: $\lambda\phi$.

17 Niem. *konstatieren*: stwierdzić, zauważyć, nadmienić, dobitnie powiedzieć.

§ 2. Warunki brzegowe odpowiednie dla ogólnej teorii względności

Poniżej wprowadzam czytelnika na przebytą już przeze mnie osobiście, trochę pośrednią i wyboistą drogę, gdyż tylko tak mogę mieć nadzieję, że okaże on zainteresowanie końcowym rezultatem. Dochodzę mianowicie do wniosku, że przedstawiane przeze mnie dotąd równania pola grawitacyjnego wymagają jeszcze drobnej [*kleinen*] modyfikacji, tak aby, na podstawie ogólnej teorii względności, uniknąć owych zasadniczych trudności, które przedstawiliśmy w poprzednim paragrafie dla teorii Newtonowskiej. Ta modyfikacja odpowiada całkowicie przejściu od równania Poissonowskiego (1) do równania (2) poprzedniego paragrafu. W końcu okazuje się, że warunki brzegowe w przestrzennej nieskończoności w ogóle odpadają, gdyż kontinuum wszechświata, odnośnie swojej przestrzennej rozciągłości, ujmuje się jako zamkniętą w sobie, skończoną przestrzennie (trójwymiarową) objętość.

Opinia, pielęgnowana przeze mnie do niedawna, odnośnie do ustalenia warunków brzegowych dla przestrzennej nieskończoności, opierała się na następujących rozważaniach. W wewnętrznie spójnej[18] teorii relatywistycznej nie może być bezwładności w z g l ę d e m „przestrzeni", lecz jedynie bezwładność w z g l ę d e m mas[19]. Gdy z tego miejsca jakąś masę

[18] Niem. *konsequent*: logicznie nieodparty, niezłomny.
[19] Tekst niem.: *nur eine Trägheit der Massen g e g e n e i n a n d e r* (s. 145).

odsunę od wszystkich innych mas wszechświata przestrzennie wystarczająco [daleko], przez to jej bezwładność musi spaść do zera. Spróbujemy sformułować ten warunek matematycznie.

Według ogólnej teorii względności (ujemny) pęd jest dany przez trzy pierwsze składowe, energia przez ostatnią składową kowariantnego tensora, pomnożone przez $\sqrt{-g}$:

$$m\sqrt{-g}\, g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds} \tag{4}$$

przy czym, jak zawsze, podstawiamy:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu. \tag{5}$$

W szczególnie przejrzystym przypadku, kiedy można tak wybrać układ współrzędnych, że pole grawitacyjne w każdym punkcie jest przestrzennie izotropowe, otrzymuje się prostsze:

$$ds^2 = -A(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + Bdx_4^2.$$

Jeśli jeszcze równocześnie:

$$\sqrt{-g} = 1 = \sqrt{A^3B},$$

wtedy, dla małych prędkości, otrzymuje się z (4), w pierwszym przybliżeniu, składowe pędu:

$$m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_1}{dx_4} \quad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_2}{dx_4} \quad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_3}{dx_4}$$

i energię (w przypadku spoczynku):

$$m\sqrt{B}$$

Z wyrażeń na pęd wynika, że $m\frac{A}{\sqrt{B}}$ odgrywa rolę bezwładnej masy[20]. Jeśli *m* jest stałą właściwą masie w punkcie [*Massenpunkt*], niezależnie od jego położenia, to wtedy to wyrażenie, przy zachowaniu warunku na wyznacznik, może tylko wtedy zaniknąć w przestrzennej nieskończoności, gdy *A* dąży do zera, podczas gdy *B* wzrasta w nieskończoność[21]. Wydaje się także, iż postulat względności każdej bezwładności wymaga takiej degeneracji współczynników $g_{\mu\nu}$. To żądanie pociąga za sobą, że energia potencjalna $m\sqrt{B}$ punktu w nieskończoności staje się nieskończenie wielka. Zatem punkt materialny [*Massenpunkt*] może nigdy nie opuścić układu; szczegółowe badanie pokazuje, że to samo powinno obowiązywać dla promieni świetlnych. System wszechświata, z takim zachowaniem się potencjałów grawitacyjnych w nieskończoności, nie byłby także narażony

20 Tekst niem.: [...] *die Rolle der trägen Masse spielt* (s. 145); przekład ang.: *the rest mass* (s. 181; masa spoczynkowa).

21 Tekst niem.: *Da meine dem Massenpunkt unabhängig von seiner Lage eigentümliche Konstante ist, so kann dieser Ausdruck unter Wahrung der Determinantenbedingung im räumlich Unendlichen nur dann verschwinden, wenn A* [...] (s. 145); przekład ang.: *As m is a constant peculiar to the point of mass, independently of its position, this expressionn, if we retain the condition* $\sqrt{g-} = 1$ *(sic!) at spatial infinity, can vanish only when A* [...] (s. 181).

na niebezpieczeństwo, jak ten niedawno omówiony dla teorii Newtonowskiej.

Nadmieniam, że te uproszczone założenia dotyczące potencjałów grawitacyjnych, które położyliśmy u podstaw tych rozważań, zostały wprowadzone jedynie ze względu na przejrzystość. Można znaleźć ogólne sformułowania dla zachowania się $g_{\mu\nu}$ w nieskończoności, które wyrażają istotę rzeczy bez dalszych ograniczających założeń.

Więc [*nun*] przebadałem, z uprzejmą pomocą matematyka J. Grommera, środkowo symetryczne, statyczne pola grawitacyjne, które na wspomniany sposób degenerują się w nieskończoności. Po przyjęciu[22] potencjałów grawitacyjnych $g_{\mu\nu}$, na podstawie równań pola grawitacyjnego został z nich obliczony tensor energii materii $T_{\mu\nu}$. Ale przy tym okazało się, że dla galaktyki gwiazd stałych [*Fixsternsystem*] tego rodzaju warunki brzegowe zupełnie nie mogłyby wchodzić w grę, jak także niedawno słusznie wykazał[23] astronom de Sitter.

Kontrawariantny tensor energii $T^{\mu\nu}$ ważkiej materii jest mianowicie dany przez[24]:

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \qquad (5)$$

[22] Tekst niem: *Die Gravitationspotentiale wurden angesetzt [...] berechnet* (s. 146); niem. *ansetzen*: przykładać, podchodzić, utwierdzić, ustalić.

[23] Niem. *herforheben*: podkreślać, uwydatniać.

[24] *sic!* s. 146 (5); równanie (5) było zdefiniowane na s. 145.

gdzie ρ oznacza zmierzoną naturalną gęstość materii. Przy stosownym wyborze układu współrzędnych prędkości gwiazd są bardzo małe w porównaniu do prędkości światła. Dlatego można zastąpić ds przez $\sqrt{g_{44}dx_4}$. Przy tym [można] rozpoznać, że wszystkie składowe $T^{\mu\nu}$, w porównaniu do ostatniej składowej T^{44}, muszą być bardzo małe. Jednak tego warunku nie dało się bynajmniej połączyć z wybranymi warunkami brzegowymi. Poza tym wydaje się, że ten wynik nie jest zaskakujący. Fakt, że prędkości gwiazd są małe, pozwala stwierdzić, że tam, gdzie są gwiazdy stałe, tam nigdzie potencjał grawitacyjny (w naszym przypadku $\sqrt{B}$) nie może być znacznie większy niż u nas[25]; to wynika z rozważań statystycznych dokładnie [tak], jak w przypadku teorii Newtonowskiej. W każdym razie nasze rachunki doprowadziły mnie do przekonania, że nie wolo żądać tego rodzaju warunków degenerujących $g_{\mu\nu}$ w przestrzennej nieskończoności.

Po niepowodzeniu tej próby [można] zaproponować dwie.

a) Można żądać, jak przy zagadnieniu planetarnym, żeby w przestrzennej nieskończoności $g_{\mu\nu}$, przy odpowiednim wyborze układu odniesienia, zbliżały się do wartości:

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

25 Niem: *bei uns*; przekład ang.: *here on earth* [tu na Ziemi].

b) Można wcale nie stawiać żadnych ogólnej ważności wymaganych warunków brzegowych na przestrzenną nieskończoność[26]; w każdym poszczególnym przypadku trzeba podawać $g_{\mu\nu}$ w przestrzennej granicy rozważanego obszaru, tak jak dotąd zwykło się podawać osobno czasowe warunki początkowe.

Możliwość b nie odpowiada żadnemu rozwiązaniu problemu, lecz rezygnacji z jego rozwiązania. To jest bez wątpienia stanowisko, które przyjmuje obecnie de Sitter[27]. Jednak muszę przyznać, że trudno mi przychodzi, aby tak dalece rezygnować w tej zasadniczej sprawie. Zdecydowałbym się na to dopiero wtedy, gdyby wszystkie wysiłki posuwające naprzód właściwy[28] pogląd [*Auffassung*], okazałyby się daremne.

Możliwość a jest pod wieloma względami niezadowalająca. Po pierwsze, takie warunki brzegowe zakładają określony wybór układu odniesienia, co jest przeciwne duchowi zasady względności. Po drugie, przyjmując ten pogląd, rezygnuje się z żądania, aby była spełniona względność bezwładności. Bezwładność punktu materialnego [*Massenpunktes*] o zmierzonej naturalnej masie *m* zależy mianowicie od $g_{\mu\nu}$; te jednak tylko niewiele różnią się od podanych żądanych wartości dla przestrzennej nieskończoności. Zatem materia (będąca w skończo-

[26] Tekst niem.: *Man stellt überhaupt keine allgemeine Gültigkeit beanspruchenden Grenzbedingungen auf für das räumlich Unendliche;* (s. 147).
[27] De Sitter, Akad. van Wetensch. Te Amsterdam, 8 XI 1916.
[28] Niem. *befriedigend*: zadowalający, dopuszczalny, odpowiedni, wystarczający, dostateczny.

ności) wprawdzie ma bezwładność, ale nie[29] jej. Gdyby istniał jeden jedyny punkt materialny [*Massenpunkt*], wtedy posiadałby on, według tego sposobu rozumienia [*Auffassungsweise*], bezwładność, i to prawie równej wielkości, jak w przypadku, gdyby był on otoczony pozostałymi masami naszego rzeczywistego świata. W końcu, przeciw temu poglądowi są wszystkie statystyczne wątpliwości, do których można dojść [*geltend zu machen*], które były podane wyżej dla teorii Newtonowskiej.

Z tego, co dotąd powiedziano wynika, że nie udało mi się postawić warunków brzegowych dla przestrzennej nieskończoności. Mimo to, istnieje jeszcze możliwość poradzenia sobie[30], bez rezygnacji podanej w b. Gdyby mianowicie było możliwe rozważyć wszechświat jako kontinuum zamknięte w s w o j e j p r z e s t r z e n n e j r o z c i ą g ł o ś c i[31], wtedy nie byłyby w ogóle potrzebne żadne tego rodzaju warunki brzegowe. Poniżej okaże się, że zarówno ogólne żądanie relatywistyczne, jak i fakt małych prędkości światła dadzą się pogodzić z hipotezą przestrzennej zamkniętości całości wszechświata[32]; jednak [*allerdings*] do wyrażenia tej myśli będzie potrzebna uogólniająca modyfikacja równań pola grawitacyjnego.

---

[29] Niem. *bedingen*: powodować, przyczyniać się, uzależniać, warunkować, wymagać.

[30] Niem. *auskommen*: żyć w zgodzie, radzić sobie.

[31] Tekst niem.: [...] *die Welt als ein Kontinuum* [...] (s. 148).

[32] Tekst niem.: [...] *Geschlossenheit des Weltganzen* [...] (s. 148).

§ 3. Świat zamknięty przestrzennie z równomiernym rozkładem materii

Charakterystyka metryczna (krzywizna) czterowymiarowego kontinuum czasoprzestrzennego jest określona, zgodnie z ogólną teorią względności, w każdym punkcie przez tamże znajdującą się materię i jej stan. Struktura metryczna tego kontinuum musi koniecznie, z powodu nierównomiernego rozkładu materii, być niezmiernie zawikłana. Jeśli nam jednak chodzi jedynie o strukturę wielkoskalową [*im großen*], powinniśmy sobie wyobrazić materię jako rozpostartą [rozproszoną] równomiernie w ogromnej przestrzeni, tak że jej rozkład gęstości będzie funkcją zmieniającą się niezmiernie powoli. Postępujemy tutaj[33] prawie jak geodeci, którzy przybliżają elipsoidą niezmiernie skomplikowanie ukształtowaną w małych rozmiarach zewnętrzną powierzchnię Ziemi.

Najważniejsze, co wiemy z doświadczenia o rozkładzie materii, jest to, że względne prędkości gwiazd są bardzo małe w porównaniu z prędkością światła. Dlatego wydaje mi się[34], że wolno nam na razie [*fürs erste*] przyjąć za podstawowe [*zugrunde legen*] następujące przybliżone założenie [*Annahme*] naszego rozważania: Jest dany układ współrzędnych, względem którego można uważać [*ansehen als*] materię za trwającą w spo-

33 Tekst niem.: *Wir gehen damit ählich vor* [...] (s. 148).

34 Tekst niem.: *ich glaube deshalb* (s. 148; niem. *glauben*: wierzyć, myśleć, sądzić, zdawać się).

czynku. Względny wobec niego[35] jest także kontrawariantny tensor energii $T^{\mu\nu}$ materii, zgodnie z (5), o prostej formie:

$$\left.\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Skalar ρ (średniej) gęstości rozkładu może być *a priori* funkcją przestrzennych współrzędnych. Jeśli jednak założymy, że wszechświat jest w sobie zamknięty, prawdopodobna jest hipoteza [*so liegt die Hypothese nahe*], że ρ powinno być niezależne od położenia; to przyjmujemy za podstawowe dla tego, co [dalej] następuje[36].

Co się tyczy [*was... anlangt*] pola grawitacyjnego, to z równania ruchu punktu materialnego[37]:

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} + \left\{\begin{matrix}\alpha\beta \\ \nu\end{matrix}\right\} \frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0$$

wynika, że punkt materialny w statycznym polu grawitacyjnym tylko wtedy może pozostawać w spoczynku, gdy g_{44} nie zależy od położenia. Dlatego dalej zakładamy, dla wszystkich wielkości, niezależność od współrzędnej czasowej x_4, zatem możemy żądać dla szukanego rozwiązania, aby dla wszystkich x_ν było:

---

35 Niem. *Relativ zu diesem*; [tensor] w tym właśnie układzie.

36 Tekst niem.: [...] *diese legen wir dem Folgenden zugrunde* (s. 149).

37 Człon: należy rozumieć jako: .

$$g_{44} = 1. \tag{7}$$

Jak zawsze przy problemach statystycznych, trzeba przyjąć dalej, że:

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0 \tag{8}$$

Chodzi teraz jeszcze o wyznaczenie tych wszystkich składowych potencjałów grawitacyjnych, które określają czysto przestrzenno-geometryczne zachowanie się naszego kontinuum (g_{11}, g_{12} ... g_{33}). Z naszego założenia o równomierności [*Gleichmäßigkeit*] rozkładu mas wytwarzających pole wynika, że także krzywizna szukanej przestrzeni[38] musi być stała. Dla takiego rozkładu mas także poszukiwane zamknięte kontinuum x_1, x_2, x_3 przy stałym x_4 będzie także przestrzenią sferyczną.

Do osiągnięcia tego [stwierdzenia] dochodzimy np. w następujący sposób. Wychodzimy z przestrzeni Euklidesowej ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 o czterech wymiarach, z elementem liniowym $d\sigma$; jest zatem:

$$d\sigma^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2. \tag{9}$$

W tej przestrzeni rozważamy hiperpowierzchnię:

$$R^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 , \tag{10}$$

[38] Niem. *Meßraumes*: przestrzeń podlegająca pomiarom.

gdzie R oznacza stałą. Punkty tej hiperpowierzchni tworzą trójwymiarowe kontinuum, przestrzeń sferyczną o promieniu krzywizny R.

Ta czterowymiarowa przestrzeń Euklidesowa, od której wychodzimy, służy tylko do wygodnej definicji naszej hiperpowierzchni. Interesują nas jedynie punkty tej ostatniej, których własności metryczne powinny zgadzać się z tymi, [które ma] fizyczna przestrzeń o równomiernym rozkładzie materii. Do opisu tego trójwymiarowego kontinuum możemy posłużyć się współrzędnymi ξ_1, ξ_2, ξ_3, (rzut na hiperpłaszczyznę $\xi_4 = 0$), tak aby, zachowując [*vermöge*] (10), można wyrazić ξ_4 przez ξ_1, ξ_2, ξ_3. Przez wyeliminowanie ξ_4 z (9), otrzymuje się, dla elementu liniowego przestrzeni sferycznej, wyrażenie:

$$\left.\begin{aligned} d\sigma^2 &= \gamma_{\mu\nu} d\xi_\mu d\xi_\nu \\ \gamma_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} + \frac{\xi_\mu \xi_\nu}{R^2 - \rho^2} \end{aligned}\right\}, \qquad (11)$$

gdzie przyjmuje się $\delta_{\mu\nu} = 1$, gdy $\mu = \nu$, $\delta_{\mu\nu} = 0$, gdy $\mu \neq \nu$ i $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3$. Tak wybrane współrzędne są zadowalające, gdy chodzi o badanie otoczenia jednego z punktów $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$.

Teraz mamy także dany element liniowy[39] szukanego czasoprzestrzennego [*raum-zeitlichen*] czterowymiarowego wszech-

[39] Tekst niem.: *Linsenelement* (s. 150; element soczewkowy [obiektywu], zapewne błąd w druku, miałoby być: *Linienelement*: element liniowy); przekład ang.: *linear element* (s. 185; element liniowy).

świata. Musimy podstawić [*wir haben... zu setzen*] jawnie [*offenbar*] za potencjały $g_{\mu\nu}$, których oba indeksy różnią się od 4:

$$g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right), \tag{12}$$

które [to] równanie, w połączeniu z (7) i (8), zupełnie określa zachowanie miarek [długości] [*Maßstäben*], zegarów i promieni świetlnych w rozważanym czterowymiarowym wszechświecie.

§ 4. O dodatkowym członie dodanym do równań pola grawitacyjnego[40]

Zaproponowane przeze mnie równania pola grawitacyjnego dla dowolnie wybranego układu współrzędnych mają postać[41]:

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) \\ G_{\mu\nu} &= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix} \\ &\quad + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

40 Tekst niem.: *Über ein an den Feldgleichungen der Gravitation anzubringendes Zusatzglied* (s. 150; warto przytoczyć w oryginale ten historyczny tytuł).

41 *Lauten*; przekład ang. zamienia $\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}$ na $\{\mu\nu, \alpha\}$ itd. oraz lg na log; warto zwrócić uwagę, że tekst niem. ma teraz $\varkappa$, podczas gdy przekład ang. zachowuje też tutaj κ.

Układ równań (13) wcale nie jest spełniony, gdy wstawi się za $g_{\mu\nu}$ wartości podane w (7), (8) i (12) i za (kontrawariantny) tensor energii materii wartości podane w (6). W następnym paragrafie będzie podane, jak przeprowadzić wygodnie ten rachunek. Jeśli ma być pewne, że równania pola (13), dotąd przeze mnie używane, byłyby jedynymi dającymi się pogodzić z postulatem ogólnej względności, to zapewne musielibyśmy wnioskować [*wohl schließen*], że teoria względności nie dopuszcza hipotezy o przestrzennym zamknięciu wszechświata.

Układ równań (14)[42] umożliwia jednakże oczywiste rozszerzenie dające się pogodzić z postulatem względności, które jest zupełnie analogiczne do rozszerzenia równania Poissonowskiego podanego przez równanie (2). Możemy mianowicie dodać z lewej strony równania pola (13) fundamentalny tensor $g_{\mu\nu}$ pomnożony przez prowizoryczną, nieznaną uniwersalną stałą $-\lambda$, bez naruszenia przez to ogólnej kowariancji; w miejsce równania pola (13) wstawiamy:

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right). \qquad \text{(13a)}$$

Także to równanie pola jest w każdym razie zgodne, przy dostatecznie małej λ, z faktami doświadczalnymi uzyskanymi w Układzie Słonecznym. Spełnia [*befriedigt*] ono także prawa zachowania pędu i energii, gdyż (13a) osiąga się w miejsce (13),

[42] Najprawdopodobniej błąd (w przekładzie ang. także jest: (14)); chodzi bowiem nadal o (13).

gdy zamiast skalaru tensora Riemannowskiego wprowadzi się do zasady Hamiltonowskiej ten skalar pomnożony przez uniwersalną stałą, [do] zasady, która gwarantuje już ważność praw zachowania[43]. To, że równanie pola (13a) daje się pogodzić z naszym podejściem [*Ansätzen*] odnośnie pola i materii, zostanie pokazane poniżej.

§ 5. Przeprowadzenie rachunku. Wynik

Skoro wszystkie punkty naszego kontinuum są równoważne, wystarczy przeprowadzić rachunki dla j e d n e g o punktu, np. jednego z dwóch punktów o współrzędnych
$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Wtedy dla $g_{\mu\nu}$ w (13a) wszędzie trzeba wstawić wartości:

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

gdzie one tylko raz lub wcale dadzą się zróżniczkować [*differenziert erscheinen*]. Tak otrzymuje się po pierwsze:

[43] „Skalar tensora" nie jest najlepszym sformułowaniem.

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\nu \\ 1\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\nu \\ 2\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\nu \\ 3\end{bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

Łatwo stąd otrzymać, przy uwzględnieniu [*mit Rücksicht auf*] (7), (8) i (13), że wszystkie równania (13a) dają się spełnić, gdy zachodzą obie relacje:

$$\begin{aligned} -\tfrac{2}{R^2} + \lambda &= -\tfrac{\varkappa\rho}{2} \\ -\lambda &= -\tfrac{\varkappa\rho}{2} \end{aligned}$$

lub

$$\lambda = \frac{\varkappa\rho}{2} = \frac{1}{R^2}. \tag{14}$$

Nowo wprowadzona uniwersalna stała λ oznacza także zarówno średni rozkład gęstości ρ, jaki może pozostać w równowadze, jak też promień R przestrzeni sferycznej i jej objętość $2\pi^2 R^3$. Całkowita masa wszechświata M jest według naszego ujęcia skończona, równa mianowicie[44]:

$$M = \rho \cdot 2\pi^2 R^3 = 4\pi^2 \frac{R\cdot}{\varkappa\cdot} = \frac{\sqrt{32\pi^2}}{\sqrt{\varkappa^3\rho}}. \tag{15}$$

Teoretyczny wniosek [*Auffassung*] [dla] rzeczywistego wszechświata, gdyby on odpowiadał naszym rozważaniom, byłby zatem następujący. Charakter krzywizny [*Krümmung-*

[44] Przekład ang. zamiast ostatniego wzoru podaje: $\pi^2\sqrt{\frac{32}{\kappa^3\rho}}$ (s. 187; niezgodność).

scharakter] przestrzeni jest, zależnie od [*nach Maßgabe*] rozkładu materii, zmienny w czasie i miejscu, pozwala się jednak wielkoskalowo przybliżyć przez przestrzeń sferyczną. W każdym razie jest to wniosek logicznie wolny od sprzeczności i, z punktu widzenia ogólnej teorii względności, najbardziej oczywisty; czy on, z punktu widzenia dzisiejszej wiedzy astronomicznej [*aus betrachtet*], jest solidny, nie tutaj powinno się to zbadać. Aby dojść do tego wolnego od sprzeczności wniosku, musieliśmy oczywiście wprowadzić nowe, nieuzasadnione przez naszą faktyczną wiedzę o grawitacji, rozszerzenie równań pola grawitacyjnego. Trzeba jednakże podkreślić, że dodatnia krzywizna przestrzeni [powodowana] przez będącą w niej materię, wynika [*resultiert*] także wtedy, gdy ów człon dodatkowy nie będzie wprowadzony; ten ostatni był nam potrzebny tylko po to, aby umożliwić *quasi*-statyczny rozkład materii, co odpowiada faktowi małych prędkości gwiazd[45].

Wydano 15 lutego [1917 r].

[45] Warto przytoczyć tekst niem.: [λ] *das letztere haben wir nur nötich, um eine quasi-statische Verteilung der Masse zu ermöglichen, wie es der Tatsache der kleinen Sterngeschwindigkeiten entspricht* (s. 152).