Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XXXVII (2005), 98–118

Dominique Lambert
Facultés Univesritaires N.D. de La Paix
Faculté de Sciences
Namure, Belgique

RELATIVITÉS ET DÉFORMATIONS DE STRUCTURES : LECTURE COHOMOLOGIQUE DE L'INVENTION THÉORIQUE

La philosophie contemporaine de sciences s'est à plusieurs reprises penchée sur les circonstances et les caractéristiques de la genèse des théories physiques et sur les liens qui unissent les théories émergentes avec celles qui les ont précédées. On peut se demander, par exemple, si les cadres théoriques nouveaux peuvent être aisément et rigoureusement comparés à ceux qui les précèdent ou si au contraire ils restent vis–à-vis d'eux dans une situation d'incommensurabilité. Ce débat occupe, en philosophie des sciences, une partie de l'œuvre de Thomas Kuhn et de Feyerabend et il est bien connu, aussi nous n'y attarderons pas. Ce qui retiendra par contre notre attention, c'est la manière dont on peut caractériser, de manière précise, la commensurabilité ou l'incommensurabilité de certains formalismes physiques. Pour comparer ceux–ci, plusieurs voies sont possibles. Une des plus connues est la technique du passage à la limite, qui permet de récupérer une théorie comme approximation d'une autre lorsqu'on fait tendre certains paramètres caractéristiques vers zéro ou vers l'infini. Nous allons quant à nous intéresser à un autre moyen de comparaison théorique. Celui–ci utilise des outils qui permettent de clarifier, d'un point de vue topologique, plus exactement «cohomologique», l'état d'incommensurabilité de certaines classes de formalismes théoriques. Dans ce contexte, on envisage des classes de formalismes qui peuvent être, en un sens très précis, engendrés par des déformations successives d'une structure de base. Lorsqu'elles existent, ces déformations offrent donc un moyen formel de manifester un lien profond entre des formalismes théoriques. Cette voie a été relativement peu étudiée par les philosophes des sciences. Nous pensons néanmoins qu'ils constituent une base de réflexion précieuse pour penser, non seulement cette question de l'incommensurabilité, mais aussi pour caractériser certains traits du processus d'invention des théories et pour mettre au jour des critères (partiels mais intéressants) de fécondité théorique des formalismes.

Nous allons, dans un premier temps, donner une petite introduction à la notion de déformation de structure, précédée d'une introduction concise à la cohomologie qui en constitue l'outil de base. Nous montrerons ensuite qu'une série de questions importantes de la philosophie des mathématiques ou de la physique peuvent être exprimées en faisant appel à ce langage de la théorie des déformations. Nous verrons enfin que ces outils permettent de caractériser deux modes d'invention théorique différents sous–jacents à la relativité restreinte et à la relativité générale. Ceci nous aidera à reposer, de manière plus claire, certaines questions liées à la recherche d'une théorie quantique de la gravitation.

1. PETITE INTRODUCTION AU CONCEPT DE COHOMOLOGIE

La notion de déformation de structure fait appel à la notion de cohomologie[1]. Il nous faut donc en donner une brève

[1] Pour une introduction concise *cfr* A.C. Hirshfeld, *Anomalies in quantum field theory* [in] *Geometry and theoretical physics*, Berlin, Springer, 1991, pp. 206–208.

introduction. Supposons que nous ayons un espace vectoriel V sur lequel nous définissons une application linéaire $d\colon V \to V$ satisfaisant la propriété fondamentale : $d^2 = 0$ (l'application d est qualifiée d'opérateur différentiel). Cet espace est ce que les mathématiciens appellent un espace différentiel. On introduit alors les sous–espaces de V suivants «ensemble des cocycles» :

$$Z(V) = Ker(d) = \{v \in V | dv = 0\}$$

et «ensemble des cobords»

$$B(V) = Im(d) = \{v \in V | \exists w \in V\colon v = dw\}$$

Considérons maintenant le quotient $H(V) = Z(V)/B(V)$ qui est un ensemble dans lequel deux éléments v_1 et v_2 de $Z(V)$ sont identifiés s'il existe un w de V tel que $v_1 = v_2 + dw$. L'espace $H(V)$ est appelé l'espace de cohomologie de V. Si tous les cocyles sont des cobords alors l'espace de cohomologie est réduit à un élément. Si maintenant certains cocycles ne sont pas des cobords, l'espace de cohomologie devient non–trivial et l'on peut dire que cet espace mesure la proportion de cocycles qui ne sont pas des cobords.

Nous allons maintenant introduire une notion de cohomologie associée à une algèbre graduée. Une algèbre A sur un corps est essentiellement un espace vectoriel sur ce corps muni d'une multiplication, c'est–à-dire d'une application interne et partout définie : $A \times A \to A$, bilinéaire et distributive par rapport à l'addition des vecteurs. Une algèbre *graduée* est un espace vectoriel gradué, c'est–à-dire $A = \oplus_{k \geq 0} A^k$ muni d'une multiplication «.» telle que

$$A^k.A^l \subset A^{k+l}$$

Une *antidérivation* d'une algèbre graduée A est une application linéaire $\Delta\colon A \to A$ telle que : pour tout v appartenant à A^k et pour tout w appartenant à A on ait :

$$\Delta(v.w) = \Delta(v).w + (-1)^k v.\Delta(w)$$

Une application linéaire $f\colon A \to A$ est dite *homogène de degré* q si et seulement si, pour tout entier p :

$$f(A^p) \subset A^{p+q}$$

Avec toutes ces définitions, nous pouvons introduire la notion *d'espace différentiel gradué*. Il s'agit d'un espace vectoriel $M = \oplus_{k\geq 0} M^k$, gradué, muni d'un opérateur δ homogène de degré 1 tel que $\delta^2 = 0$. On définit, de manière naturelle, des espaces de cocycles et de cobords de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Z^k(M) &= Z(M) \cap M^k; \\ B^k(M) &= B(M) \cap M^k; \\ H^k(M) &= Z^k(M)/B^k(M) \end{aligned}$$

Nous pouvons donner maintenant une définition de la structure qui va être au cœur de notre analyse : *l'algèbre différentielle graduée*. Il s'agit d'une algèbre graduée $A = \oplus_{k\geq 0} A^k$ munie d'une antidérivation δ homogène de degré 1 telle que $\delta^2 = 0$. On vérifie que $Z(A)$ est une sous–algèbre graduée de A et que $B(A)$ est un idéal gradué de $Z(A)$. De ce fait, $H(A)$ est une algèbre graduée et elle est appelée *l'algèbre de cohomologie de A*.

On peut donner deux exemples d'une telle cohomologie d'algèbre différentielle graduée.

(1) Le plus simple est la cohomologie de de Rham d'une variété différentiable X. Ici l'algèbre différentielle graduée A est celle des formes différentielles sur X: $\oplus_{k\geq 0} \Lambda^k T^* X$ [2]. La multiplication de l'algèbre est le produit extérieur de ces formes et l'antidérivation homogène de degré 1 n'est autre que la dérivée extérieure. La cohomologie associée est appelée cohomologie de de Rham. Celle–ci manifeste l'existence de formes différentielles ω fermées ($d\omega = 0$) qui ne sont pas exactes (qui ne peuvent s'écrire $\omega = d\varrho$).

[2] T^*X désigne l'ensemble des 1–formes linéaires définies sur les espaces tangents à la variété X.

(2) Un autre exemple est celui de la cohomologie d'algèbres de Lie. Considérons une algèbre de Lie G sur un corps. La multiplication de deux éléments x et y d'une telle algèbre est donnée par le crochet de Lie $[x, y]$ vérifiant l'identité de Jacobi[3]. On peut définir l'ensemble G^* des 1–formes linéaires sur G, puis l'ensemble des k–formes alternées $\Lambda^k G^*$. Introduisons l'opérateur :

$$\delta\colon \Lambda^1 G^* := G^* \to \Lambda^2 G^* : \omega \to \delta(\omega)$$

$$\delta(\omega)(x, y) = -\omega([x, y])$$

Cette opérateur définit une antidérivation homogène de degré 1 et l'on peut montrer aisément en se servant de l'identité de Jacobi qui définit l'algèbre de Lie que :

$$\delta^2 \equiv 0$$

Cette antidérivation peut être étendue de manière naturelle à toute l'algèbre graduée $\Lambda G^* := \oplus_{k \geq 0} \Lambda^k G^*$. En suivant la procédure exposée ci–dessus, on peut alors construire l'algèbre de cohomologie $H(\Lambda G^*)$ qui définit la cohomologie de l'algèbre de Lie G.

Nous allons considérer maintenant introduire une notion de cohomologie associée aux algèbres associatives. Il s'agit de la cohomologie dite de Hochschild[4]. Nous nous donnons une algèbre associative A sur un corps K. On introduit alors les ensembles suivants :

$$C^k(A., M) = \{\text{applications } K\text{–linéaires}\colon \otimes^k A. \to M\}$$

Où M est un A–bimodule. On définit alors une application δ par la formule suivante :

$$\delta\colon C^k(A., M) \to C^{k+1}(A., M)\colon c \to \delta(c)$$

[3] L'identité de Jacobi s'écrit : $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$.

[4] Nous renvoyons le lecteur au livre : Ch.A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, 1994.

telle que :

$$\begin{aligned}\delta(c)(a_0, a_1, \ldots, a_k) = a_0 c(a_1, \ldots, a_k) \\ + \sum_{i=0,\ldots,k-1} (-1)^i c(a_0, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) \\ + (-1)^k c(a_0, \ldots, a_{k-1}) a_k\end{aligned}$$

On vérifie que cette opération est telle que $\delta^2 \equiv 0$ et qu'elle définit une algèbre de cohomologie sur $C = \oplus_{k\geq 0} C^k(A., M)$ appelée algèbre de cohomologie de Hochschild de A. Nous l'écrivons : $H(A, M) = \oplus_{k\geq 0} H^k(A., M)$.

2. PETITE INTRODUCTION AU CONCEPT DE DÉFORMATION DE STRUCTURE[5]

On se rappelle qu'une structure est, intuitivement, la donnée d'un ensemble muni d'opérations ou de relations particulières. Un des plus beaux exemples de structure est celui d'un groupe. Il s'agit d'un ensemble muni d'une opération interne et partout définie, associative, possédant un neutre et dont les éléments sont inversibles. La notion d'algèbre évoquée ci–dessus offre un autre exemple important de structure «algébrique». Intuitivement, on peut dire que déformer une structure consiste à modifier l'opération qui la définit au moyen d'un ou plusieurs paramètres et à exiger que cette modification ne change pas la nature de la structure. Ainsi si nous voulons étudier les déformations d'une algèbre associative, nous allons changer la multiplication des éléments de cette algèbre, en indexant ce changement par un paramètre déterminé, et nous allons exiger que la nouvelle multiplication

[5]Nous renvoyons ici à l'article très intéressant de Claude Roger, «Déformations algébriques et applications à la physique» [in] *Où en sont les mathématiques ?* (sous la direction de J.–M. Kantor), Paris, Vuibert/Société Mathématique de France, 2002, pp. 173–194. Cet article donne un survol très complet de l'étude des déformations et de leurs applications.

conserve sa propriété d'associativité. De la même façon, si nous déformons une structure d'algèbre de Lie, nous allons changer la définition du crochet de Lie (la multiplication caractéristique de cette algèbre) en utilisant un paramètre, et nous allons exiger que ce nouveau crochet définisse toujours une algèbre de Lie (autrement dit nous allons demander que ce nouveau crochet vérifie toujours l'identité de Jacobi). La déformation est une manière d'obtenir, à partir d'une structure donnée, toute une famille, indexée par des paramètres, de structures de même nature.

Le point très important est maintenant que les conditions, qui exigent que la structure déformée doit rester de même nature que la structure de départ, peuvent être exprimées en termes cohomologiques. Explicitons un peu ce point.

Considérons une algèbre associative A. Deux éléments a et b de A peuvent donc se multiplier pour donner un produit $a.b$. Une déformation à un paramètre de ce produit est obtenue en introduisant un paramètre t et en écrivant : un produit «déformé» $(\,,)_t \colon A \times A \to A[[t]]$ [6] :

$$(a,b)_t = a.b + tm_1(a,b) + t^2 m_2(a,b) + \ldots = \sum_{k\geq 0} t^k m_k(a,b)$$

où l'on a posé $m_0(a,b) := a.b$ et où $m_k(a,b)$ sont des éléments de A. On impose maintenant que ce produit déformé soit encore associatif. Autrement dit on demande que :

$$((a,b)_t, c)_t = (a,(b,c)_t)_t$$

En développant cette expression au premier ordre en t, nous obtenons la condition :

$$m_1(a.b,c) + m_1(a,b).c = m_1(a,b.c) + a.m_1(b,c)$$

Or cette expression peut s'interpréter naturellement dans le langage de la cohomologie de Hochschild $H^k(A.,A)$. En effet, elle

[6] $A[[t]]$ désigne l'ensemble des séries formelles à coefficients dans A.

s'écrit : $\delta(m_1) = 0$ où m_1 est un élément de $C^2(A., A)$. Donc, m_1 est en fait un élément de $H^2(A., A)$.

On voudrait classifier maintenant toutes les déformations possibles de cette algèbre A. Pour ce faire, nous allons considérer des classes d'équivalence de telles déformations. Deux déformations $(\,,)_t$ et $(\,,)'_t$ sont équivalentes s'il existe une application $f_t \colon A \to A[[t]]$ telle que : $(f_t(a), f_t(b))'_t = f_t((a,b)_t)$. Si nous exprimons cette formule au premier ordre en t, nous obtenons une formule qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$m_1(a,b) - m'_1(a,b) = a.f_1(b) - f_1(ab) + f_1(a).b$$

Mais celle–ci possède une expression cohomologique : $m_1 = m'_1 + \delta f_1$. Ceci est extraordinaire, car cela signifie que deux déformations sont équivalentes si elles appartiennent à la même classe d'équivalence dans $H^2(A., A)$. L'ensemble des classes de déformations de l'algèbre associative A s'identifie donc avec $H^2(A., A)$. Supposons que $H^2(A., A) = 0$, il n'y a pas de déformation non–triviale de l'algèbre et l'ont dit que celle–ci est *rigide*. Par contre si $H^2(A., A) \neq 0$ il existe des déformations non–triviales de l'algèbre et les différentes classes d'équivalence correspondent à différentes classes de déformations. La cohomologie apparaît donc ici comme l'outil indispensable pour étudier la déformabilité d'une structure (ici d'une algèbre associative, mais cela reste vrai pour des algèbres de Lie, ...).

3. QUELQUES QUESTIONS ÉPISTÉMOLOGIQUES TRADUITES EN TERMES DE DÉFORMATIONS

Les philosophes des sciences ont beaucoup discuté de la question de l'incommensurabilité des théories[7]. Une théorie est incommensurable avec un autre s'il n'est pas possible de traduire de l'un

[7] *Cfr* M. Curd, J.A. Cover, *Philosophy of science. The central issues*, New York, Norton, 1998, pp. 916–920.

à l'autre leurs concepts, leurs notions, leur langage, ... Souvent le concept de traduction n'est guère défini rigoureusement ce qui donne au concept d'incommensurabilité une faiblesse conceptuelle assez grande. La notion de déformation de structure pourrait aider à approcher d'une manière plus précise l'idée d'incommensurabilité. Considérons deux théories reposant sur des structures algébriques A et B. On pourrait envisager de dire que les deux théories sont incommensurables *d'un point de vue algébrique* si et seulement s'il n'existe aucune déformation algébriques qui transforme la structure A en B. Par contre elles seraient commensurables, relativement à ce point de vue algébrique, si ces structures peuvent être reliées par une déformation algébrique. Nous ne prétendons pas que tous les aspects de l'incommensurabilités soient repris dans cette caractérisation, mais nous percevons aisément qu'elle nous permet de rendre précis le concept, en le rattachant à l'architecture algébrique des théories. Nous verrons plus bas que l'on peut mettre en œuvre ce point de vue pour comparer des théories fondamentales en exhibant ce qui en fait l'unité profonde et parfois cachée.

D'une manière imagée, on peut dire que la théorie des déformations algébriques met en évidence, lorsqu'elle existe, une forme de «plasticité» des structures. La plasticité désigne la capacité de certains systèmes d'être façonnés tout en gardant une unité, une cohérence profonde. On a relativement peu étudié en philosophie des sciences empiriques et formelles les notions de plasticité ou de rigidité structurales. Or ceci est intéressant, car cela permet de poser une autre question qui est envisagée par les philosophes de la physique ou des mathématiques qui est celle de savoir si l'on peut «quantifier», *a priori*, la fécondité, la générativité *théorique* d'un formalisme.

Ceci semble comme tel dépourvu de sens. En effet, la générativité, la capacité qu'une théorie possède d'en engendrer d'autres, ne peut se jauger semble–t-il qu'*a posteriori*. En fait la déformabilité des structures (algébriques) suggère que l'on pourrait associer à toute théorie une sorte de *degré de générativité* (algébrique). En effet, étant donnée une théorie, on peut en identifier une structure algébrique fondatrice. Si nous connaissons la cohomologie associe, il nous est possible de caractériser, *a priori*, les classes de déformations algébriques. Le nombre de ces classes donnent une mesure, relative mais intéressante, de la fécondité du formalisme, de sa capacité à engendrer d'autres formalismes différents mais néanmoins du même type structural.

Remarquons qu'il convient de ne pas transformer un critère *suffisant* de fécondité basé sur la capacité d'une théorie à admettre des déformations algébriques avec un critère *nécessaire* d'une telle fécondité. En effet, il se pourrait qu'une théorie suscite l'engendrement d'autres cadres théoriques extrêmement fructueux sans pour autant que ces derniers soient produits par un processus de déformation algébrique (ou même différentielle ou topologique, ...) de la théorie initiale. Nous allons justement voir dans la suite, que l'histoire de la relativité nous montre deux exemples extrêmement instructifs qui illustrent ce que nous venons de dire. La structure algébrique de la mécanique classique (la relativité *galiléenne*) a une plasticité telle qu'elle peut engendrer, par une déformation à un paramètre, la structure algébrique qui se trouve au fondement de la relativité *restreinte*. L'émergence de cette dernière traduit donc en quelque sorte la fécondité de la mécanique classique. Mais à son tour nous allons montrer que la relativité restreinte, qui d'une certaine manière suscite, par ses limites (impossibilité d'y décrire la gravitation) et par une volonté de généralisation, l'émergence de la relativité *générale*, n'est pas reliée à cette dernière par une déformation algébrique. La fécondité de la relativité restreinte n'est pas jaugée dans ce cas par sa «plasticité algébrique».

4. RELATIVITÉ RESTREINTE, RELATIVITÉ GÉNÉRALE ET DÉFORMATIONS DE STRUCTURES

Les propriétés essentielles de la mécanique classique sont liées au groupe de Galilée qui est le groupe des déplacements affines de l'espace–temps classique. Nous pouvons construire aisément son algèbre de Lie et nous demander si celle–ci admet des déformations. Il se fait que, dans ce cas encore, c'est le deuxième groupe de cohomologie de l'algèbre de Lie qui nous renseigne sur l'existence de telles déformations. Le calcul montre que ce groupe contient un élément non–trivial qui indique l'existence d'une déformation de structure. La structure déformée n'est autre que... l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré, groupe qui est au fondement des propriétés caractéristiques de la relativité restreinte. La déformation est réalisée au moyen d'un paramètre qui peut s'interpréter comme l'inverse de la vitesse de la lumière $1/c$.

Ce résultat profond apparaît pour la première fois dans les travaux de Wigner et d'Inönü et il est intéressant d'en prendre toute la mesure épistémologique. Il est amusant de découvrir que la structure algébrique qui sous–tend la mécanique classique contenait, comme «en creux», cette possibilité d'un développement théorique vers la relativité restreinte. On pourrait lire *a posteriori* le travail d'Einstein en 1905 comme la mise en œuvre de cette possibilité de déformation qui était en germe dans le cadre théorique galiléen. La «commensurabilité» de la mécanique classique et de la relativité restreinte repose donc sur une base rigoureuse. Il est possible de comparer les deux univers théoriques car l'un peut être engendré par l'autre au moyen d'une déformation de structure.

Rétrospectivement aussi, on ne peut qu'admirer l'œuvre de Galilée et de Newton qui jetèrent les bases d'un formalisme qui précontenait les germes de fructueux développements théoriques futures. La richesse d'une théorie peut se juger non seulement en fonction de ses réussites actuelles mais aussi en fonction de sa générativité théorique, c'est–à-dire de sa puissance d'engendrement de nouveaux concepts, de nouvelles notions et structures. De ce point de vue, nous devons, en histoire de sciences, faire nettement la différence entre des théories qui sont efficaces, à un moment donné, pour expliquer un champ de phénomènes, mais qui n'ont guère de fécondité théorique et conceptuelle, et des théories qui, tout en manifestant leur extraordinaire efficacité, ont une réelle générativité formelle.

Nous pouvons nous demander à présent si le cadre algébrique qui sous–tend la relativité restreinte, l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré, est susceptible d'admettre des déformations structurelles ? La réponse est positive. Le deuxième groupe de cohomologie de cette algèbre de Lie contient un élément non–trivial qui indique une déformation possible à un paramètre. La structure déformée correspond ici à l'algèbre de Lie du groupe $SO(3,2)$. Ce groupe peut être interprété comme le groupe des isométries d'un espace pseudo–riemannien homogène : l'espace de de Sitter à 4 dimensions. Le paramètre de déformation est dans ce cas l'inverse de la courbure scalaire de cet espace–temps de de Sitter. Ce dernier est l'une des solutions des équations de la relativité générale. Nous voyons ici une différence essentielle avec la déformation de l'algèbre du groupe de Galilée. Dans ce cas, nous trouvions, par déformation, l'algèbre du groupe caractéristique de toute la théorie de la relativité restreinte. La déformation représente, dans un sens, une sorte de déploiement d'un «germe conceptuel» dont est porteuse la théorie classique. Ici nous voyons nettement que la relativité restreinte n'engendre pas, par déformation algébrique, la relativité générale, mais seulement l'algèbre d'un groupe d'isométries d'un modèle très particulier d'univers solution des équations d'Einstein de la relativité générale. La structure importante qui se trouve aux fondements de bon nombre de propriétés de la relativité générale est celle du groupe de difféomorphismes de la l'espace–temps qui ne co incide pas avec $SO(3,2)$ bien entendu. Si nous tentons de déformer l'algèbre du groupe $SO(3,2)$ nous n'y parvenons plus car cette dernière structure est rigide et l'on peut dire que le «germe algébrique» contenu dans la théorie galiléenne de la mécanique atteint ici son déploiement maximal.

Remarquons que le fait que la relativité générale ne puisse pas être envisagée comme une déformation algébrique de la relativité restreinte, ne signifie bien entendu pas que cette dernière ne joue aucun rôle dans l'engendrement de la première ! Les deux théories sont effectivement reliées et l'on retrouve l'espace de Minkowski comme solution particulière des équations de la relativité générale. S'il existe bel et bien un lien entre les deux théories et si l'on peut dire que la relativité restreinte joue un rôle essentiel dans le processus historique et conceptuel qui guide l'émergence de la relativité générale, il est clair que les structures algébriques des deux théories ne peuvent être connectées, de manière naturelle, par une déformation. Ceci montre que si le processus de déformation algébrique des structures est bel et bien suffisant pour expliquer la générativité de certaines théories, il n'en est pas pour autant nécessaire. Et, de fait, dans bien des cas, la genèse d'une théorie nouvelle à partir de cadres anciens se fait par des voies qui ne peuvent être comprises en des simples termes de déformations algébriques. Au fond ceci vient du fait que l'innovation théorique nécessite souvent des ruptures qui est justement à l'opposé de cette «plasticité structurale» qui caractérise le processus de déformation. Plasticité et rupture conceptuelles ou structurales doivent être conjugués pour rendre justice l'extraordinaire efficacité de l'esprit humain !

L'intérêt épistémologique de la théorie des déformations de structure est ici de manifester une différence essentielle entre la relativité restreinte et la relativité générale du point de vue de l'invention théorique. Le passage de la relativité restreinte à la relativité générale nécessite une sorte d'inventivité conceptuelle qui n'est pas de même nature que celle qui fait passer de la mécanique classique à la relativité restreinte. L'histoire[8] montre d'ailleurs les hésitations dont a fait montre Einstein, entre 1912 et 1915, avant d'oser admettre un formalisme qui était covariant sous un groupe de difféomorphismes (actifs). L'invariance sous ce groupe conduit à une conception de l'espace qui est très différente de celle qui sert de base à la physique classique[9]. Par exemple, en l'absence d'énergie–matière, l'invariance sous difféomorphismes fait que l'on ne peut plus donner un sens à des événements spatio–temporels individualisés. On comprend ici que l'on ne peut considérer la relativité générale comme une simple extension des idées et du cadre conceptuel de la relativité restreinte. La différence entre les deux théories se perçoit d'ailleurs très bien si l'on réalise que l'on est parvenu à construire une théorie quantique relativiste des champs (en édifiant, sur l'espace plat de Minkowski, une théorie quantique covariante sous le groupe de Lorentz) alors qu'une théorie quantique de la gravitation, conciliant la relativité générale et la mécanique quantique, reste encore à trouver. Ce dont nous venons de parler n'est pas très original, le saut conceptuel et inventif qui amena Einstein de la relativité restreinte à la relativité générale a été très souvent épinglé. Cependant, ce qui nous semble plus original, c'est que la théorie des déformations de structures algébriques nous aide à préciser les caractéristiques de ce «saut conceptuel» en manifestant que le cadre théorique de la relativité générale ne peut être vu simplement comme un «déploiement» (c'est au fond le sens intuitif d'une déformation) basée sur l'idée d'un espace–temps classique.

Par comparaison, le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique apparaît tout autre. En effet, en mécanique quantique la structure algébrique de base est une algèbre non–commutative d'observables. Or, on montre que la l'algèbre com-

[8] J. Stachel, «Einstein's search for general covariance» [in] *Einstein and the history of general relativity* (D. Howard, J. Stachel, eds.), Boston, Birkhäuser, 1989, pp. 162–168.

[9] *Cfr* M. Jammer, *Concepts of space. The history of theories of space in physics*, New York, Dover, 1993 (third, enlarged edition).

mutative des fonctions définies sur l'espace de phase de la mécanique classique peut être déformée en une algèbre non–commutative d'opérateur au moyen d'un paramètre. Cette algèbre n'est autre que l'algèbre des observables de la mécanique quantique et le paramètre s'interprète naturellement en termes de la constante de Planck. La structure symplectique de la mécanique classique, qui apparaît lorsqu'on formule celle–ci dans le formalisme hamiltonien, préfigure donc un cadre tout à fait nouveau dont elle est le ressort et comme la pierre d'attente. Qu'est–ce qui distingue cette situation de celle de la relativité générale ? En fait, il semble bien que ce soit la notion d'espace–temps. En mécanique classique et quantique, tout comme en théorie quantique relativiste des champs, on conserve une notion d'espace–temps comme un «fond» (*background*) sur lequel on peut construire toute la théorie. En relativité générale, comme l'ont montré avec beaucoup de justesse et de clarté les travaux de Smolin et Rovelli par exemple, cette notion de *background* spatio–temporel n'a plus de sens. L'invariance de la théorie de la gravitation sous difféomorphismes élimine à tout jamais cette notion d'une «toile de fond» spatio–temporelle sur laquelle nous pourrions construire toutes nos théories physiques. Dans ce sens, la théorie des déformations algébriques nous aide à comprendre, et à exprimer dans un langage rigoureux, les racines de cette proximité qui existe entre la mécanique classique et la mécanique quantique (malgré la radicale nouveauté de cette dernière !) et la distance qui les sépare de la relativité générale.

5. DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE À LA GRAVITATION QUANTIQUE : UNE QUESTION DE DÉFORMATION ?

Pour conjoindre la relativité générale avec la mécanique quantique il nous faut abandonner notre notion usuelle d'espace–temps, mais il nous faut donc aussi abandonner probablement les notions usuelles de groupe de symétrie à partir de laquelle elles sont définies. Il est intéressant de noter au passage que dans des recherches récentes sur l'unification de la relativité générale et de la mécanique quantique, Shahn Majid[10] a montré que ces deux théories pourraient peut–être s'unifier au moyen de constructions qui interviennent dans la théorie des groupes quantiques. Certains de ces groupes quantiques[11] (qui ne sont pas des groupes mais des algèbres de Hopf !) sont précisément des déformations d'algèbre de Lie de groupes classiques. Ces groupes quantiques apparaissent aussi comme les analogues des groupes de symétrie agissant sur des espaces à géométrie non–commutative[12].

Les travaux de Majid indiquent que l'on peut, au moins dans certaines situations simples mais suggestives, construire une structure algébrique très riche[13], dépendant de deux paramètres (interprétés comme la constante de Planck et la constante de gravitation), et qui peut être vue comme une «déformation» de la géométrie courbe de la relativité générale (qui est obtenue lorsque l'on fait tendre la constante de Planck vers zéro) et de la mécanique quantique (qui est retrouvée lorsque la constante de gravitation tend vers zéro). Cette situation est suggestive. Elle met en évidence une méthodologie d'unification des théories, basée sur la déformation algébrique des cadres théoriques initiaux. Les caractéristiques mathématiques de la déformation indiquent, de manière précise, à la fois ce qui, au cœur des théories de base, prépare la théorie unificatrice (ce qui rend cette dernière commensurable aux premières) mais aussi ce qui doit être changé dans la structure de base pour atteindre l'objectif d'unification. Le travail de Majid montre nettement que l'unification de la descrip-

---

[10] S. Majid, *Foundations of quantum group theory*, Cambridge University press, 1995.

[11] *Cfr* V. Chari, A. Pressley, *A guide to Quantum groups*, Cambridge University Press, 1994 ; A. Guichardet, *Groupes quantiques. Introduction au point de vue formel*, Paris, InterEditions/CNRS, 1995.

[12] *Cfr* A. Connes, *Noncommutative geometry*, New York, Academic Press, 1990.

[13] Il s'agit de la structure de produit «bicroisé» (*bicrossproduct*).

tion des phénomènes quantiques et de la gravitation ne peut se réaliser que si nous «inventons» une nouvelle déformation de nos cadres de base, déformation qui conjoint, en un formalisme non–commutatif, les notions géométriques de la relativité générale et l'algèbre non–commutative des observables de la mécanique quantique.

6. LA RICHESSE ÉPISTÉMOLOGIQUE DE LA THÉORIE DES DÉFORMATIONS DE STRUCTURES

On pourrait dire que les mathématiques de la théorie des déformations nous donnent un accès à un langage rigoureux permettant de penser le changement théorique en physique et en particulier les changements qui débouchent sur l'unification des formalismes.

La théorie des déformations traduit mathématique et sur le mode algébrique le fait qu'une théorie ancienne peut en préfigurer une autre, en en portant une sorte de trace formelle, tout en présentant des caractéristiques assez différentes de la théorie nouvelle. Ainsi la mécanique classique porte en elle les pierre d'attente de la mécanique quantique, les deux théories étant pourtant très différentes. La théorie des déformations invite donc à repenser de manière plus profonde la question de l'incommensurabilité. Les vocabulaires et les champs de phénomènes décrits par deux théories peuvent être très différents, sans pour autant que les deux théories soit incommensurables ! En effet, les deux théories pourraient très bien être reliées l'une à l'autre en profondeur par une déformation de leur structure algébrique.

En fait, la théorie des déformations montre que la notion épistémologique d'incommensurabilité est une notion seulement relative. Si l'on considère le point de vue qui est discuté ici, on pourra se restreindre à une notion de commensurabilité ou d'incommensurabilité basée sur les structures algébriques caractéristiques des théories physiques. Il s'agit, bien entendu, d'un point de vue très particulier et restreint, car on aurait pu aussi s'intéresser aux structures topologiques ou différentielles, etc. Mais nous ne prétendons pas qu'il soit possible de décrire une notion absolue d'incommensurabilité ! L'incommensurabilité *relative aux structures algébriques* peut être défini de la manière suivante. Deux théories physiques sont *commensurables* relativement à leurs structures algébriques, si l'une peut s'obtenir à partir de l'autre au moyen d'une déformation de leur structure algébrique caractéristique. Elles sont dites *incommensurables* relativement à ce même point de vue dans le cas contraire. On voit que la notion d'incommensurabilité ne peut être véritablement opérationnelle et rigoureuse qu'à la condition de spécifier par rapport à quel point de vue (algébrique, topologique, ...) on la définit. Le débat philosophique sur cette question s'est parfois fourvoyé, en présupposant implicitement une sorte de notion d'incommensurabilité sans référence précise. Ici la notion d'incommensurabilité *relative aux structures algébriques* possède une «mesure» précise qui est donnée par la cohomologie associée à la structure considérée. La rigidité ou la non–rigidité cohomologique, qui peuvent être calculées, procurent un outil et des critères pour prouver que tel cadre ne peut ou peut être déformé en un autre. Ceci montre donc l'extraordinaire fécondité de la théorie de l'homologie et de la cohomologie en philosophie des sciences.

Ces méthodes cohomologiques constituent une sorte d'outil d'analyse pour tester la fécondité d'un formalisme et fournissent une méthodologie pour en inventer de nouveaux. En effet, supposons que nous disposions, à un moment donné, d'une théorie physique fondamentale. Si nous en identifions la structure algébrique maîtresse, il est possible d'en étudier, avec une cohomologie adaptée, la rigidité ou la déformabilité. Dans l'hypothèse où la structure est déformable, il est alors possible de construire les classes de déformation et d'engendrer ainsi de nouveau formalismes que l'on peut étudier et soumettre au verdict expérimental.

Cependant il convient de rester prudent et de ne pas en tirer des conclusions hâtives. Nous n'avons pas ici une sorte de méthode «miracle» de l'invention théorique qui permettrait d'engendrer mécaniquement les théories du futur à partir de celles du passé ! En effet, l'exemple du passage de la relativité restreinte à la relativité générale nous montre que la déformation est loin d'être la seule méthode d'engendrement de nouvelle théorie. La construction de la relativité générale montre qu'il faut faire intervenir une sorte d'inventivité, d'intuition qui ne peut être intégrée dans une «logique de la découverte». Einstein ajoute véritablement quelque chose de nouveau lorsqu'il exige, après quelques hésitations que sa théorie de la gravitation doit être covariante sous les difféomorphismes. De plus, même si un nouveau cadre peut ętre obtenu à partir d'un plus ancien, par déformation algébrique de structure, il importe de remarquer que la procédure de déformation n'est pas nécessairement immédiate et évidente. En effet, il faut d'abord identifier la bonne structure à déformer et construire les outils cohomologiques qui leur correspondent. L'exemple donné par les travaux de Majid le montre très bien. Certaines théories géométriques (mimant la gravitation) et quantique peuvent être déformées pour donner un cadre qui les unifient. Mais, pour ce faire, il faut «mettre au jour» une bonne déformation. Dans ce cas précis, il faut «découvrir» ou «inventer» la structure de *produit bicroisé*. Or cela ne relève pas d'une démarche évidente et directe. De nouveau est en jeu toute une intuition qui n'est guère «mécanisable».

Quoiqu'il en soit des limites de cette méthodologie, l'étude des déformation des structures (algébriques ou topologique ou différentielles, ...) sous–jacentes aux théories physiques fondamentales devrait intégrer, aux côtés de la logique formelle, la panoplie des outils utilisés par les épistémologues pour caractériser l'émergence de nouvelles théories et pour évaluer leur fécondité relative (la puissance de développement théorique), pour mettre en évidence des continuités et des ruptures entre les cadres conceptuels.

SUMMARY

RELATIVITY AND STRUCTURE DEFORMATIONS : EPISTEMOLOGICAL ASPECTS

In contemporary philosophy of science there is a long lasting discussion concerning the evolution of physical theories. One analyzes the so–called limiting transitions from new theories to older ones (the correspondence principle). The present author notices that contemporary science has at its disposal a technical tool with the help of which the inverse process can be analyzed, namely a deformation of an older theory to the newer (more general) one. The author briefly presents the mathematical theory of structure deformations and discusses its applications to philosophy of science. For instance, with the help of this theory the concepts of commensurability or non–commensurability of physical theories can be precisely defined. The chain of structure deformations is described in changing from classical mechanics to special relativity and then to general relativity, and from classical mechanics to quantum mechanics. Some consequences of this approach for the search of quantum gravity are also outlined. In spite of the great epistemological significance of the theory of structure deformations, the role of human inventiveness in scientific creativity remains irreplaceable.

STRESZCZENIE

TEORIA WZGLĘDNOŚCI A DEFORMACJE STRUKTUR: ASPEKTY EPISTEMOLOGICZNE

We współczesnej filozofii nauki od dawna toczy się dyskusja na temat przechodzenia jednych teorii fizycznych w drugie. W jej trakcie analizuje się głównie tzw. przejścia graniczne od nowej teorii do teorii dawniejszej (zasada korespondencji). Autor zwraca uwagę, że współczesna nauka

dysponuje technicznym narzędziem analizowania procesu odwrotnego: deformacji struktury dawniejszej teorii do nowszej (ogólniejszej) teorii. Po zarysowaniu matematycznej teorii deformacji struktur, autor omawia jej znaczenie dla filozofii nauki. Na przykład, przy pomocy tej teorii można w sposób ścisły zdefiniować współmierność lub niewspółmierność dwóch teorii fizycznych. Następnie przedstawia funkcjonowanie deformacji przy przejściach od mechaniki klasycznej do szczególnej, a następnie do ogólnej teorii względności, a także od mechaniki klasycznej do fizyki kwantowej. Szkicuje także pewne konsekwencje tego podejścia dla programu poszukiwania kwantowej teorii grawitacji. Mimo ważnej epistemologicznej roli teorii deformacji struktur, znaczenie twórczej inwencji w poszukiwaniu nowych rozwiązań teoretycznych jest niezastąpione.