Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XL (2007), 12–29

Krzysztof WÓJTOWICZ
Zakład Logiki
Instytut Filozofii UW

KILKA UWAG O (META)FILOZOFII MATEMATYKI

Uprawianie filozofii wiąże się z koniecznością podjęcia refleksji o charakterze metodologicznym. W wypadku filozofii matematyki szczególnie istotne jest zagadnienie relacji między analizami filozoficznymi a wynikami technicznymi. W niniejszym eseju chciałbym poczynić kilka uwag dotyczących metody uprawiania filozofii matematyki w kontekście tych właśnie zależności.

1. KILKA UWAG HISTORYCZNYCH

Truizmem jest stwierdzenie, że matematyka w całej swej historii budziła zainteresowanie filozofów i stanowiła inspiracje dla podejmowania analiz filozoficznych. Wiedza matematyczna stanowiła swoisty ideał wiedzy pewnej i niewzruszonej; można wskazać przykłady filozofów, którzy jednocześnie byli czynnymi matematykami (np. Kartezjusz czy Leibniz). Ważne pytania filozoficzne mają swoje odpowiedniki w postaci pytań dotyczących filozofii matematyki. Pytania metafizyczne dotyczące istnienia i natury obiektów abstrakcyjnych, pytania epistemologiczne dotyczące dostępu poznawczego do tych obiektów, pytania dotyczące roli systemów pojęć w racjonalnym opisie świata mogą być sformułowane w jasny sposób właśnie na przykładzie matematyki. Można więc powiedzieć, że dyskusja dotycząca filozofii matematyki wyrasta z głównego nurtu filozofii, jednocześnie go wzbogacając. Od powstania matematyki w jej współczesnym kształcie, dyskusja ta jest szczególnie intensywna. W tym eseju skupiam więc swoją uwagę właśnie na (szerzej rozumianych) czasach współczesnych i specyfice współczesnej filozofii matematyki.

Trudno jest wskazać konkretny moment jako moment narodzin matematyki współczesnej, a jakąś pracę jako manifest założycielski. Trzeba jednak podkreślić rolę Cantora, który pod koniec XIX wieku stworzył nową teorię — teorię mnogości (czyli teorię zbiorów). Przełomowość ujęcia Cantora nie polegała na zastosowaniu niezwykłych i nowatorskich technicznych „fajerwerków" — klasyczne wyniki Eulera, Gaussa, Riemanna też wymagały użycia zaawansowanego aparatu matematycznego i ogromnej pomysłowości. Można jednak powiedzieć, że klasyczne prace matematyczne dotyczyły zazwyczaj konkretnych zagadnień — liczb naturalnych, konkretnych funkcji, figur geometrycznych czy rozmaitości. Cantor natomiast mówił o zbiorach jako takich, traktowanych niejako abstrakcyjnie, bez uwzględniania natury elementów składających się na te zbiory. W miejsce zbiorów liczb czy funkcji pojawiły się zbiory „w ogóle", traktowane jako najogólniejszy typ przedmiotu matematycznego. Operacje dokonywane na zbiorach (takie jak np. sumowanie, tworzenie pary zbiorów czy zbioru potęgowego, tworzenie nowych zbiorów na mocy aksjomatu zastępowania czy wyróżniania) nie zależały — w ujęciu Cantora — od natury ich elementów. Teoria mnogości (ostatecznie sformalizowana przez Zermelo i Fraenkla) okazała się teorią na tyle silną i ogólną, że daje się w niej interpretować w zasadzie wszystkie pojęcia matematyczne (czyli — swobodnie mówiąc — zrekonstruować całą matematykę)[1]. Ogólne, abstrakcyjne ujęcie Cantora okazało się więc bardzo owocne. Oczywisty już dzisiaj sposób uprawiania matematyki, w ra-

[1]Mówiąc o interpretowaniu pojęć matematycznych w teorii mnogości mam na myśli to, że np. relację definiuje się jako zbiór par uporządkowanych, funkcję jako pewnego typu relację, liczby naturalne można zdefiniować jako skończone liczby porządkowe, liczby całkowite jako zbiór klas abstrakcji *etc.* Każde pojęcie matematyczne można więc zdefiniować w systemie pojęć teorii mnogości — czyli zinterpretować w teorii mnogości. Odrębnym problemem (którego tutaj nie będę podejmował) jest to, jakie implikacje ma fakt istnienia takich rekonstrukcji dla dyskusji ontologicznej.

mach którego badane są nie tylko konkretne obiekty matematyczne (konkretne grupy, rozmaitości, przestrzenie funkcyjne, równania różniczkowe *etc*.), ale także struktury o bardzo ogólnym charakterze, zawdzięczamy w dużym stopniu właśnie Cantorowi[2]. Zmiana w sposobie uprawiania matematyki spowodowała oczywiście zmianę w spojrzeniu na naturę matematyki i na postrzeganie związanych z nią problemów natury filozoficznej i metodologicznej. Jednym z nich jest w szczególności problem ustalenia standardów matematycznej argumentacji. Jest rzeczą uderzającą, i niewątpliwie wyróżniającą matematykę to, że matematycy potrafią się doskonale porozumiewać, pomimo wszelkich różnic w światopoglądzie filozoficznym — i że w zasadzie nie ma rozbieżności stanowisk dotyczących tego, czy dany dowód matematyczny jest poprawny. Jednak w pierwszych latach XX wieku nie było pełnej zgody co do prawomocności pewnych — dziś już powszechnie stosowanych — metod dowodowych w matematyce. Różnice zdań dotyczyły przede wszystkim stosowania metod niekonstruktywnych (mam tu na myśli tzw. niekonstruktywne dowody istnienia)[3]. Pewna część matematyków uważała, że aby udowodnić istnienie obiektu matematycznego należy *explicite* podać metodę jego konstrukcji, zaś nowe ujęcie uznawała za nieprawomocne. Spory te budziły nieraz silne emocje (Kronecker — zwolennik ograniczania metod matematycznych do czysto arytmetycznych — miał podobno nazwać Cantora „deprawatorem młodzieży”). Gordan, kiedy ujrzał podane przez Hilberta niekonstruktyw-

---

[2]Oczywiście to stwierdzenie, jak każde stwierdzenie ogólne o charakterze historycznym jest pewnym uproszczeniem. Już wcześniej znane były np. wyniki Galois czy Abela, które miały charakter wysoce abstrakcyjny w porównaniu np. z rozważaniami dotyczącymi liczb naturalnych, konkretnych krzywych czy rozkładu funkcji w szereg. Nie twierdzę więc, że to dopiero Cantor wprowadził do matematyki rozważania „abstrakcyjne” — niemniej jednak z pewnością nie sposób przecenić jego wpływu na kształtowanie się współczesnego sposobu uprawiania matematyki.

[3]Przykładem takiego niekonstruktywnego dowodu jest dowód twierdzenia, że istnieją liczby niewymierne a, b takie, że a^b jest liczbą wymierną. Bowiem albo liczby $a = b = \sqrt{2}$ spełniają ten warunek (co kończy dowód), albo nie. Jednak w tym drugim wypadku wystarczy położyć $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, zaś $b = \sqrt{2}$. W tej sytuacji $a^b = 2$. Wiemy zatem, że przynajmniej jedna z par liczb $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ oraz $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ spełnia warunek, ale nie wiemy która.

nie rozwiązanie swojego problemu miał podobno powiedzieć: „To nie matematyka, lecz teologia!”. Problem ten miał szczególnie klarowną postać w wypadku pewnika wyboru, który ma całkowicie niekonstruktywny charakter. Postuluje on istnienie pewnego zbioru, nie mówiąc nic na temat sposobu jego konstrukcji[4]. Wokół pewnika wyboru toczyła się żywa dyskusja; obecnie ma ona jedynie wymiar historyczny, gdyż pewnik wyboru przyjmowany jest w matematyce bez zastrzeżeń. Warto jednak o tej dyskusji pamiętać.

Można zastanawiać się nad tym, czy dyskusja dotycząca standardów matematycznej argumentacji miała charakter *stricte* filozoficzny, czy też czysto praktyczny, dotyczący ustalenia ogólnie akceptowalnych reguł uprawiania matematyki. W takim ujęciu — mówiąc nieco żartobliwie — byłaby ona czymś w rodzaju dyskusji na temat ustalenia wygodnych zasad ruchu drogowego. Twierdzenie, że wszyscy matematycy owych czasów interesowali się kwestiami filozoficznymi jest bez wątpienia fałszywe, nawet jeśli ograniczymy się tylko do badaczy biorących udział w dyskusji na tematy dotyczące podstaw matematyki[5]. Niemniej jednak, nawet najbardziej antyfilozoficznie usposobiony obserwator musi przyznać, że filozoficzna składowa tego sporu nie była zerowa, zaś dyskutanci nierzadko odwoływali się do argumentów, które można śmiało nazwać argumentami filozoficznymi[6].

[4]Pewnik wyboru stwierdza, że dla dowolnej rodziny zbiorów A, istnieje taki zbiór S (tzw. selektor), który z każdym ze zbiorów należących do rodziny A ma dokładnie jeden element wspólny. O obiektach, których istnienie dowodzi się na podstawie tego aksjomatu często wiadomo tylko tyle, że istnieją, nie wiadomo natomiast „jak wyglądają”. O niemierzalnym podzbiorze $A \subseteq [0, 1]$ (którego istnienie dowodzimy odwołując się do pewnika wyboru) nie wiadomo, czy do niego należy np. liczba $\frac{1}{2}$.

[5]Jako filozof wolałbym oczywiście napisać, że filozofia była wówczas w centrum uwagi matematyków, i z nostalgią mówić o starych, dobrych czasach...

[6]Na przykład Cantor w swojej argumentacji na rzecz realizmu matematycznego i realistycznego traktowania zbiorów aktualnie nieskończonych odwoływał się wręcz do argumentów natury teologicznej. Do inspiracji filozoficznych jawnie przyznawał się Gödel, twierdząc, że to jego realistyczny światopogląd umożliwił mu swobodne posługiwanie się metodami pewnego typu.

2. PRAKTYKA MATEMATYCZNA A FILOZOFIA MATEMATYKI

Dziś spory tego typu należą do przeszłości, zaś paradygmat uprawiania matematyki jest w zasadzie ustalony[7]. Zapewne większość matematyków uważa, iż filozofia w zasadzie nie ma nic wspólnego z prawdziwą matematyką. „Pracujący matematyk" najczęściej nie interesuje się sporami filozoficznymi dotyczącymi jego dziedziny i wyniki tych sporów nie mają znaczenia dla jego codziennej pracy. Rozważania dotyczące ontologicznego statusu obiektów abstrakcyjnych, matematyczności przyrody, źródeł poznania matematycznego uzna — w najlepszym wypadku — za problem ciekawy sam w sobie, ale nie mający żadnego praktycznego znaczenia dla jego dyscypliny. W najgorszym wypadku — uzna je za pytania źle postawione, zaś ich analizę za nudziarstwo czy po prostu za przelewanie z pustego w próżne (a mówiąc dosadnie: za pseudointelektualny bełkot). Davis i Hersh podają przykład rozmowy z Idealnym Matematykiem, który stwierdza „Nie jestem filozofem, filozofia mnie nudzi. Rozważania i rozważania, które do niczego nie prowadzą. Moje zadanie polega na dowodzeniu twierdzeń, a nie na martwieniu się, co one znaczą." [Davies, Hersh 1994, 45]. Oczywiście, dialog jest fikcyjny, ale wydaje się, że stanowisko Idealnego Matematyka jest reprezentatywne dla dużej grupy matematyków.

Wśród matematyków w zasadzie panuje zgoda co do tego, które dowody matematyczne są poprawne, a które nie — zaś fakt, że do udowodnienia pewnego twierdzenia używamy np. pewnika wyboru (wzbudzającego swego czasu kontrowersje) zazwyczaj nawet nie jest odnotowywany jako godny uwagi[8]. Uprawianie matematyki

---

[7]Niekiedy mówi się, że nadchodzi czas nowego stylu uprawiania matematyki — poprzez obrazy, dynamiczne struktury *etc*. Tezy tego typu są jednak na ogół na tyle mgliście sformułowane, że trudno podjąć z nimi dyskusję. Czy sposób uprawiania matematyki się faktycznie zmieni, pokaże czas.

[8]W jednym ze skryptów widziałem przypis: „Aby udowodnić to twierdzenie, potrzebny jest pewnik wyboru.... I co z tego?". „Prawdziwy matematyk" nie interesuje się tym; emocjonuje się tym (co najwyżej) logik czy specjalista z zakresu podstaw matematyki.

nie wiąże się z zajęciem jakiegokolwiek stanowiska filozoficznego[9]. Matematyk-teoretyk, na pytanie, czy badanie przez niego np. torusy 256-wymiarowe i ich grupy podstawowe istnieją naprawdę, zapewne wzruszy ramionami (a jeśli będzie w filozoficznym nastroju, odpowie zapewne, że termin „istnienie" należy rozumieć w stosownym wewnątrzmatematycznym sensie — np. jako brak sprzeczności — nie wnikając jednak w dalsze szczegóły). Specjalista z zakresu matematyki stosowanej tworzy modele i dba o to, aby były użyteczne i operatywne — nie zastanawia się jednak nad tajemniczością faktu, że oto wiedza dotycząca „królestwa abstraktów" stosuje się do opisu giełdy czy danej populacji biologicznej. Bardziej obchodzi go to, czy rzeczywiście jego model dobrze opisuje dane zjawisko, a nie pytanie, dlaczego tak się dzieje (dlaczego — mówiąc ogólnie — przyroda jest matematyczna, czy też raczej „matematyzowalna"). Oczywiście, każdy badacz w dowolnej dziedzinie (czy to będzie fizyka, geologia, psychologia czy matematyka) ma — mniej lub bardziej wyraźnie sprecyzowane — przekonania dotyczące filozoficznego i metodologicznego statusu swej dziedziny, często jednak ogranicza się do stwierdzenia typu „przyjmuję po prostu pewne założenia, tworzę pewne modele — najważniejsze, że te modele działają". Najczęściej badacze koncentrują się na samym przedmiocie badań, nie wnikając w kwestie fundamentalne[10]. Dieudonne pisze, iż „w zasadzie wierzymy w rzeczywistość matematyki, ale rzecz jasna, że kiedy filozofowie atakują nas swoimi paradoksami, to pospiesznie zasłaniamy się formalizmem i mówimy 'matematyka jest tylko kombinacją symboli pozbawionych znaczenia', po czym wykładamy pierwszy i drugi rozdział teorii mno-

---

[9]Tu mógłby oburzyć się reprezentant matematyki intuicjonistycznej, twierdząc (słusznie!), że matematyka intuicjonistyczna wyrasta z pewnej wizji filozoficznej. Należy jednak zauważyć, że także matematykę intuicjonistyczną można uprawiać nie zajmując żadnego stanowiska filozoficznego — podobnie, jak matematykę klasyczną można uprawiać zarówno będąc realistą, jak i formalistą.

[10]Trudno się temu dziwić, ani tym bardziej żądać, aby elektronik zamiast projektować telewizor popadał w zadumę nad tajemniczym światem kwantów, a lekarz wstrzymał się od postawienia diagnozy, powołując się np. na krytykę Hume'a zasady przyczynowości.

gości. W końcu zostawiają nas w spokoju, a wówczas wracamy do naszej matematyki i robimy to, co robiliśmy zawsze, z poczuciem, które ma każdy matematyk, że pracujemy nad czymś rzeczywistym." (cytat za [Davies, Hersh 1994, 281]). Prawdopodobnie najbardziej naturalną postawą filozoficzną matematyka jest realizm, zarazem jednak matematycy niechętnie angażują się w dyskusje filozoficzne, których celem miałaby być obrona akurat takiego stanowiska[11]. Matematyk, jeśli już decyduje się zabrać głos w dyskusjach filozoficznych, to najczęściej jego wypowiedzi mają charakter ogólnej refleksji dotyczącej piękna i głębi matematyki — głębokich związków między poszczególnymi działami matematyki, faktu, że matematycy potrafią się porozumieć pomimo wszelkich możliwych różnic, czy wreszcie tajemniczości faktu, że twory matematycznego umysłu okazują się tak pomocne w opisie świata fizycznego. Można powiedzieć, że wypowiedzi te „biorą się ze zdziwienia" — zdziwienia faktem, że w ogóle świat daje się opisywać z użyciem metod matematycznych, zdziwienia swoistą jednością metod matematycznych, zdziwienia faktem, że matematycy mają (często) poczucie odkrywania pewnej obiektywnej rzeczywistości, która — być może — opisuje fundamentalne cechy rzeczywistości fizycznej[12]. Rzadko jednak (jako matematycy) zabierają głos w bardziej szczegółowych kwestiach filozoficznych, oddając tu głos filozofom. Dyskusje dotyczące np. ontycznych relacji między obiektami matematycznymi, a innymi bytami abstrakcyjnymi będą skłonni uznać za stratę czasu. Czy znaczy to, że — obrazowo mówiąc — matematyka i filozofia matematyki podróżują w przeciwnych kierunkach?

[11]W literaturze pojawia się określenie „niedzielny formalista" — ktoś, kto oficjalnie zajmuje stanowisko formalistyczne, gdyż wydaje mu się ono filozoficznie najmniej kłopotliwe, natomiast w codziennej pracy przyjmuje robocze stanowisko matematycznego realizmu.

[12]Natrafiłem kiedyś na obrazowe porównanie: fizyk docierając do pewnego fundamentalnego problemu ma wrażenie, że matematyk był tam już wcześniej.

3. ROZEJŚCIE SIĘ DRÓG METAMATEMATYKI I FILOZOFII

Koniec XIX i początek XX wieku — to okres burzliwego rozwoju metod formalnych i narodzin współczesnej logiki. Teoria mnogości stała się teorią formalną, dostatecznie silną, aby sformalizować praktycznie całą matematykę, a jednocześnie skodyfikowaną w precyzyjny sposób — tak że sama mogła stać się przedmiotem badań metamatematycznych (podobnie jak arytmetyka liczb naturalnych, sformalizowana przez Peano). Miało to istotne znaczenie dla badań w zakresie podstaw matematyki, tj. tej dyscypliny wiedzy, która stara się ustalić zespół podstawowych prawd matematycznych, rozwiązać problem ujęcia matematyki w odpowiednie ramy formalne i znalezienia fundamentalnego systemu pojęć matematycznych, ustalenia dopuszczalnych reguł wnioskowania i określenia założeń metodologicznych.

Dzięki formalizacji teorii mnogości i rozwojowi logiki formalnej ogólne debaty dotyczące podstaw matematyki, toczone w pierwszych latach XX wieku, zaczęły stopniowo ustępować miejsca badaniom metamatematycznym o *stricte* technicznym charakterze. Np. miejsce pytań o prawdziwość aksjomatów teorii mnogości zajęły pytania dotyczące relatywnej niesprzeczności rozszerzeń teorii mnogości[13]. W zasadzie żaden matematyk „w pracy" nie zapyta już dziś o to, czy hipoteza kontinuum jest tak naprawdę fałszywa, czy prawdziwa — świadom faktu, że jest to zdanie niezależne od ZFC i że dopuszczalna jest niemal każda wartość kontinuum[14]. Nie pytamy już dziś o to, jaka jest prawdziwa natura uniwersum mnogościowego, badacze zajmują się natomiast konstruowaniem wyrafinowanych technicznie modeli dla teorii mnogości. Samo pojęcie prawdy matematycznej zostało sprowadzone

[13]Nie wnikając w szczegóły, badania dotyczące relatywnej niesprzeczności zajmują się problemami typu: „Czy teoria T^* jest niesprzeczna, przy założeniu niesprzeczności teorii T?". Najczęściej chodzi tu o problem, czy dodatnie jakiegoś zdania do teorii T (o której zakładamy, że jest niesprzeczna) nie popsuje nam tej niesprzeczności.

[14]Mówiąc, że dopuszczalne są różne wartości kontinuum, mam na myśli fakt, że np. zdania „$c = \aleph_1$" czy „$c = \aleph_{12345}$" są relatywnie niesprzeczne z ZFC: jeśli ZFC jest teorią niesprzeczną, to niesprzeczne są także teorie ZFC + „$c = \aleph_1$" oraz ZFC + „$c = \aleph_{12345}$".

do pojęcia czysto technicznego (logicy mówią o spełnialności w modelu, a nie o prawdziwości *simpliciter*). Żaden logik nie stawia pytań dotyczących ontycznej natury liczb naturalnych, prowadzi natomiast techniczne badania dotyczące metamatematycznych własności arytmetyki (np. badania dotyczące modeli dla arytmetyki albo teoriodowodowych relacji między fragmentami arytmetyki *etc.*). Wiele takich pytań miało początkowo filozoficzną inspirację, jednak usamodzielniły się (można powiedzieć, że zaczęły żyć własnym życiem), i obecnie nawet specjaliści z zakresu logiki formalnej i podstaw matematyki rzadko powołują się na ich filozoficzne źródła. W czasopismach dotyczących podstaw matematyki, artykuły *stricte* filozoficzne są w zasadzie rzadkością[15]. Badania formalne nad podstawami matematyki osiągają coraz wyższy poziom komplikacji technicznych i trudno w nich odkryć ślady filozoficznych inspiracji, które towarzyszyły jej powstaniu.

Matematycy ignorują więc (jak się wydaje) kwestie filozoficzne. Także w zakresie badań dotyczących podstaw matematyki można zauważyć wyraźną specjalizację i oddzielenie badań *stricte* technicznych od dyskusji filozoficznych (z pożytkiem dla obu tych dyscyplin!). Wraz z rozwojem matematyki (a zwłaszcza logiki matematycznej i metamatematyki) zmienia się także charakter filozoficznej refleksji nad matematyką.

Rozwój logiki formalnej i metamatematyki ma swoje odbicie w samym sposobie uprawiania filozofii matematyki. W zasadniczy sposób zmieniło się środowisko pojęciowe, w którym stawiane i dyskutowane są problemy filozoficzne. Nie znaczy to jednak, że wraz z matematyzacją badań w zakresie podstaw matematyki, problemy filozoficzne zostały anulowane. Pozostają one jednak aktualne — choć najczęściej w zmodyfikowanej, bardziej precyzyjnej postaci. Dzięki wykorzystaniu narzędzi technicznych możliwe jest sformułowanie ich formalnych parafraz. Pojawiają się jednak też nowe pytania filozoficzne, stawiane

[15]Na przykład kilka lat temu powstało oddzielne czasopismo *Bulletin of Symbolic Logic*, które zamieszcza (również) prace historyczne czy filozoficzne dotyczące podstaw matematyki. Wcześniej takie prace ukazywały się w *Journal of Symbolic Logic*. To ostatnie czasopismo poświęcone jest obecnie wyłącznie już problemom technicznym.

w kontekście uzyskiwanych nowych wyników. Rozwój logiki formalnej i technik metamatematycznych dostarcza więc zarówno narzędzi dla precyzyjnego formułowania problemów filozoficznych (a w każdym razie ich parafrazowania[16]), jak i inspiruje do stawiania nowych pytań. Rozwój metod doprowadził do zmiany dyskursu filozoficznego, wzbogacając go o nowe problemy, jak i o nowe narzędzia[17].

4. JAK UPRAWIAĆ FILOZOFIĘ MATEMATYKI?

Jak więc powinna być uprawiana filozofia matematyki? Nie ulega wątpliwości, że powinna odwoływać się do aktualnego stanu matematyki. Nie jest jednak jasne, w jakim stopniu analizy filozoficzne zależą od wyników technicznych, i czy sama praktyka matematyczna wyznacza właściwy sposób uprawiania filozofii matematyki. Mówiąc nieco żartobliwie: czy możliwa jest sytuacja, w której filozof mówi „wiem, że parę dni temu udowodniono stosowne twierdzenie, dzięki któremu mój filozoficzny problem daje się już łatwo rozwiązać”? W odniesieniu do tego problemu można zająć całe spektrum stanowisk. Tutaj naszkicuję dwa skrajne, aby wyraźniej pokazać charakter zagadnienia.

(1) W duchu *philosophia prima*. Pierwsze stanowisko można określić jako stanowisko filozofii pierwszej — uznaje ono filozofię za dyscyplinę o charakterze fundującym. Zwolennik tego stanowiska

[16]Problem, czy jakiekolwiek zdanie języka formalnego można uznać za przeformułowanie problemu filozoficznego jest problemem złożonym. Można tu twierdzić (często bardzo zasadnie), że nie jest to ścisły odpowiednik, ale swoista parafraza, zaś rozstrzygnięcie problemu technicznego nie jest jednocześnie rozstrzygnięciem problemu filozoficznego, ale jedynie pewnym jego naświetleniem. Tego ogólnego problemu nie chcę tutaj podejmować.

[17]W tym miejscu chciałbym zwrócić uwagę na fakt, iż współczesna filozofia matematyki ma charakter wyraźnie antyfundacjonistyczny — nie ma już ambicji normatywnych. Klasyczne stanowiska filozoficzne (formalizm, logicyzm, intuicjonizm) takie roszczenia (w pewnym stopniu) miały, natomiast współcześnie żaden filozof matematyki nie proponuje programu reformy matematyki, nie próbuje podpowiadać matematykowi, w jaki sposób miałaby być uprawiana matematyka. Jest raczej tak, że stan matematyki jest przyjmowany niejako „z dobrodziejstwem inwentarza”, zaś zadaniem refleksji filozoficznej jest zdanie sprawy z charakteru współczesnej matematyki i wyjaśnienie pewnych zjawisk, a nie próba reformy.

jest przekonany, że problemy filozoficzne (także dotyczące nauk szczegółowych, w tym matematyki) winny być analizowane i dyskutowane w ogólnym kontekście, niezależnie od aktualnie osiągniętych wyników. Za wystarczające narzędzie dla analizy zagadnień filozoficznych dotyczących nauk szczegółowych uzna instrumentarium wypracowane przez tradycję filozoficzną. Uzna on w szczególności, że możliwe jest podjęcie filozoficznej refleksji nad matematyką bez szczegółowej znajomości zagadnień technicznych — wystarczy wiedza potoczna, jaką dysponuje każdy wykształcony człowiek. Osiągane przez matematyków wyniki uzna za ciekawostkę techniczną, ważną z punktu widzenia samego matematyka czy logika, ale pozbawioną zasadniczego znaczenia dla filozofa. Analizy tego ostatniego dotyczą bowiem kwestii fundamentalnych, a nie przyczynków[18]. Mówiąc obrazowo, trybunał rozstrzygający kwestie filozoficzne dotyczące matematyki winien być złożony z filozofów.

(2) W duchu radykalnego neopozytywizmu. Z kolei reprezentant drugiego, skrajnego stanowiska uzna problemy filozoficzne za pseudoproblemy, pytania źle postawione. W myśl tego stanowiska, matematyka jest jedynie wyrafinowaną składnią języka nauki, i warto prowadzić jedynie badania składniowe. Jeśli w ogóle można mówić o filozofii matematyki, to sprowadza się do metamatematyki, która pozwala na jasne sformułowanie problemów i udziela klarownych odpowiedzi. Natomiast podejmowanie analiz wykraczających poza badania techniczne jest jałowe. Nie można bowiem wskazać żadnych sensownych filozoficznych problemów, które mogłyby być wyjaśnione poprzez odwołanie do filozoficznych, nietechnicznych analiz.

Pierwsze stanowisko jest utrzymanie w duchu filozofii pierwszej, drugie można więc określić jako stanowisko w duchu postulatu samolikwidacji filozofii. Postawy te są skrajne i uniemożliwiają prowadzenie rzetelnej i płodnej dyskusji filozoficznej. Konieczne jest znalezienie jakiegoś kompromisu.

[18]Czytałem gdzieś wypowiedź, w której była mowa o tym, że nowinki techniczne nie są dla filozoficznej dyskusji zbyt istotne. Czy za taką nowinkę techniczną należy jednak uznać np. twierdzenie Gödla, albo wyniki dotyczące X problemu Hilberta...?

Dlaczego nie (1)? Niektórzy badacze sądzą, że — przy dobrych chęciach — każdy problem filozoficzny daje się rozwiązać „gołymi rękami”, bez odwoływania się do skomplikowanego instrumentarium logicznego. Istnieją prace dotyczących filozofii matematyki, w których autor odwołuje się jedynie do pewnych mglistych wspomnień na temat nauki matematyki w szkole, i w których pojawiają się tezy bądź banalne, bądź fałszywe. Prowadzi to do swoistej infantylizacji dyskursu. Podam tu kilka przykładów ilustrujących tę tezę (jest to tylko ilustracja i lista ta nie pretenduje do zupełności).

• **Twierdzenia Gödla.** Wypada zacząć od twierdzeń Gödla, jako najbardziej chyba eksploatowanych filozoficznie twierdzeń formalnych. Nie ulega wątpliwości, że twierdzenia te mają niebagatelną wymowę filozoficzną. Wymowa ta nie jest bynajmniej tak oczywista, jak chcieliby niektórzy (słabiej poinformowani) komentatorzy. W literaturze roi się od rozmaitych nadużyć interpretacyjnych, dających niekiedy efekt wręcz komiczny (wbrew — jak przypuszczam — zamierzeniom twórców tych komentarzy). Niektórzy autorzy, znający twierdzenie Gödla w jednej z jego ludowych wersji[19], (zapoznanie się z wersją poprawną wymaga wysiłku!) a zarazem przekonanie, iż powołując się na to twierdzenie będą mogli wywrzeć wrażenie na czytelniku, bez żadnego skrępowania oddają się swobodnej twórczości, obficie powołując się na (swoją wersję) twierdzenia Gödla. Nie będę tu podawać przykładów, zaś Czytelnika zainteresowanego tymi intelektualnymi szalbierstwami odsyłam do pracy [Krajewski 2003][20].

• **Problem ontycznych redukcji.** W matematyce mówimy o obiektach różnych typów: liczbach (naturalnych, całkowitych, rzeczywistych, zespolonych), grupach, funkcjach, rozmaitościach, modułach, prze-

---

[19]Np.: twierdzenie Gödla mówi, że (i) prawda jest nieogarnialna formalnie; albo: (ii) prawdy matematyczne stanowią system nieformalny; albo (iii) nie da się udowodnić prawdziwości arytmetyki; albo...

[20]Polecam również ciekawą (choć przygnębiającą w swojej wymowie) książkę [Sokal, Brickmont 2004]. Autorzy pokazują tam liczne przykłady nadużyć, dokonywanych przez postmodernistycznych autorów, którzy — w sposób absurdalny i świadczący o całkowitej ignorancji — powołują się na rozmaite wyniki matematyczne i fizyczne.

strzeniach Hilberta *etc.* Pojawia się pytanie, czy są to obiekty różnych kategorii ontycznych (różne typy bytów abstrakcyjnych), czy też wszystkie one są tak naprawdę obiektami jednej kategorii (lub mówiąc inaczej: czy dają się zredukować do obiektów jednej kategorii). Aby podjąć ten problem, należy zdawać sobie sprawę z pojęciowych zależności w matematyce, np. z faktu, że teoria mnogości jest na tyle silną i ogólną teorią, że można w niej zrekonstruować praktycznie całą matematykę. Z drugiej strony wydaje się zbyt silna na potrzeby „prawdziwej matematyki" i naturalne jest pytanie, czy nie da się zrekonstruować rozsądnie dużego fragmentu matematyki w jakimś słabszym, mniej kontrowersyjnym systemie pojęć. Tym problemem zajmują się np. badania prowadzone w ramach tzw. matematyki odwrotnej, i w wypadku tego podejścia znajomość (przynajmniej niektórych) kwestii technicznych jest niezbędna[21]. Samo pojęcie redukcji jednej teorii do drugiej może mieć różne sensy, których nie da się uchwycić inaczej, jak przez podanie ścisłych definicji — a zrozumieć je można dopiero zapoznając się ze stosownymi wynikami technicznymi.

• **Problem stosowalności.** Jednym z podstawowych problemów filozofii matematyki jest problem stosowalności matematyki w naukach empirycznych. Problem ten ma (przynajmniej) dwa aspekty: (i) dlaczego tak się dzieje, że matematyka daje się zastosować w naukach empirycznych; (ii) co z tego faktu wynika dla dyskusji filozoficznej. Tu jedynie wspomnę o pewnym aspekcie problemu (ii). Jednym z podstawowych argumentów na rzecz realistycznej interpretacji matematyki (za którym się też opowiadam) jest fakt wykorzystywania narzędzi matematycznych w naukach empirycznych. Mam na myśli tzw. argument z niezbędności (pochodzący od Quine'a). Zasadnicze strategie podważania tego argumentu polegają często na swoistej reinterpretacji (czy rekonstrukcji) zmatematyzowanych teorii empirycznych tak, aby ich akceptacja nie wiązała się z przyjęciem realistycznej tezy w odniesieniu do matematyki. Te rekonstrukcje oczywiście muszą zachowywać charakter teorii, nie mogą prowadzić do jej osłabienia *etc.*

[21]Wiadomości o matematyce odwrotnej Czytelnik znajdzie np. w [Wójtowicz 2003].

Aby mówić o niezbędności przyjęcia pewnych założeń egzystencjalnych konieczna jest więc znajomość pewnych wyników o charakterze metamatematycznym[22].

• **Problem prawdziwości aksjomatów.** Jednym z ważniejszych zagadnień filozofii matematyki jest zagadnienie prawdy matematycznej; w szczególności problem uzasadniania prawdziwości zdań matematycznych. Stanowiskiem, które stara się uniknąć filozoficznych trudności (a moim zdaniem — niejako anulować te trudności na mocy dekretu) jest stanowisko, w myśl którego przedmiotem badań matematyki są w gruncie rzeczy jedynie metamatematyczne zależności postaci „zdanie α wynika z teorii T". Jeśli odrzucimy ten (skrajny) punkt widzenia, pojawia się problem poznawczego statusu zdań matematycznych. W wypadku twierdzeń, na pytanie o nasze przekonanie o ich prawdziwości możemy odpowiedzieć wskazując na fakt, że twierdzenia dowodzimy opierając się na aksjomatach (i korzystając ze stosownych reguł dowodzenia). To stawia nas przed koniecznością uzasadnienia aksjomatów matematycznych. Problem ten jest dobrze widoczny w wypadku podstawowych teorii matematycznych, takich jak arytmetyka liczb naturalnych czy teoria mnogości. Dlaczego bowiem przyjmujemy aksjomaty teorii mnogości? Nie dzieje się tak przecież na zasadzie czysto konwencjonalnej gry. Przyjęcie takich a nie innych aksjomatów wymaga wprawdzie podjęcia decyzji — jednak nie jest to decyzja arbitralna, lecz motywowana w pewien określony sposób. Dyskusja na ten temat wymaga znajomości wyników technicznych[23].

• **Niesprzeczność jako kryterium istnienia?** Często spotyka się stwierdzenie, że w matematyce kryterium istnienia stanowi niesprzeczność. Sformułowanie takie jest sugestywne i dość dobrze (jak sądzę) zdaje sprawę z intuicyjnego nastawienia matematyka, który ma poczucie pełnej swobody przy podejmowaniu badań matematycznych. Przy bliższej analizie problemu okazuje się jednak, że sprawa nie jest

[22]Na przykład znajomość pewnych wyników dotyczących matematyki odwrotnej, o której była mowa w poprzednim akapicie.

[23]Prace Maddy (np. [Maddy 1988a, 1988b]) stanowią znakomitą ilustrację tezy, iż w tej dyskusji ważne są odwołania do — nierzadko bardzo wyrafinowanych — wyników technicznych.

bynajmniej tak oczywista, jak by się mogło wydawać. Samo pojęcie niesprzeczności ma dwa znaczenia (syntaktyczna i semantyczna niesprzeczność), które są tożsame dla logiki pierwszego rzędu (na mocy tw. o pełności), ale nie są tym samym np. dla logiki drugiego rzędu (i szeregu logik nieelementarnych). Podjęcie dyskusji na temat problemu istnienia i niesprzeczności wymaga odwołania się do pewnych wyników metalogicznych, gdyż już samo sformułowanie może okazać się mylące.

Można podać więcej przykładów, mam jednak nadzieję, że już powyższe dostatecznie jasno ilustrują tezę, że zabrać głos w dyskusji filozoficznej można jedynie przy pewnej znajomości wyników technicznych.

2. Dlaczego nie (2)? Łatwo więc zauważyć i wykazać niebezpieczeństwo naiwnej postawy, zgodnie z którą można zabrać się za rozwiązywanie problemów filozofii matematyki „gołymi rękami". Efekty takiej działalności są niekiedy wręcz tragi(komi)czne w skutkach (intelektualnych). Byłoby jednak źle pod wpływem takich obserwacji popadać w przeciwną skrajność twierdząc, że wszelkie rozważania filozoficzne są z natury rzeczy mętne, więc nie warto tracić czasu na jałowe dysputy i należy skoncentrować się wyłącznie na badaniach technicznych. Stanowisko takie może wydawać się dość atrakcyjne ze względu na to, że minimalizuje ono ryzyko popełnienia błędu i zabrnięcia w swoich badaniach w ślepą uliczkę. Wyniki osiągane na drodze badań czysto technicznych są pewne, i — używając żargonowego określenia — twarde. Natomiast podejmowanie analiz *stricte* filozoficznych grozi — obrazowo mówiąc — ugrzęźnięciem w trzęsawisku możliwych punktów widzenia, niedoprecyzowanych tez i niejasnych argumentów. Czy warto więc w ogóle podejmować ryzyko?

Problem znalezienia właściwej metody uprawiania filozofii matematyki (niejako złotego środka) jest ważny dla każdego, kto uprawia filozofię matematyki (w szczególności też dla autora niniejszych słów). Nie da się jednak tego złotego środka znaleźć na drodze samych tylko rozważań metateoretycznych — konieczne jest zaangażowanie się w dyskusję i dopiero wyniki tej dyskusji poddać dalszej analizie. To właśnie analiza współczesnej dyskusji dotyczącej filozofii matematyki wyraźnie pokazuje znaczenie wyników technicznych dla samego formułowania, dyskutowania, czy wreszcie rozstrzygania problemów filozoficznych. Filozoficzna interpretacja wyników formalnych (np. twierdzeń Gödla, twierdzeń Skolema-Löwenheima, twierdzeń dotyczących nierozstrzygalności pewnych problemów czy wyników dotyczących niezależności) wymaga ich znajomości — i to oczywiście znajomości nie tylko samych sformułowań, ale teoretycznego kontekstu.

Nie znaczy to jednak bynajmniej, że filozofowi wolno stracić z oczu fundamentalne problemy, które stanowią motywację dla podjęcia filozoficznej refleksji. Można wskazać szereg pytań metafizycznych i epistemologicznych dotyczących istoty matematyki, na które nie można odpowiedzieć na drodze badań czysto technicznych. Techniczne badania mogą dyskusję filozoficzną inspirować i porządkować, eliminując z niej niepoważne argumenty; nie znaczy to jednak, że filozofia matematyki może zostać zredukowana do metamatematyki (czy logiki formalnej). Ma ona bowiem swoje specyficzne problemy, system pojęć i metody argumentacji. Na ogół na pytania filozoficzne nie da się odpowiedzieć w sposób jednoznaczny, jak to się dzieje w wypadku problemów matematycznych, jednak ryzyko braku konkluzywności musi zostać podjęte przez każdego filozofa — także przez filozofa matematyki. Zarazem jednak uważam, że matematyka stanowi nie tylko przedmiot, ale i cenne narzędzie badań, zaś odwołania do instrumentarium matematycznego (czy logicznego) mogą być dla tej dyskusji bardzo owocne, a niekiedy niezbędne.

Filozofii (w szczególności filozofii matematyki) towarzyszą często głosy, iż problemy filozoficzne są źle postawione. Według logicznych pozytywistów, wszelkie problemy metafizyczne są pozorne (w szczególności problemy metafizyczne dotyczące samej matematyki). Ten punkt widzenia zdecydowanie odrzucam. Analiza filozoficzna pozwala na wyjaśnienie szeregu zagadnień — nawet jeśli trudno o ostateczne rozstrzygnięcie sporów o charakterze podstawowym. Trudno oczekiwać, iż dojdziemy do ostatecznych rozwiązań — specyfiką filozofii jest to, że możemy coraz lepiej rozumieć dane zagadnienie, ale zazwyczaj nie dochodzimy do rozwiązań bezdyskusyjnych. Jednak uważam, że analiza koncepcji filozoficznych może owocować coraz lepszym rozumieniem problemów. Nie można oczekiwać, że uda się ostatecznie rozstrzygnąć spór o naturę matematyki (będzie dobrze, jeśli uda się nam jasno sformułować to pytanie...), ale możemy coraz lepiej rozumieć naturę tego sporu — z jednej strony, dzięki nowym wynikom technicznym, ale z drugiej strony — dzięki dyskusji filozoficznej. Wprawdzie problemów filozoficznych na ogół nie da się rozwiązać dzięki wynikom technicznym, ale można (i należy!) je rozważać w świetle wyników technicznych, które pozwalają na lepsze rozumienie tych problemów. W tym sensie jestem przekonany, że można mówić o postępie w filozofii matematyki.

LITERATURA

Davis P.J., Hersh R.
[1994] *Świat matematyki*, Warszawa, WNT.

Krajewski S.
[2003] *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne*, Wydawnictwo IFiS PAN, Warszawa.

Maddy P.
[1988a] „Believing the axioms. I”, *Journal of Symbolic Logic*, 53, 481–511.
[1988b] „Believing the axioms. II”, *Journal of Symbolic Logic*, 53, 736–764.

Sokal A., Brickmont J.
[2004] *Modne bzdury. O nadużywaniu pojęć z zakresu nauk ścisłych przez postmodernistycznych intelektualistów*, Prószyński i S-ka.

Wójtowicz K.
[2003] *Spór o istnienie w matematyce*, Warszawa, Semper.

SUMMARY

A FEW REMARKS ON THE (META)PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

The present essay deals with the problem of how to choose the correct method of doing philosophy of mathematics taking into account the importance of technical mathematical results for philosophical analysis. After a short historical introduction presenting the formation of the present mathematical paradigm, it is pointed out that the current mathematical praxis has, in principle, no connection with philosophical investigations. Two radically different approaches to philosophy of mathematics are outlined. Basing on selected examples it is argued that that the correct method of doing philosophy of mathematics should take into account both technical results obtained by mathematicians (which often throw a new light on old philosophical questions) and the autonomy of philosophical method.