Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XLIV (2009), 84–99

Jerzy Dadaczyński
ul. Łagiewnicka 17, 41–500 Chorzów
dada59@poczta.onet.pl

GEORG CANTOR I IDEA JEDNOŚCI NAUKI

§ *I*

Jedność nauki jest tezą, która może być rozpatrywana zarówno w aspekcie metodologicznym, jak i treściowym. Teza o jedności metodologicznej nauki — nauk przyrodniczych (fizyki) i humanistycznych (socjologii) — była głoszona już w ramach pozytywizmu francuskiego w pierwszej połowie XIX wieku (A. Quetelet[1], A. Comte). Natomiast teza o jedności treściowej nauki była eksponowana przede wszystkim przez E. Macha oraz fizyków i matematyków, których gromadził on wokół tej idei na przełomie XIX i XX wieku[2]. Została ona dalej podjęta w ramach logicznego empiryzmu. Szczególnie eksponowana była ona w pracach R. Carnapa, O. von Neuratha, E. Nagela, C. Hempla, P. Oppenheima i H. Putnama[3]. W ramach pozytywizmu logicznego tezę o jedności (treściowej) nauki wiązano ściśle z tezą o redukowalności nauk do nauk bardziej podstawowych. I tak biologia miała

[1]Por. A. Quetelet, *Sur l'homme et le développement de se facultés, ou Essai de physique sociale*, Paris 1835.

[2]Por. E. Mach [u. a.], *Aufruf*, "Physikalische Zeitschrift", 13 (1912), ss. 725–726.

[3]Por. R. Carnap, C. Morris, O. von Neurath [eds.], *International Encyclopedia of Unifiied Science*, vol. 1–2, *Foundations of the Unity of Science*, Chicago 1938n; E. Nagel, *The Structure of Science*, New York 1951; C. Hempel, *Aspects of Scientific Explanation*, New York 1965; P. Oppenheim, H. Putnam, *Unity of Science as a Working Hypothesis*, "Minnesota Studies in the Philosophy of Science", 2 (1958), ss. 3–36.

być redukowalna do fizyki i chemii, a fizyka i chemia do nauki jeszcze bardziej podstawowej — fizyki cząstek elementarnych. Program logicznego empiryzmu podejmował też kwestię jedności nauk humanistycznych i przyrodniczych. Nauki społeczne miały być redukowalne do psychologii, a ta ostatnia do neurofizjologii (biologii). Tak więc zjednoczona nauka — łącząca nauki humanistyczne i przyrodnicze — miała być ostatecznie fizyką cząstek elementarnych

§ *II*

Wśród popierających ideę zjednoczonej nauki E. Macha byli — w roku 1912 — wybitni matematycy getyńscy F. Klein i D. Hilbert[4]. Wiadomo, że nieobca im też była idea zunifikowanej (niekoniecznie na bazie logiki) matematyki. W tym właśnie czasie realizowano — po wcześniejszych niepowodzeniach w tym zakresie G. Fregego — ideę logicyzmu, unifikacji matematyki na bazie logiki[5]. Można przypuszczać, że realizowana unifikacja matematyki miała wpływ, nie tyle na sformułowanie, co na zaktualizowanie idei jedności (treściowej) nauk przyrodniczych.

Nieco wcześniej, w latach 80. XIX swą koncepcję zunifikowania matematyki przedstawił twórca teorii mnogości G. Cantor. Można zasadnie przypuszczać, że wizja zunifikowanej matematyki mogła zasugerować mu ideę zunifikowanej nauki. Niniejsza praca ma na celu zaprezentowanie Cantorowskiej koncepcji unifikacji nauki na tle jego idei zunifikowanej matematyki.

§ *III*

Jeszcze na początku XIX wieku wydawało się, że unifikacja matematyki będzie niemożliwa. Zasadniczym problemem było sprowadzenie analizy matematycznej, opartej od czasu jej powstania na nieja-

[4]Por. E. Mach [u.a.], *Aufruf*, “Physikalische Zeitschrift”, 13 (1912), ss. 725–726.

[5]Por. A.N. Whitehead, B. Russell, *Principia mathematica*, vol. 1–3, Cambridge 1910–13.

snym i budzącym wiele kontrowersji pojęciu wielkości nieskończenie małej, do arytmetyki liczb naturalnych. Przeszkodę tę dało się jednak usunąć w dwóch — przebiegających po części równolegle — etapach.

Po pierwsze, dzięki pracom B. Bolzana, A. Cauchy'ego i K. Weierstrassa udało się wyeliminować z analizy matematycznej wielkości nieskończenie małe i oprzeć tę dyscyplinę na pojęciu liczb rzeczywistych. Drugi etap sprowadzenia analizy do arytmetyki liczb naturalnych polegał na kolejnym znajdywaniu modeli: teorii liczb całkowitych w dziedzinie liczb naturalnych, teorii liczb wymiernych w dziedzinie liczb całkowitych oraz teorii liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych. Tego ostatniego zadania podjęli się równolegle i skutecznie, około roku 1870 K. Weierstrass, R. Dedekind, Ch. Meráy i G. Cantor.

Realizacja drugiego etapu arytmetyzacji matematyki[6] oznaczała również arytmetyzację geometrii euklidesowej. Właśnie w zakresie rozumienia istoty geometrii pojawiły się jednak w XIX wieku przeszkody, które — jak się początkowo wydawało — uniemożliwiały uznanie matematyki (matematyki z geometrią) za jednolitą strukturę, której wszystkie gałęzie byłyby sprowadzalne do arytmetyki liczb naturalnych. Chodziło o status — powstałych w XIX wieku — geometrii nieeuklidesowych. Problem został rozwiązany około roku 1870, gdy F. Klein znalazł dla geometrii nieeuklidesowych modele euklidesowe, co oznaczało arytmetyzację nowych teorii geometrycznych[7].

G. Cantor — jak wspomniano wyżej — istotnie przyczynił się do arytmetyzacji matematyki XIX wieku. Twórca teorii mnogości szukał jednak bardziej fundamentalnych, niż arytmetyka liczb naturalnych — podstaw matematyki. Po raz pierwszy swoje przekonanie o możliwości redukcji arytmetyki liczb naturalnych — a więc i XIX-wiecznej matematyki — do teorii mnogości wypowiedział niemiecki matematyk

[6]Zwrot „arytmetyzacja matematyki" oznacza tu unifikację matematyki na bazie arytmetyki liczb naturalnych.

[7]W zasadzie nieco wcześniej, w roku 1868, modele euklidesowe dla geometrii nieeuklidesowych znalazł pracujący poza środowiskiem matematyków niemieckich E. Beltrami [por. E.Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, "Giornale di Matematiche", 6 (1868), ss. 284–312].

w artykule, który napisał w roku 1884, a który został opublikowany dopiero w roku 1970[8]. Wiązało się to z jego koncepcją zdefiniowania skończonych liczb naturalnych przy pomocy teoriomnogościowego pojęcia typu porządkowego. Stwierdził on, że każdy prosto uporządkowany zbiór ma określony typ porządkowy. Typ porządkowy określał jako takie pojęcie ogólne, pod które podpadają wszystkie i tylko te zbiory, które są tak samo uporządkowane, jak dany zbiór. Gdyby w podanej definicji zmienić termin „pojęcie ogólne" na „zbiór", wówczas można by otrzymać współczesną definicję typu porządkowego, a więc liczby porządkowej. Dalej G. Cantor wywodził, iż tak zdefiniowane typy porządkowe zbiorów skończonych są niczym innym, jak skończonymi liczbami naturalnymi[9].

Innymi słowy, niemiecki matematyk był przekonany, że znalazł modele dla skończonych liczb naturalnych w teorii typów porządkowych. Ważne było teraz umiejscowienie przez G. Cantora teorii typów porządkowych na ogólnym planie zależności dyscyplin matematycznych. Stwierdził on, że teoria typów porządkowych jest częścią stworzonej przez niego teorii mnogości. To zaś prowadziło do niezwykle ważnego stwierdzenia, że cała matematyka jest redukowalna do teorii mnogości. G. Cantor wypowiedział tę myśl następująco: „[matematyka]... jest według mojego ujęcia niczym innym jak czystą teorią mnogości"[10].

---

[8]Por. G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, w: I. Grattan-Guiness, *An unpublished paper by Georg Cantor. Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, "Acta Mathematica", 89 (1970) Bd. 124, ss. 65–107.

[9]„Jede *einfach geordnete Menge* hat nun einen bestimmten *Ordnungstypus* oder, wie ich mich auch kürzer ausdrücken will, einen bestimmten *Typus*; darunter verstehe ich denjenigen *Allgemeinbegriff, unter welchem sämtliche der gegebenen geordn. Menge ähnliche geordnete Mengen, und nur diese, (folglich auch die gegebene geordnete Menge selbst) fallen.* Die *Typen* der *endlichen einfach geordneten Mengen* sind nichts Anderes, als die *endlichen ganzen Zahlen*, in Zeichen: 1, 2, 3, ..., *v*, ...", G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, s. 87.

[10]„Sie (die allgemeine Typentheorie — J.D.) bildet einen wichtigen und grossen Theil der reinen Mengelehre (*Theorie des ensembles*), also auch der reinen Mathe-

Konkludując można stwierdzić, że w 1884 została wypowiedziana po raz pierwszy w dziejach, przez samego twórcę teorii mnogości — i to ponad 20 lat przed aksjomatyzacją tej dyscypliny matematyki — idea unifikacji matematyki na bazie teorii mnogości.

§ *IV*

Wydaje się nie być przypadkiem, że dokładnie w tym samym czasie, co idea zunifikowanej matematyki, pojawiła się w pracach G. Cantora koncepcja zjednoczonych nauk przyrodniczych.

Niemiecki matematyk był negatywnie nastawiony do założeń przyjmowanych u podstaw współczesnej mu fizyki oraz innych nauk przyrodniczych[11]. Szczególnie uważał za nieprecyzyjne i niejasne te, które dotyczyły budowy materii. Krytykował atomizm za przypisywanie atomom materii rozciągłości w przestrzeni, czyli miary większej od 0. Zdaniem G. Cantora, dla zbudowania teorii satysfakcjonująco tłumaczących zjawiska natury konieczne było przyjęcie dwu podstawowych hipotez:

1. Zbiór wszystkich cząsteczek materialnych jest nieskończony;
2. Podstawowe elementy materii — atomy — posiadają miarę 0.

Według G. Cantora przyjęcie owych hipotez otwierało możliwość bezpośredniego zastosowania zbudowanej przez niego teorii mnogości do — tak ukonstytuowanych — nauk przyrodniczych[12].

Dalsze badania pokażą, że G. Cantorowi — mówiącemu o bezpośredniej aplikacji twierdzeń teorii mnogości do nauk przyrodniczy — chodziło, w istocie, redukcję owych nauk (a przynajmniej pewnej ich części) do teorii mnogości jako teorii podstawowej. Jednocześnie trzeba zaznaczyć, że analizy G. Cantora, w tej kwestii, miały, miej-

matik, denn letztere ist nach meiner Auffassung nichts anders als reine Mengelehre", G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, s. 84.

[11]Por. G. Cantor, *Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen*, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, hrsg. von E. Zermelo, Berlin 1932, ss. 275 (261–277).

[12]Por. G. Cantor, *Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen*, s. 275.

scami, bardzo „techniczny” charakter. Dlatego zostaną one, w tym miejscu, omówione w sposób uproszczony. Istotna jest bowiem — dla rozważanego tu zagadnienia — przede wszystkim konkluzja, do której owe „techniczne” rozważania doprowadziły G. Cantora.

Elementarne składniki rzeczywistości fizycznej zostały przez G. Cantora określone mianem monad. Matematyk z Halle, zgodnie z paradygmatem współczesnej mu fizyki, przyjął dychotomię w dziedzinie monad: uznał istnienie zarówno monad materialnych, jak i eterycznych[13]. W tym miejscu w rozważania G. Cantora w zasadniczy sposób wkraczają już wyniki otrzymane w ramach teorii mnogości. Otóż zbiór wszystkich monad materialnych wszechświata miał być nieskończony, ale policzalny, natomiast zbiór wszystkich monad eterycznych wszechświata miał być mocy *continuum*. To samo miało, rzecz jasna, dotyczyć mocy zbioru monad materialnych dowolnego ciała (zbiór nieskończony policzalny) i mocy zbioru monad eterycznych w dowolnym fragmencie przestrzeni wszechświata zajmowanym przez to ciało (zbiór mocy *continuum*). Te założenia były — zdaniem G. Cantora — uprawdopodobnione udowodnionym przez niego twierdzeniem o istnieniu tylko dwu różnych mocy nieskończonych zbiorów punktowych[14]. Traktując dalej zbiory monad materialnych (ciała fizyczne) i zbiory monad eterycznych jako zbiory punktowe i wykonując wyrafinowane operacje teoriomnogościowe (odwołujące się do pojęcia punktu skupienia i kolejnych pochodnych zbioru) na tych zbiorach, dokonywał G. Cantor ich dekompozycji[15].

I tu następowała istotna dla prowadzonych badań konkluzja G. Cantora. Twierdził on, że własności mnogościowo-topologiczne składników tak dekomponowanych zbiorów (związane m.in. z ich mo-

[13]Por. G. Cantor, *Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen*, ss. 275–276.

[14]Por. List G. Cantora do G. Mittag-Lefflera z 16.11.1884, w: J. Dauben, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Cambridge 1979, s. 292.

[15]Skomplikowane szczegóły techniczne owej dekompozycji zbiorów zostały przedstawione w pracy: J. Dadaczyński, *Elementy filozofii przyrody Georga Cantora*, „Śląskie Studia Historyczno-Teologiczne”, 23–24 (1990–91), przypis 22, ss. 140–141 (135–145).

cami) lub kombinacji tych składników pozwolą dotrzeć do istoty takich zjawisk jak elektryczność, magnetyzm, światło, ciepło, a także na uchwycenie różnic w składzie i własnościach chemicznych poszczególnych ciał[16].

Warto zauważyć, że konkluzja G. Cantora nie jest tylko stwierdzeniem możliwości prostego zastosowania aparatu matematycznego w fizyce i chemii. Chodzi w niej o wiele więcej. Obiekt fizyczny (chemiczny) zostaje zinterpretowany jako rodzina zbiorów punktów (materialnych i eterycznych). Innymi słowy: terminy teoretyczne nauk przyrodniczych („atom", języku G. Cantora „monada") zostają zredukowane do terminów teoriomnogościowych. Dalej zaś wyłącznie własności mnogościowo-topologiczne wspomnianych zbiorów obiektów oznaczanych przez owe terminy mają rozstrzygać o własnościach fizycznych i chemicznych tego obiektu. Owa wyłączność rozstrzyga to, że w istocie fizyka (różne jej dziedziny) i chemia są w koncepcji G. Cantora redukowane do teorii mnogości (z elementami topologii).

Przy tym należy przypuszczać, że chodzi raczej o redukcję bezpośrednią poszczególnych dziedzin fizyki i chemii do teorii mnogości, nie zaś o redukcję pośrednią, np. chemii „przez" fizykę (pewne jej działy) do teorii mnogości.

Należy zauważyć, że G. Cantora koncepcja zunifikowanej, na bazie teorii mnogości, nauki miała obejmować nie tylko fizykę i chemię. Matematyk z Halle miał na myśli zunifikowaną teorię „organiczną" tłumaczącą obok zjawisk przyrody nieożywionej również procesy biologiczne. Stwierdzał on: „...dotychczas nie poczyniono żadnej próby, która mogłaby zastąpić mechaniczne tłumaczenie natury (które ma do dyspozycji cały aparat analizy matematycznej, a którego nieadekwatność była podkreślana już przez Kanta), a jednocześnie byłaby wyposażona w równie rygorystyczny aparat matematyczny i miała na celu ‘organiczne' wyjaśnienie natury"[17]. G. Cantor był przekonany, że

---

[16]Por. G. Cantor, *Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen*, s. 276.

[17]Por. G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, ss. 177 (165–209).

„organiczna teoria natury" powinna adekwatnie tłumaczyć fenomeny biologiczne, które okazały się być nieredukowalne do newtonowskiej mechaniki.

Dla poruszanej w tej pracy kwestii jedności nauki ważne jest to, jak G. Cantor „szkicował" zręby przyszłej „organicznej teorii natury". Istotnym pojęciem tej teorii winno być — według matematyka z Halle — teoriomnogościowe pojęcie typu porządkowego. Przez typ porządkowy danego zbioru *M* rozumiał on produkt, który powstawał przez abstrakcję od jakości elementów zbioru *M*, przy równoczesnym zachowaniu ich porządku: „elementy zbioru *M* są do pomyślenia jako oddzielone; w intelektualnej kopii *M*, którą nazywam typem porządkowym, jedności te są koniecznie połączone w organizm. W pewnym sensie typy porządkowe mogą być uważane za złożenie 'materii' i 'formy'. Jedności, czyli elementy zbioru *M* stanowią 'materię', podczas gdy 'porządek' tych elementów stanowi 'formę'"[18].

G. Cantor odwoływał się do przykładu, aby zaprezentować intuicję zastosowania pojęcia typu porządkowego. Dowolny obraz (tu rozumiany jako dzieło sztuki) można pojmować jako zbiór punktów. Elementy tego zbioru są porządkowalne na różne sposoby: wertykalnie, horyzontalnie, ze względu na kolor (długość fali), czy też intensywność barwy. Według G. Cantora podobnie porządkowany jest zbiór dźwięków utworu symfonicznego: ze względu na czas trwania dźwięków, ich kolejność w utworze, wysokość, natężenie. Zdaniem twórcy teorii mnogości mogło się okazać, że tak heteronomiczne byty, jak obraz Rembrandta i symfonia Beethovena, posiadały dokładnie taki sam typ porządkowy. Zdaniem G. Cantora zastosowanie teorii typów porządkowych w naukach przyrodniczych mogło ujawnić jedność pomiędzy — jak się dotąd wydawało — niesprowadzalnymi do siebie zjawiskami natury[19]. Matematyk z Halle *explicite* podkreślał, że teoria typów porządkowych będzie miała rozstrzygające znaczenie nie tylko

[18] G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, ss. 380 (378–428).

[19] G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, ss. 421–423.

w wyjaśnianiu zjawisk optycznych i chemicznych, ale także w wyjaśnianiu zjawisk o charakterze czysto organicznym[20].

Po raz kolejny należy zauważyć, że zamiarem G. Cantora nie było tylko proste zastosowanie aparatu matematycznego — tym razem — w chemii i biologii. Matematykowi Halle chodziło o znacznie więcej. Po interpretacji obiektu czy zjawiska w kategoriach teoriomnogościowych wyłącznie strukturalne własności teoriomnogościowe miały stanowić tłumaczenie ich cech chemicznych i biologicznych. Wskazana wyłączność wskazuje na to, że według zamiaru G. Cantora chemia i – co szczególnie istotne — biologia miały zostać zredukowane do teorii mnogości.

Można zatem sformułować istotną dla prowadzonych tu badań konkluzję, iż według G. Cantora, istotna część nauk przyrodniczych (*Naturwissenschaften*) — fizyka, chemia, biologia — jest (a raczej będzie) redukowalna (bezpośrednio) do teorii mnogości[21]. Głosił on więc tezę jedności nauk przyrodniczych.

§ *V*

Cantorowska koncepcja redukcji nauk przyrodniczych bezpośrednio do teorii mnogości może być dzisiaj określona zdecydowanie jako jawnie fałszywa (wadliwa). Niemniej kryje się za nią idea jedności nauki, która pojawiała się w filozofii (nauki) i w czasach bliskich G. Cantorowi (pozytywizm E. Macha), a także później, w XX wieku, w pracach przedstawicieli logicznego empiryzmu i – szerzej — w nurcie filozofii analitycznej. Interesująca zatem wydaje się próba udzielenia

[20]Por. List G. Cantora do G. Mittag-Lefflera z 22.09.1884, w: I. Grattan-Guiness, *An Unpublished Paper by Georg Cantor: Principien einer Teorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, ss. 85–86.

[21]Warto w tym kontekście wspomnieć, że G. Cantor określił „wszystkie nauki przyrodnicze" (*die sämtlichen Naturwissenschaften*) mianem „stosowanej teorii mnogości": „Unter angewandter *Mengenlehre* verstehe ich Dasjenige, was man *Naturlehre* oder *Kosmologie* zu nennen pflegt, wozu also die sämtlichen *Naturwissenschaften* gehören, sowohl die auf die anorganische, wie auch auf die organische Welt sich beziehenden.", G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, s. 85.

odpowiedzi na pytanie: jaka jest geneza Cantorowskiej idei jedności nauk przyrodniczych? Czy jest to geneza o charakterze wewnętrznym, związana z budową od podstaw przez G. Cantora teorii mnogości, czy też o charakterze zewnętrznym w stosunku do własnych badań G. Cantora, wynikająca ewentualnie z wpływu drugiego pozytywizmu (E. Macha)?

Zdecydowanie bardziej prawdopodobna wydaje się pierwsza hipoteza. Można sformułować kilka argumentów, które za nią przemawiają.

G. Cantor, budując od podstaw teorię zbiorów nieskończonych, stał się obiektem zdecydowanej krytyki ze strony L. Kroneckera, który był zdecydowanym przeciwnikiem odwoływania się do zbiorów nieskończonych i metod infinistycznych w konstruowaniu matematyki. L. Kronecker, jeden z nauczycieli G. Cantora na uniwersytecie berlińskim, był jedną najbardziej wpływowych postaci w środowisku matematyków niemieckich w drugiej połowie XIX wieku. To on pośrednio przyczynił się do tego, że G. Cantor nie mógł otrzymać stanowiska profesora ani na uniwersytecie w Berlinie, ani na uniwersytecie w Getyndze, których wydziały matematyki były w owym czasie wiodącymi w świecie. G. Cantor miał także problemy z wydawaniem swoich prac teoriomnogościowych w niemieckich periodykach matematycznych. Matematyk z Halle musiał walczyć o uznanie dla siebie i dla budowanej teorii mnogości. Jednym z elementów kampanii na rzecz uznania wartości teorii mnogości mogło być tworzenie wizji teorii mnogości integrującej poszczególne dyscypliny nauk przyrodniczych.

Innym źródłem podjęcia przez G. Cantora idei jedności nauk przyrodniczych mogła być reprezentowana przez niego koncepcja unifikacji matematyki na bazie stworzonej teorii mnogości. G. Cantor mógł przenieść ideę unifikacji matematyki na nauki przyrodnicze. Stymulatorem takiego przeniesienia mógł być znaczny stopień matematyzacji nauk przyrodniczych w XIX wieku. Na to wskazywać się zdaje — podkreślony wcześniej — fakt prawie równoczesnego podjęcia przez matematyka niemieckiego kwestii unifikacji matematyki i kwestii unifikacji nauk przyrodniczych oraz to, że w obydwu przypadkach dyscypliną podstawową miała być teoria mnogości.

Warto też w tym miejscu zaznaczyć, że G. Cantor, odmiennie niż pozytywiści wszelkich formacji, nie odrzucał metafizyki, przeciwnie, uznawał jej nieodzowność w fundowaniu matematyki. Z drugiej strony miał on świadomość, że teoria mnogości jest nauką ogólną w tym znaczeniu, że zajmowała się dowolnymi przedmiotami. Wprawdzie żadne źródła tego nie potwierdzają, ale wydaje się możliwe, że ta ostatnia przesłanka prowadziła G. Cantora do traktowania stworzonej przez niego teorii mnogości jako metafizyki. W jego koncepcji zjednoczonej nauki zarówno poszczególne dyscypliny matematyki, jak i poszczególne nauki przyrodnicze byłyby, w pewnym sensie, uszczegółowieniem teorii mnogości jako najogólniejszej nauki o tym, co istnieje. Tym samym teoria mnogości, pojmowana jako metafizyka, pretentowałaby do miana dyscypliny jednoczącej z jednej strony matematykę, z drugiej nauki przyrodnicze. Tu znajdowałaby też wytłumaczenie kwestia matematyczności przyrody.

Jest też niewykluczone, że wszystkie te czynniki razem — zapewne w różnym, trudnym do określenia, stopniu — wpłynęły na sformułowanie przez G. Cantora idei unifikacji nauk przyrodniczych na bazie teorii mnogości.

Nie ma natomiast żadnych wskazówek, które sugerowałyby, iż G. Cantor był w kwestii idei jedności nauki (i jakiejkolwiek innej kwestii) pod wpływem E. Macha, czy innego przedstawiciela pozytywizmu. Można by ewentualnie postawić pytanie, czy koncepcja *charakterisica universalis* — ogólnego języka nauki — G.W. Leibniza, który był bardzo ceniony przez twórcę teorii mnogości, nie wpłynęła w jakiś sposób na powstanie Cantorowskiej idei jedności nauki. I w tej kwestii nie ma jednak żadnego potwierdzenia w źródłach.

Należy, wobec powyższego, konkludować, że — najprawdopodobniej — wyłaniająca się z niektórych tekstów G. Cantora idea jedności nauk przyrodniczych (*Naturwissenschaften*) była jego własną, niezapożyczoną koncepcją metanaukową.

§ *VI*

Dotychczasowe badania dotyczyły Cantorowskiej idei unifikacji nauk przyrodniczych (na bazie teorii mnogości). Zasadnicze sformułowanie tej idei pochodzi — jak wskazują przypisy do § IV — z roku 1884. Dokładnie rok wcześniej, w roku 1883, W. Dilthey w pracy *Einleitung in die Geisteswissenschaften* dokonał fundamentalnego podziału nauk na przyrodnicze (*Naturwissenschaften*) i humanistyczne (*Geisteswissenschaften*)[22]. Dokonany wówczas podział opierał się przede wszystkim na kryteriach metodologicznych. Pozytywizm XIX wieku przeciwstawiał się tej dychotomii, preferując tezę o jedności metody i treści nauk. W ramach programu redukcjonizmu prezentowanego przez logiczny empiryzm w XX wieku uzasadniano możliwość redukcji „treściowej", części przynajmniej, nauk humanistycznych (socjologii do psychologii, a tej do neurofizjologii) do nauk przyrodniczych. Tym samym głoszona przez logiczny empiryzm unifikacja nauki obejmowała również — przynajmniej (istotną) część — nauk humanistycznych.

Pisma pozostawione przez G. Cantora nie zawierają żadnej wskazówki, że dopuszczał on możliwość redukcji jakiejkolwiek nauki humanistycznej do jakiejś nauki (nauk) przyrodniczej, czy też do teorii mnogości. G. Cantor zacieśnił swą koncepcję zunifikowanych nauk do nauk przyrodniczych. Zatem jego wizja zjednoczonych nauk nie była tak totalna, jak to miało miejsce w ramach logicznego empiryzmu. Z drugiej jednak strony zunifikowane nauki G. Cantora obejmują, oprócz nauk przyrodniczych, zredukowane do teorii mnogości, dyscypliny matematyki.

[22]Por. W. Dilthey, *Einleitung in die Geisteswissenschaften. Versuch einer Grundlegung für das Studium der Gesellschaft und der Geschichte*, Leipzig 1883.

§ *VII*

Wypada dokonać w tym miejscu — z perspektywy ponad trzynastu dziesięciolеci — oceny propagowanej przez G. Cantora idei jedności nauk przyrodniczych.

Przede wszystkim należy stwierdzić, że nie sprawdziła się przepowiadana przez G. Cantora wizja powszechnej i bezpośredniej redukcji nauk przyrodniczych do teorii mnogości. Wprawdzie zbudowana przez niemieckiego teoria znalazła zastosowania w naukach przyrodniczych, ale nie jest to tożsame z przepowiadaną przez niemieckiego matematyka redukcją nauk przyrodniczych do teorii mnogości.

Generalnie zaś należy stwierdzić, że w XX wieku, promowany przez przedstawicieli logicznego empiryzmu program redukcji nauk przyrodniczych do jakiegoś fragmentu fizyki odnotował tylko lokalne sukcesy. Udało się na przykład zredukować genetykę do biochemii i fragment chemii do fizyki kwantowej. Jednak szanse na globalne zunifikowanie nauk przyrodniczych są — w obecnym ich paradygmacie — oceniane na zerowe[23]. Innymi słowy: obecnie i Cantorowska i pozytywistyczna wizja jedności nauk przyrodniczych wydają się nierealizowalne.

Zupełnie inaczej potoczyły się dzieje propagowanej przez G. Cantora idei jedności matematyki na bazie teorii mnogości. Realizacja programu G. Fregego unifikacji matematyki na bazie logiki okazała się nieudana — ze względu na odkryte w systemie logika z Jeny antynomie. B. Russell z A.N. Whiteheadem wyeliminowali znane antynomie, ale ich realizacja programu logicyzmu okazała się być obciążona poważnymi wadami. Przede wszystkim chodziło o niezbędność przyjęcia

[23]Pozytywistyczna koncepcja redukcji nauk humanistycznych (psychologii) do nauk przyrodniczych przedstawiona przez P. Oppenheima i H. Putnama [por. P. Oppenheim, H. Putnam, *Unity of Science as a Working Hypothesis*, "Minnesota Studies in the Philosophy of Science", 2 (1958), ss. 3–36] została podważona przez tzw. argument z wielorakiej realizacji przedstawiony przez J. Fodora [por. J. Fodor, *Disunity od Science as a Working Hypothesis*, "Synthese", 28 (1974), ss. 77–115]. Argument ten głosi, iż tego samego typu zdarzenia rozpatrywane w ramach nauki wyższego poziomu mogą być zrealizowane za pomocą zdarzeń zasadniczo odmiennych z punktu widzenia nauki bardziej podstawowej.

pozalogicznego aksjomatu nieskończoności stwierdzającego istnienie nieskończenie wielu indywiduów. Poza tym — przyjęty dla eliminacji antynomii — pluralizm typów w systemie Russella generował typikalną wielość arytmetyki.

Na początku XX wieku przedstawiono jeszcze inny sposób eliminacji znanych antynomii — zaksjomatyzowano teorię mnogości. Na tej teorii można było budować matematykę bez niedogodności charakterystycznych dla logicyzmu. Jedną z realizacji tej koncepcji pokazali Bourbakiści. Dlatego dziś twierdzi się, że matematyka jest redukowalna do teorii mnogości (plus logiki w sensie rachunku predykatów). Tym samym zrealizowana została w XX wieku właśnie Cantorowska wizja — wyrażona w jego stwierdzenia „matematyka jest teorią mnogości” — unifikacji matematyki na bazie teorii mnogości.

Można więc podsumować niniejszy paragraf stwierdzeniem, że o ile Cantorowska idea jedności nauki wydaje się nierealizowalna, to Cantorowska wizja jedności matematyki była prorocza i zdecydowanie trafniejsza, niż koncepcja logicyzmu.

§ *VIII*

W świetle ostatniego stwierdzenia teza, że od G. Cantora rozpoczęła się również dezintegracja matematyki, wydaje się paradoksalna. Ma ona jednak uzasadnienie w pocantorowskich dziejach podstaw matematyki.

Dowód sformułowanego przez G. Cantora twierdzenia o dobrym uporządkowaniu każdego zbioru wymagał — jak to pokazał E. Zermelo — wcześniejszego przyjęcia pewnika wyboru. Tekst twórcy teorii mnogości wskazują, że on sam korzystał *implicite* z niesformułowanego jeszcze wtedy pewnika wyboru. W Zermelowskiej aksjomatyzacji teorii mnogości pewnik wyboru został przyjęty jako jeden z aksjomatów. Od razu wywołało to gorące kontrowersje, ze względu na niekonstruktywny charakter pewnika wyboru.

Hipoteza continuum została *explicite* sformułowana przez G. Cantora. Zresztą dopiero on dysponował narzędziami teorii mnogości, które pozwalały na jej sformułowanie. Mimo usilnych prób G. Cantora — który poświęcił w istocie temu zagadnieniu drugą połowę swej naukowej kariery — i jego następców, nie potrafiono znaleźć dowodu dla *hipotezy continuum*, ani dla jej negacji.

Nie było zatem przypadkiem, że kwestię statusu pewnika wyboru i *hipotezy continuum* w ramach teorii mnogości uczynił częścią swoich badań podstaw matematyki, prowadzonych w drugiej połowie lat 30. XX wieku, sam K. Gödel[24]. Udowodnił on — odwołując się do metod z zakresu teorii modeli — niesprzeczność obydwu z aksjomatyką ***ZF***. Na początku lat 60. P. Cohen udowodnił niezależność obydwu od aksjomatyki ***ZF***[25].

Te wyniki oznaczały tyle, że można budować różne teorie mnogości — bez aksjomatu wyboru i *hipotezy continuum*, z aksjomatem wyboru i *hipotezą continuum* oraz z ich negacjami. Dokładnie tak samo, jak można było budować geometrię z V postulatem lub z jego negacją (geometrie nieeuklidesowe). Wielość teorii mnogości oznacza jednak wielość matematyk, bowiem na teorii mnogości można nabudowuje się matematykę.

Jak pokazano, aksjomat wyboru i *hipoteza continuum* mają swe źródło w przedaksjomatycznej teorii mnogości G. Cantora. Ponieważ ich — rozpoznany — status prowadzi do pluralizmu teorii mnogości i, w konsekwencji, do pluralizmu matematyk, to można stwierdzić, że współczesny pluralizm matematyk posiada źródło — niezamierzone przez samego autora — w dorobku matematyka z Halle.

Można zatem konkludować niniejsze badania stwierdzeniem, że ostatecznie G. Cantor, który wysunął ideę jedności matematyki i jedności nauki, i którego idea unifikacji matematyki na bazie teorii mnogości była na pewnym etapie dziejów matematyki skutecznie realizowana, przyczynił się paradoksalnie, i w niezamierzony sposób, do uzasadnienia głoszonej współcześnie tezy o wielości matematyk.

---

[24]Por. K. Gödel: *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton 1940.

[25]Por. P. Cohen, *The Indenpendence of the Continuum Hypothesis*, "Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America", 50 (1963), ss. 1143–1148; 51 (1964), ss. 105–110.

SUMMARY

GEORG CANTOR AND IDEA OF THE UNITY OF SCIENCE

G. Cantor presented — in an unpublished paper (1884) — a vision of the unity of science. He argued all sciences can be reduced directly to the set theory. A source of this idea was for Cantor the unity of mathematics (on the basis of set theory). Cantor represented thesis about the unity of science irrespective of the representatives of positivism (E. Mach).