Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XLIV (2009), 61–83

Krzysztof Wójtowicz
Wydział Nauk Humanistycznych i Społecznych,
Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej w Warszawie

OBLICZA MATEMATYCZNEGO QUASI-EMPIRYZMU

W tradycji filozoficznej przez długi czas dominował pogląd, iż matematyka jest nauką aprioryczną, w ramach której poszukujemy — kierowani światłem czystego rozumu — odpowiedzi na pytania dotyczące wiecznych, niezmiennych i abstrakcyjnych bytów matematycznych. Dla filozofów tradycji racjonalistycznej stanowiła ona swoisty wzorzec wiedzy pewnej. Nie ma w takiej wizji miejsca na uwzględnienie wątków empirycznych. Taki pogląd na matematykę jest bliski wielu matematykom, a do przyjęcia go skłania ich codzienna praktyka badawcza. Nie sądzą przecież, że dowód przebiega w określony sposób, bo zachęciły nas do tego przypadkowe okoliczności empiryczne — ale w innych okolicznościach równie dobrze można byłoby udowodnić tezę przeciwną. Dowody nie chcą nas słuchać tak, jak bohaterowie wymyślanych przez nas historyjek — ale nie są też kapryśne, jak pogoda, lub kursy akcji. Kiedy dowodzimy twierdzeń, „czujemy", że kolejne kroki dowodowe muszą przebiegać tak a nie inaczej — i że niejako odkrywają się przed nami coraz to nowe aspekty zagadnienia. Wielu matematyków ma poczucie, że matematykę odkrywają — a nie tworzą[1]. Ich zdaniem, po prostu *musi* być tak a nie inaczej! I to,

[1]Takie doświadczenie jest udziałem bardzo wielu matematyków, jasny wyraz temu przeświadczeniu dał też np. Hardy: „Osobiście zawsze uważałem matematyka

jakie twierdzenia matematyczne udowodnimy, i jak sformułujemy ich dowody, nie zależy w najmniejszym stopniu od okoliczności empirycznych — własności chemicznych węgla, stałej grawitacji, średniej długości życia pszczoły *etc.* W przeciwieństwie do praw empirycznych, twierdzenia matematyczne — jeśli już zostaną poprawnie udowodnione — nie podlegają rewizji. To wszystko skłania nas uznania tezy, że matematyka opisuje pewną sferę, która jest całkowicie niezależna od sfery empirycznej, zaś poznanie matematyczne ma charakter czysto racjonalny.

Z drugiej jednak strony, trudno nie dostrzec głębokich związków między matematyką a naukami empirycznymi (przede wszystkim z fizyką). Galileusz miał powiedzieć, że księga przyrody napisana jest w języku matematyki. W dyskusjach filozoficznych często mówi się o matematyczności przyrody. Takie stwierdzenia — choć są często niezbyt jasno sformułowane — wyrażają intuicję, w myśl której matematyka (odgrywająca fundamentalną rolę w zdobywaniu wiedzy na temat świata fizycznego) w pewnym sensie odzwierciedla strukturę świata fizycznego. Faktycznie — trudno byłoby sobie wyobrazić fizykę bez matematyki. Mówi się niekiedy, że matematyka jest językiem fizyki, i że do tego sprowadza się jej rola poznawcza[2]. Takie wrażenie może powodować fakt, że rzeczywiście duża część badań matematycznych wyrasta z inspiracji fizycznych. Rachunek różniczkowy i całkowy nie wziął się z czystej kontemplacji, ale z potrzeby opisania pewnych

w pierwszym rzędzie za obserwatora, człowieka, który obserwuje odległe pasmo górskie i odnotowuje swoje obserwacje. Jego zadaniem jest jasne wyodrębnienie i opisanie innym tak wielu szczytów, jak tylko jest to możliwe" [Hardy 1929, 18]. Cantor mówił o sobie jako o sprawozdawcy wyników swoich badań. Bers (specjalista w dziedzinie równań różniczkowych) deklaruje wprost: „Gdy jednak uprawiam matematykę, mam subiektywne odczucie, że istnieje realny świat, który należy odkryć: świat matematyki. Ten świat jest dla mnie znacznie bardziej nieprzemijający, niezmienny i rzeczywisty niż fakty rzeczywistości fizycznej" (w: [Hammond 1983, 31]). Dieudonne twierdzi: „W końcu [uciążliwi filozofowie — K.W.] zostawiają nas w spokoju, a wówczas wracamy do naszej matematyki i robimy to, co robiliśmy zawsze, z poczuciem, które ma każdy matematyk, że pracujemy nad czymś rzeczywistym" [Dieudonne 1970, 145] (cytat za [Davis, Hersh 1994, 281]).

[2]Tak sądzą np. neopozytywiści.

zjawisk mechanicznych. Równanie fali czy równanie ciepła to podstawowe typy równań różniczkowych — inspiracje fizyczne towarzyszące ich sformułowaniu są oczywiste. Rachunek prawdopodobieństwa ma swoje źródła w rozważaniach dotyczących gier hazardowych. I tak dalej... To sugeruje przyjęcie wizji matematyki jako dyscypliny — w pewnym sensie — wtórnej w stosunku do nauk empirycznych. Jeśli więc nawet uznanie matematyki za li tylko język nauk empirycznych jest pewną skrajnością, to dyskusje filozoficzne winny uwzględniać te głębokie zależności.

Ta zależność może wyrażać się na różne sposoby. W niniejszym artykule omawiam stanowiska dwóch autorów, którzy podkreślają związki matematyki z naukami empirycznymi. Stawiają sobie jednak zupełnie inne pytania: Quine skupia się na problematyce ontologicznej, Lakatos — na metodologicznej[3].

1. REALISTYCZNY QUASI-EMPIRYZM QUINE'A

Quine jest matematycznym realistą i od niego pochodzi tzw. argument z niezbędności — argument na rzecz matematycznego realizmu, który jest dyskutowany bardzo żywo we współczesnej filozofii matematyki. Punktem wyjścia analiz Quine'a i podstawą jego argumentacji na rzecz realizmu matematycznego jest fakt, że matematyka stanowi nieusuwalny składnik teorii naukowych. Warto przypomnieć, jaka jest metafilozoficzna orientacja Quine'a: uważa on, że zadaniem filozofii jest teoretyczna analiza i włączenie wyników nauk szczegółowych w pewien całościowy obraz rzeczywistości, a nie szukanie dla nich epistemologicznej podstawy[4]. Cała koncepcja Quine'a jest więc w nierozerwalny sposób związana z jego analizami dotyczącymi roli matematyki w naukach empirycznych.

[3]Nie wyczerpuje to oczywiście całej bogatej problematyki związków matematyki z naukami empirycznymi.

[4]„Moje metodologiczne rozważania [...] należy także uważać za naturalistyczne; nie stanowią one części filozofii pierwszej, poprzedzającej naukę. Ich tłem jest [...] świat fizyczny widziany w perspektywie globalnej nauki" [Quine 1981, 49].

Schemat argumentacji Quine'a jest w uproszczeniu następujący: źródłem naszej wiedzy są dane zmysłowe, które następnie są poddawane „teoretycznej obróbce", aby uzyskać możliwie spójny obraz świata. W tej „obróbce" istotną rolę odgrywa mechanizm postulowania istnienia przedmiotów — np. przedmiotów fizycznych, będących źródłem naszych wrażeń. Zakładamy przecież, że podobne wrażenia zmysłowe wiążą się z tym samym, obiektywnie istniejącym i trwającym w czasie przedmiotem. Dokonujemy tu więc zabiegu reifikacji — a to dlatego, że dzięki temu możemy stworzyć prosty i operatywny obraz świata. Lepszy jest tu obraz fizykalistyczny niż fenomenalistyczny — i dlatego wybieramy ten pierwszy[5].

Zdaniem Quine'a, nauka wyrasta z wiedzy potocznej i w tworzeniu wiedzy naukowej możemy wskazać podobne mechanizmy, jak w tworzeniu wiedzy zdroworozsądkowej. W szczególności bardzo istotną rolę odgrywa wspomniany już mechanizm reifikacji, *postulowania* istnienie obiektów pewnego typu. Na poziomie wiedzy zdroworozsądkowej postulujemy istnienie krzeseł, na poziomie wiedzy naukowej postulujemy istnienie elektronów... i przedmiotów matematycznych. Taki zabieg rozszerzania ontologii ma miejsce na każdym etapie tworzenia się naszej wiedzy — przy czym ostatecznym kryterium przyjęcia danej teorii jest jej zgodność z doświadczeniem (czyli — w ostatecznym rozrachunku — ze strumieniem wrażeń zmysłowych). Oczywiście ta zgodność nie jest rozumiana w prosty i naiwny sposób — chodzi o teoretyczne dopasowanie całej koncepcji do danych wyjściowych. Reguły postulowania (*scil*: kryteria istnienia) przedmiotów wykraczają oczywiście poza obserwowalność: „Przedmioty fizyczne są pojęciowo wnoszone do sytuacji jako wygodne ogniwa pośredniczące — nie przez definiowanie ich w terminach doświadczenia, lecz jako nieredukowalne byty postulowane" [Quine 1953b, 67]. Ma to fundamentalne znacze-

[5]„Łącząc oddzielne doznania zmysłowe i traktując je jako percepcję jednego przedmiotu ujmujemy bogactwo naszych doznań w prostym i operatywnym schemacie pojęciowym. Przyporządkowywanie danych zmysłowych przedmiotom zewnętrznym jest [...] podyktowane zasadą prostoty: wcześniejsze i późniejsze wrażenie okrągłości łączymy z tą samą monetą lub z dwiema różnymi monetami, kierując się postulatem maksymalnej prostoty naszego całościowego obrazu świata" [Quine 1953a, 31].

nie dla problemu istnienia obiektów matematycznych: Quine twierdzi bowiem, że skoro w tworzonych przez nas teoriach musimy wprowadzać postulaty egzystencjalne dotyczące obiektów matematycznych, to trzeba te postulaty potraktować poważnie — i konsekwentnie przyjąć istnienie tych obiektów[6].

Taki wniosek wzbudza oczywiście sprzeciw filozofa o orientacji nominalistycznej. „Czy fakt, że mówimy, iż dwa krzesła i dwa krzesła to razem cztery krzesła, ma świadczyć o tym, że istnieją abstrakcyjne byty, takie jak liczby?" — spyta taki filozof. Z jego punktu widzenia, posługiwanie się terminologią matematyczną jest oczywiście wygodne, ale matematyka stanowi jedynie pomocniczy aparat w naszej komunikacji. Tak właśnie rolę matematyki widzieli neopozytywiści — jako system pomocniczych konwencji. Carnap podkreślał, że w każdej nauce mamy do czynienia z pewnym systemem językowym, którym się posługujemy, bo to jest wygodne. Jednak nie nakłada to na nas bynajmniej obowiązku uznania, że wszystkie używane terminy mają pozajęzykowe desygnaty. Aby uzasadnić swój pogląd, Carnap wprowadza rozróżnienie pytań o istnienie na pytania *wewnętrzne* i *zewnętrzne*. Tylko te pierwsze mają naukowy charakter — są to bowiem pytania o istnienie sformułowane *wewnątrz* pewnej aparatury pojęciowej. „Rozpoznać coś jako rzeczywistą rzecz... znaczy tyle, co włączyć to coś w system rzeczy... tak, że pasuje do pozostałych rzeczy rozpoznawanych jako rzeczywiste, zgodnie z regułami aparatury pojęciowej" [Carnap 1950, 419]. Natomiast pytania zewnętrzne, pytania o realność całego systemu bytów nie mają charakteru naukowego, nie można na nie bowiem odpowiedzieć odwołując się do kryteriów empirycznych. Sam fakt, że język rzeczy jest efektywny nie stanowi więc argumentu na rzecz realności świata rzeczy (a więc na rzecz metafizycznego realizmu), a jedynie argument na rzecz pragmatycznych zalet takiej właśnie aparatury pojęciowej. Zewnętrznym pytaniem jest więc filozoficzne py-

[6]Należy też przypomnieć, że Quine nie różnicuje sposobów istnienia (na np. fizyczne, intencjonalne, myślne, fikcyjne, możliwe *etc.*). Tym samym odrzuca wyjaśnienia statusu ontycznego obiektów matematycznych odwołujące się do takich rozróżnień (że np. obiekty matematyczne istnieją tylko w sensie słabym, fikcyjnym, intencjonalnym, mentalnym *etc.*)

tanie o świat zewnętrzny — ale także pytanie o istnienie liczb, zbiorów i innych obiektów matematycznych. Terminy matematyczne wprowadzamy dla wygody, na mocy konwencjonalnej decyzji — i to wszystko. Nie odpowiada im żadna pozajęzykowa, matematyczna rzeczywistość.

Quine odrzuca ten pogląd Carnapa, kwestionując podział na pytania zewnętrzne i wewnętrzne. W słynnych *Dwóch dogmatach empiryzmu* poddał radykalnej krytyce założenia, na których opiera się neopozytywistyczna wizja nauki i filozofii. Owe założenia (które określa jako dogmaty) Quine formułuje w następujący sposób:

(i) Pomiędzy zdaniami analitycznymi (których prawdziwość wynika wprost z postulatów języka i jest niezależna od faktów) i syntetycznymi (których prawdziwość uzależniona jest od stanu faktycznego) jest rozdział o fundamentalnym charakterze.

(ii) Aby zdanie można było uznać za sensowne, musi być ono równoważne (czyli inaczej: redukowalne do) pewnej konstrukcji logicznej, odwołującej się do terminów, które odnoszą się bezpośrednio do danych doświadczenia [Quine 1953b].

Podział zdań na analityczne i syntetyczne nie ma jednak — zdaniem Quine'a — racji bytu[7]. A przecież to właśnie przypisanie pewnym wypowiedziom statusu konwencji pozbawionych faktycznej treści stanowi fundament neopozytywistycznego poglądu na matematykę jako na składnię języka nauki (czy — posługując się słowami Hempla — jako na „teoretyczną sokowirówkę", służącą jedynie do wyciągania nowych wniosków). Quine odrzuca również empirystyczny dogmat redukcjonizmu, czyli „przekonanie, że każdemu zdaniu, czy też

[7]„[J]esteśmy skłonni zakładać ogólnie, że prawdziwość zdań daje się rozłożyć na komponent językowy i komponent faktualny. Przy tym założeniu wydaje się racjonalne sądzić, że w przypadku pewnych zdań ów komponent faktualny powinien być zerowy: byłyby to właśnie zdania analityczne. Lecz przy całej apriorycznej racjonalności tego pomysłu linia graniczna pomiędzy zdaniami analitycznymi i syntetycznymi po prostu nie została poprowadzona. Przekonanie, że rozróżnienie to jest w ogóle wykonalne jest nieempirycznym dogmatem empirystów, ich metafizycznym artykułem wiary" [Quine 1953b, 57–58].

każdemu zdaniu syntetycznemu, odpowiada jednoznacznie określony zbiór możliwych zdarzeń zmysłowych, z których każde realizując się, wzmaga prawdopodobieństwo tego zdania, a także określony zbiór możliwych danych zmysłowych, których realizacja obniża to prawdopodobieństwo" [Quine 1953b, 63]. Ów dogmat leży u podłoża przekonania, że poszczególne zdania w teorii naukowej możemy niejako wyizolować z teorii, i tak je weryfikować lub obalać. Quine twierdzi natomiast, że „nasze twierdzenia o świecie zewnętrznym stają przed trybunałem doświadczenia zmysłowego nie indywidualnie, lecz zbiorowo" [Quine 1953b, 63]. Mówiąc obrazowo, takim „kwantem", czyli jednostką sensu empirycznego jest cała teoria. Znaczenia są nadawane terminom w ramach całej teorii, włącznie z instrumentarium matematycznym i logicznym, a wszystkim zdaniom tej teorii jest przypisywany podobny status. Teorie naukowe winny być więc traktowane jako niepodzielne całości — i w szczególności konstruowanie „fragmentarycznej ontologii" nie ma racji bytu. Jeśli przyjmujemy pewne postulaty w ramach danej teorii, to winniśmy traktować je poważnie — w szczególności poważnie traktować *wszystkie* zdania egzystencjalne. Nie możemy więc traktować zdań matematycznych jako konwencji notacyjnych, nie możemy twierdzić, że ich prawdziwość ma czysto konwencjonalny charakter, i że pozbawione są pozajęzykowej interpretacji. Quine domaga się poważnego traktowania przyjmowanych przez nas w teoriach naukowych hipotez, nie dopuszczając wyjaśnienia w duchu instrumentalizmu. Nie ma bowiem uzasadnienia twierdzenie, że oto niektóre ze zdań danej teorii zinterpretujemy realistycznie, zaś inne potraktujemy jako czysto konwencjonalne. Carnapowski podział oparty jest bowiem na założeniach, które nie wytrzymują krytyki.

Zdaniem Quine'a, na pytania dotyczące ontologicznego statusu matematyki można odpowiedzieć dopiero wtedy, gdy poddamy analizie nasze teorie naukowe, i gdy wyjaśnimy, jaką rolę odgrywa w nich matematyka. Z całą pewnością matematyka nie może być traktowana jako dyscyplina autonomiczna, oderwana od reszty naszej poznawczej działalności. Koncepcja Quine'a nie dopuszcza żadnej czysto matematycznej władzy poznawczej, umożliwiającej bezpośredni „wgląd" w matematyczne uniwersum[8]. Nasze poznanie matematyczne dokonuje się nie poprzez *intelektuelle Anschauung*, ale jest zapośredniczone w naukach empirycznych — zaś kryterium prawdziwości zdań matematycznych stanowi w ostatecznym rozrachunku doświadczenie. Oczywiście nie chodzi tu bynajmniej o to, że zamiast dowodów matematycznych winniśmy przeprowadzać doświadczenia laboratoryjne, ale o to, że nasze uznanie zdań matematycznych za *prawdy* mają charakter wtórny w stosunku do uznania za prawdziwe pewnych teorii empirycznych. Mamy więc pewną zależność między empirią a matematyką. Oczywiście, nie chodzi tutaj o zależność taką, jaką sobie wyobrażał Mill (którego zdaniem matematyka stanowi po prostu indukcyjne uogólnienie wiedzy empirycznej — coś w rodzaju praktycznych reguł liczenia połączonych z regułami kartograficzno-geodezyjnymi)[9]. Zależność od empirii jest oczywiście subtelna — ale obecna! Quine przyjmuje tezę holizmu, w myśl której jednostką sensu empirycznego jest teoria — i ponieważ teoria jest potwierdzana lub odrzucana w całości, to również związana z nią ontologia winna być zaakceptowana lub odrzucona w całości. Dotyczy to w szczególności również matematycznej składowej tej ontologii. Jest jasne, że w ten sposób możemy uzasadniać stanowisko realistyczne jedynie w stosunku do stosowanych fragmentów matematyki — zaś matematyka czysto teoretyczna zostaje uznana za system niezinterpretowany. Stosowalność matematyki stanowi zatem klucz do uzasadniania stanowiska matematycznego realizmu.

[8] O takiej zdolności do intelektualnego ujmowania prawd matematycznych pisał np. Gödel: „Pomimo ich [obiektów teorii mnogości — K.W.] oddalenia od danych zmysłowych mamy coś w rodzaju percepcji obiektów teorii mnogości, co widać z faktu, że aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe. Nie widzę powodu, aby mieć mniej zaufania do tego rodzaju percepcji, tj. do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej" [Gödel 1947/64, 271]. Gödel lokuje się więc w tradycji racjonalistycznej.

[9] „Każde twierdzenie geometrii jest prawem dotyczącym natury zewnętrznej i można by je było ustalić, uogólniając na podstawie obserwacji i eksperymentu, które w tym przypadku sprowadzało się do porównania i mierzenia" [Mill 1962, 211].

Argument Quine'a na rzecz istnienia bytów matematycznych ma więc jasną strukturę. Opiera się na dwóch przesłankach:

(1) Matematyka jest niezbędna w naukach empirycznych.

(2) Ontologia teorii naukowych winna być przyjmowana w całości[10].

Argument Quine'a nosi w literaturze nazwę „argumentu z niezbędności" (*indispensability argument*). We współczesnej literaturze dotyczącej sporu realizm-antyrealizm w filozofii matematyki jest to argument zdecydowanie najszerzej dyskutowany — i to ten argument stanowi główny przedmiot ataku reprezentantów stanowiska antyrealistycznego[11].

Quine jest zatem matematycznym realistą, należy go również określić jako matematycznego empirystę. Empiryzm ten wyraża się zaś w tym, że pytanie o prawdziwość zdań matematycznych należy rozpatrywać w kontekście teorii empirycznych. O tym, czy dane zdanie matematyczne jest prawdziwe, i w szczególności o tym, czy dana teoria matematyczna posiada pozajęzykowe odniesienie, decydują więc wyniki analiz dotyczących teorii empirycznych. Płynie stąd pewien ważny wniosek — status teorii zinterpretowanych mogą wówczas uzyskać jedynie te fragmenty matematyki, które można uznać za „składowe" teorii fizycznych. Status teorii „czystych" jest inny — akceptujemy je,

[10] Oczywiście, samo sformułowanie „przyjmowana w całości" nie ma uchwytnego sensu, dopóki nie poda się jakiegoś jasnego kryterium, które pozwoli na identyfikację tej ontologii. Quine dostrzega oczywiście ten problem, zauważając, że jest to problem niebanalny: już na poziomie naszych zdroworozsądkowych przekonań nie jest do końca jasne, jakie składowe przyjmujemy w naszej ontologii. Quine podaje takie kryterium — konieczne jest sprowadzenie badanej teorii do „kanonicznej" postaci, jaką jest postać w rachunku kwantyfikatorów (czy inaczej: w logice elementarnej), zaś o tym, jaka jest ontologia, poinformuje nas analiza zdań z kwantyfikatorem egzystencjalnym. Pomijam techniczne szczegóły, ponieważ ich wyjaśnienie zabrałoby bardzo dużo miejsca — a nie są one zbyt istotne z punktu widzenia ogólnej prezentacji argumentu Quine'a.

[11] Autorami, którzy polemizują ze stanowiskiem Quine'a są np. Field, Chihara, Hellman czy Balaguer. Wszyscy oni jednak — niezależnie od tego, że z tezami Quine'a się nie zgadzają — uważają jego argument za istotny i wart dyskusji.

jeśli pełnią rolę porządkującą, jeśli służą do upraszczania i ujednolicania teorii matematyki stosowanej. Jeśli jednak nie pełnią tej roli, to winniśmy je traktować jak systemy niezinterpretowane[12].

Należy jednak podkreślić, że jest to empiryzm, który można nazwać empiryzmem ontologicznym. Quine nie wysuwa stąd bynajmniej żadnych wniosków dotyczących metod uprawiania matematyki (ani w planie deskryptywnym, ani normatywnym). Stanowisko Quine'a nie zakłada bynajmniej wprowadzenia jakichkolwiek procedur o charakterze empirycznym, modyfikacji pojęcia dowodu, naruszenia statusu zwykłej metody dowodzenia twierdzeń. Nie twierdzi przecież, że twierdzenia matematyczne można falsyfikować empirycznie[13]. Z punktu widzenia samej *metodologii* uprawiania matematyki nic się nie zmienia. Kryteria empiryczne ingerują natomiast na poziomie interpretacji ontologicznej — wówczas, gdy zastanawiamy się, czy dana teoria winna zostać uznana za zinterpretowaną, jej zdania za prawdziwe (w klasycznym sensie), zaś obiekty, o których mówi — uwzględnione w naszej ontologii. Quine nie mówi nic o empirycznym weryfikowaniu twierdzeń, twierdzi natomiast, że doświadczenie jest ostateczną instancją rozstrzygającą o tym, że dana teoria fizyczna (wraz z matematycznym instrumentarium) winna zostać zaakceptowana. Teoria jest bowiem przyjmowana jako całość — włącznie z aparatem matematycznym. Można powiedzieć, że jej matematyczny fragment „dziedziczy" empiryczne potwierdzenie[14]. Natomiast dowody matematyczne nadal pozostają na swoim miejscu — być może

[12]„Ta część matematyki, która jest potrzebna w naukach empirycznych, ma ten sam status, co reszta nauki. Pozaskończone rozgałęzienia mają ten sam status, o ile pełnią rolę upraszczającego usystematyzowania (*simplificatory rounding out*), jednak reszta ma status niezinterpretowanych systemów" [Quine 1984, 788].

[13]Więc absurdalny obrazek, polegający na tym, że chemicy czy fizycy w laboratorium czekają na koniec eksperymentu, aby zdecydować, czy np. faktycznie istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, albo czy twierdzenie Hahna-Banacha jest prawdziwe, nie wpisuje się w ten sposób argumentacji.

[14]W tym sensie powyższy przykład dotyczący laboratorium nie jest *całkiem* absurdalny: eksperyment oczywiście nie może zdecydować o tym, czy w ramach danej teorii matematycznej da się udowodnić dane twierdzenie, ale może zdecydować o tym, czy przyjmujemy np. teorię angażującą analizę funkcjonalną, czy też wystarczy nam

tylko okaże się, że nie dowodzą zdań, którym odpowiadają jakieś rzeczywiste korelaty ontologiczne, ale stanowią rozrywkę intelektualną[15].

2. *METODOLOGICZNY QUASI-EMPIRYZM LAKATOSA*

Lakatos znany jest przede wszystkim jako filozof i metodolog nauki, zajmował się jednak również filozofią matematyki. W swoich rozważaniach dotyczących matematyki Lakatos kładzie nacisk głównie na kwestie metodologiczne, zaś zasadnicza jego teza głosi, że rozwój matematyki podlega regułom podobnym do tych, jakie rządzą rozwojem nauk empirycznych. Zdaniem Lakatosa, nawet w matematyce mamy do czynienia z podobnymi zjawiskami rozwojowymi jak w naukach empirycznych: ze stawianiem i testowaniem hipotez, z obalaniem teorii, ze swoistą dynamiką pojęć, których sens nie jest ustalony raz na zawsze, *etc*. W ujęciu Lakatosa, wiedza matematyczna nie ma statusu wiedzy ostatecznej i niezmiennej, ale podlega rewizji, zaś twierdzenia matematyczne mają status raczej hipotez, a nie ostatecznych prawd. Można powiedzieć, że koncepcja Lakatosa to swoiste przeniesienie koncepcji Poppera na grunt matematyczny: odrzucenie kumulatywnego modelu rozwoju, dopuszczenie fallibilizmu, dostrzeżenie w matematyce mechanizmu tworzenia hipotez wyjaśniających *etc*. To wszystko — zdaniem Lakatosa — stanowić ma o zasadniczym podobieństwie matematyki do nauk empirycznych.

teoria angażująca jedynie tabliczkę mnożenia (która ma znacznie skromniejsze zobowiązania ontologiczne).

[15] Można dodać, że podobne do Quine'a stanowisko zajmuje również Putnam, który podkreśla rolę czynników empirycznych w matematycznym poznaniu: „[B]ędziemy musieli stanąć przed faktem, że przeciwstawienie empiryczny-matematyczny jest tylko przeciwstawieniem relatywnym: większość matematyki jest także 'empiryczna' w sensie mniej ścisłym i bardziej pośrednim niż zwykłe stwierdzenia 'empiryczne'" [Putnam 1975, 264]. Może się więc okazać, że „źródłem odpowiedzi na fundamentalne pytania, powiedzmy, że na temat kontinuum, będą w przyszłości nie jedynie nowe 'intuicje', ale także odkrycia fizyko-matematyczne" [Putnam 1975, 264–265]. Tak może być, jeśli uznamy, że najlepiej z systemem naszych przekonań o świecie „współpracuje" określona teoria matematyczna.

Należy podkreślić, że Lakatos stawia sobie zupełnie inne pytania, niż Quine. W zasadzie nie włącza się w spór realizm-antyrealizm, skupiając się na praktyce matematycznej i na analizie mechanizmów rozwoju matematyki — niezależnie od tego, czy uznamy, że ma ona jakiś pozajęzykowy przedmiot odniesienia.

Prace Lakatosa są ciekawe m.in. ze względu na to, że dały żywy impuls nurtowi, który można określić jako antyfundacjonistyczny. Kiedy mówimy w tym kontekście o fundacjonizmie, mamy na myśli fakt, że klasyczne „izmy" w filozofii matematyki (formalizm, konceptualizm, logicyzm) zajmowały się głównie badaniami dotyczącymi gotowych wersji teorii matematycznych — nie zaś mechanizmami, jakie prowadziły do ich powstania. Można powiedzieć, że zajmowały się kontekstem uzasadnienia, a nie odkrycia, zaś przedmiotem badań była raczej logiczna struktura teorii matematycznych (często w wyidealizowanej wersji), a nie ich geneza czy faktyczne mechanizmy rozwoju matematyki jako przedsięwzięcia intelektualnego. Nieco upraszczając, można powiedzieć, że w ramach paradygmatu fundacjonistycznego, na teorie matematyczne patrzy się jak na teorie sformalizowane, na dowód jako na ciąg symboli w języku formalnym, zaś zadanie filozofii matematyki upatruje się w poszukiwaniu „punktu Archimedesowego" — fundamentu, który nada matematyce charakter wiedzy pewnej (taki charakter ma np. program Hilberta).

Lakatos ten punkt widzenia odrzuca. Jego zdaniem, dla filozofii matematyki ważna jest refleksja nad praktyką matematyczną (a nie sztucznie zrekonstruowanymi wersjami teorii matematycznych), nad tym, jak wygląda historyczny proces rozwoju matematyki, jak kształtują się nowe pojęcia matematyczne, jak zmieniają się standardy argumentacji, jak tworzą się nowe paradygmaty *etc.* Aby rzetelnie uprawiać filozofię matematyki, musimy zwrócić uwagę na jej historię. Filozofia matematyki Lakatosa stawia więc sobie cele deskryptywne, a nie normatywne.

Dlaczego koncepcję Lakatosa określamy jako quasi-empirystyczną? To określenie może być mylące. Czyżby stanowisko Lakatosa miało być po prostu jakimś słabym („quasi") wariantem np. stanowiska Milla? Należy od razu wyjaśnić, że quasi-empiryzm Lakatosa nie jest bynajmniej stanowiskiem epistemologicznym, ale metodologicznym. Źródłem takiego określenia jest bowiem podana przez Lakatosa klasyfikacja nauk, które dzieli na euklidesowe i quasi-empiryczne. Jest to podział o charakterze metodologicznym, dotyczy podstawowego dla danej nauki mechanizmu uzasadniania zdań. „To, czy dany system jest euklidesowy, czy quasi-empiryczny, rozstrzyga wzorzec, zgodnie z którym przepływa w nim wartość prawdziwości. System jest euklidesowy, gdy typowym przepływem jest transmisja prawdy ze zbioru aksjomatów w dół, ku reszcie systemu — logika jest przy tym narzędziem dowodu; system jest quasi-empiryczny, jeśli mamy do czynienia z retransmisją fałszu z fałszywych stwierdzeń bazowych w górę, ku hipotezom — logika jest przy tym narzędziem krytyki" [Lakatos 1978, 224]. Tradycyjnie, na matematykę patrzy się jako na naukę euklidesową, w której mechanizm uzasadniania polega na dowodzeniu twierdzeń na podstawie uprzednio przyjętych aksjomatów. Lakatos twierdzi jednak, iż w ten sposób tracimy z oczu motywacje, jakie leżą u podłoża danego zagadnienia, zatracamy rozumienie sytuacji problemowej, która doprowadziła do ukształtowania się takich, a nie innych pojęć, do sformułowania hipotez, które stanowiły motywację dla podejmowania prób rozwiązania problemów *etc*. Zdaniem Lakatosa, taki model zniekształca w zasadniczy sposób to, co jest istotą matematyki. Lakatos bardzo krytycznie odnosił się w szczególności do neopozytywistycznej koncepcji matematyki, uważając, iż zafałszowuje ona istotę matematyki. Pozytywistom logicznym przypisuje dogmatyczne przekonanie, iż „zdanie ma znaczenie jedynie wtedy, gdy jest albo 'tautologiczne', albo empiryczne. A że nieformalna matematyka nie jest ani 'tautologiczna', ani empiryczna, musi być pozbawiona znaczenia, zwyczajnie bezsensowna" [Lakatos 1976, 19]. Taki punkt widzenia Lakatos zdecydowanie odrzuca, zaś koncepcję matematyki prezentowaną przez przedstawicieli logicznego pozytywizmu ocenia surowo: „Te dogmaty pozytywizmu logicznego przyniosły szkodę historii i filozofii matematyki" [Lakatos 1976, 19]. Odrzucenie takiej wizji matematyki ma związek z odrzuceniem przekonania (które Lakatos określa jako „dogmatyzm”), iż w matematyce możemy osiągnąć ostateczną pewność. Zadaniem filozofii matematyki nie jest bowiem budowanie systemów zabezpieczeń, ale opis mechanizmów jej rozwoju.

Lakatos nie ogranicza się do krytyki metodologii euklidesowej, ale formułuje własną propozycję. Cel, jaki sobie stawia, to „rozwinięcie poglądu, że nieformalna, quasi-empiryczna matematyka rozwija się nie poprzez monotoniczny wzrost liczby ustalonych niezbicie twierdzeń, ale przez bezustanne ulepszanie domysłów na drodze spekulacji i krytyki, za pomocą logiki dowodów i refutacji (prób obalenia)” [Lakatos 1976, 22].

Takie nieeuklidesowe ujęcie — zdaniem Lakatosa — znacznie lepiej opisuje mechanizm rozwoju matematyki. Mówiąc w pewnym uproszczeniu, rozwój ten polega na ciągłej grze pomiędzy poszukiwaniem dowodu, następnie znajdowaniem kontrprzykładu — który z kolei prowadzi do udoskonalenia dowodu, uświadamiania sobie niejawnie przyjmowanych założeń, precyzowania tych założeń *etc.* Ważną rolę odgrywa tutaj formułowanie roboczych hipotez, próbnych dowodów — i obalanie (*refutation*) tych dowodów. Nic więc dziwnego, że główna praca Lakatosa dotycząca tej problematyki nosi nazwę *Dowody i refutacje*. Lakatos analizuje tam historię hipotezy Eulera, dotyczącej wielościanów[16]. Przedstawia tam hipotetyczny dialog, w którym badacze wspólnymi siłami próbują rozwiązać problem, walcząc z napotykanymi trudnościami: dowody okazują się być „dziurawe”, pewne pozornie proste pojęcia (np. pojęcie wielościanu) okazują się być niejasne, pojawiają się kontrprzykłady, w wyniku których konieczne staje się doprecyzowanie definicji i zmodyfikowanie dowodów *etc.*

Jednym z podstawowych pojęć koncepcji Lakatosa jest pojęcie zdania bazowego, które stanowi swoisty punkt wyjścia badań matematycznych. Lakatos określa tak zdania ugruntowane w codziennej praktyce matematycznej, które najwcześniej uznajemy za prawdziwe. Nie cho-

[16]Jest to hipoteza głosząca, że dla brył wypukłych zachodzi wzór: $V + F - E = 2$, gdzie V — liczba wierzchołków, F — liczba ścian, E — liczba krawędzi.

dzi tu jednak bynajmniej o porządek logiczny. Zdaniami bazowymi nie są więc na ogół aksjomaty sformalizowanej wersji teorii, ale takie stwierdzenia matematyczne, które na nieformalnym etapie uprawiania matematyki uznajemy za punkt wyjścia[17]. Dopiero później poszukujemy wersji zaksjomatyzowanej — ale dzieje się to dopiero wówczas, gdy mamy już rozeznanie w (rozumianych intuicyjnie i niesformalizowanych) zależnościach pojęciowych. W takim procesie występują mechanizmy przypominające mechanizmy w naukach empirycznych — startujemy od „zjawisk matematycznych" wymagających wyjaśnienia, a tymi zjawiskami są zaczerpnięte z matematyki codziennej stwierdzenia[18]. Aksjomaty — podobnie jak prawa fizyki — stanowią raczej hipotezy wyjaśniające zachodzenie pewnych „zjawisk matematycznych", które są punktem wyjścia naszych poszukiwań. Aksjomaty — podobnie jak prawa fizyki — są przy tym poddane nieustannemu testowaniu. Działalność matematyczna nie polega więc bynajmniej na tym, że oto z „objawionych" aksjomatów wyprowadzamy nowe twierdzenia. Jest raczej tak, że i same aksjomaty muszą walczyć o przetrwanie na polu bitwy, jaką jest matematyka. Na tym polu mamy bowiem do czynienia nie tylko z transmisją prawdy od aksjomatów do twierdzeń, ale także z retransmisją fałszu — aksjomat może zostać sfalsyfikowany (podobnie jak — w ujęciu Poppera — falsyfikowane są hipotezy teorii empirycznych). Ostatecznym kryterium w tej walce jest praktyka matematyczna. „Podstawową zasadą [...] jest szukanie śmiałych, pełnych fantazji hipotez o dużej sile wyjaśniającej i heurystycznej, co więcej, zaleca ona proliferację alternatywnych hipotez, które następnie elimi-

[17]O ile zatem reprezentant formalistycznego spojrzenia na matematykę za zdania bazowe uzna po prostu aksjomaty danej teorii formalnej, to z punktu widzenia stanowiska Lakatosa te aksjomaty mogą znajdować się znacznie „wyżej" w hierarchii — zaś zdaniem bazowym może być jakieś zdanie, które z formalnego punktu widzenia jest twierdzeniem wymagającym dowodu.

[18]Sądzę, że bardzo dobrze ilustruje to przypadek rachunku prawdopodobieństwa. Jej aksjomatyzacja została podana przez Kołmogorowa dopiero w roku 1933, gdy tymczasem początki rachunku prawdopodobieństwa sięgają siedemnastowiecznych rozważań Pascala i Fermata. A zatem przez kilkaset lat ta dyscyplina się rozwijała, toczyła się w niej „walka pojęć" — i formalna aksjomatyzacja Kołmogorowa musiała ten kilkusetletni dorobek uwzględnić.

nuje się za pomocą surowej krytyki: metodologia quasi-empiryczna jest wysoce spekulatywna” [Lakatos 1978, 224–225].

Oczywiście, te potencjalne falsyfikatory nie mają nic (a w każdym razie — niewiele) wspólnego z falsyfikatorami w naukach empirycznych. Nie są bynajmniej zdaniami empirycznymi — Lakatos wcale nie uważa, iż matematyka stanowi generalizację danych empirycznych (jak chciał Mill). Stanowisko Lakatosa nie ma też wiele wspólnego z ujęciem Quine’a, który bardzo silnie akcentował związki matematyki z naukami empirycznymi, i w tych właśnie związkach poszukiwał uprawomocnienia dla realistycznej filozofii matematyki. Lakatos bada raczej wewnętrzne mechanizmy rozwoju matematyki, w zasadzie nie podejmując problematyki ontologicznej czy epistemologicznej. Jego empiryzm jest więc różny od empiryzmu Quine’a czy Milla nie tylko pod względem formułowanych tez, ale również stawianych pytań.

Jak może wyglądać taki potencjalny falsyfikator danej teorii matematycznej? Najprostszym przykładem jest zdanie wewnętrznie sprzeczne, które stanowi falsyfikator czysto logiczny. Jeśli teoria matematyczna prowadzi do sprzeczności, to oczywiście należy ją zmodyfikować (a być może — w skrajnym wypadku — całkowicie porzucić). Istnieją jednak również inne ważne potencjalne falsyfikatory — a mianowicie zdania bazowe, które zostały przez nas przyjęte w matematyce nieformalnej i które powinny zostać zachowane w wersji sformalizowanej (tak aby można było faktycznie mówić, że jest to sformalizowana wersja *istniejącej* teorii, a nie jakaś nowa teoria formalna). Zadaniem formalizacji jest bowiem podanie formalnej parafrazy, która „chwyta” nieformalne, ale już wcześniej obecne treści.

Ta obserwacja jest istotna z punktu widzenia analizy mechanizmu falsyfikacji — mechanizm ten może bowiem zacząć działać jedynie wtedy, jeśli faktycznie naszym celem jest zachowanie ciągłości pojęciowej między nieformalną teorią a jej sformalizowaną wersją — czyli w szczególności, jeśli uważamy, że teoria formalna ma zachować treść daną uprzednio. W przeciwnym wypadku nie może być mowy o falsyfikacji: „Jeśli przyjąć, że sformalizowana teoria aksjomatyczna definiuje *implicite* swój przedmiot, to wtedy nie ma innych falsyfikatorów matematycznych poza logicznymi. Jeśli jednak przyjąć, że teoria sformalizowana jest formalizacją pewnej teorii niesformalizowanej, to wtedy można powiedzieć, że teoria sformalizowana została obalona, jeżeli jakieś jej twierdzenie zostało zanegowane przez odpowiadające mu twierdzenie teorii niesformalizowanej. Takie twierdzenie niesformalizowane można by nazwać *falsyfikatorem heurystycznym* teorii sformalizowanej" [Lakatos 1978, 233]. Lakatos ilustruje ten problem przykładami dotyczacymi teorii mnogości. Twierdzi, że rolę potencjalnych falsyfikatorów heurystycznych mogłyby pełnić niektóre zdania arytmetyczne (sam podaje w tym kontekście przykład hipotezy Goldbacha[19]). Gdyby bowiem w formalnej teorii mnogości (np. ZFC) wykazano *fałszywość* takiego zdania, a tymczasem nasze przekonanie wyniesione ze zwykłej praktyki matematycznej byłoby odwrotne (sądzilibyśmy, że to zdanie jest *prawdziwe*), to mielibyśmy do czynienia właśnie z heurystyczną falsyfikacją formalnej wersji teorii mnogości[20]. Innym przykładem rozważanym przez Lakatosa jest hipoteza kontinuum — gdyby bowiem okazało się, że ma ona np. jakieś bardzo niepożądane konsekwencje (silnie sprzeczne z naszymi intuicyjnie ugruntowanymi przekonaniami), to stanowiłoby to argument *przeciwko* hipotezie kontinuum. Lakatos twierdzi w szczególności, że „nowy program euklidesowy" Gödla stanowi próbę przeprowadzenia takiej „konfrontacji" [Lakatos 1978, 237].

Lakatos odnosi się tutaj do uwag Gödla dotyczących drugiego — obok intuicyjnej oczywistości — kryterium prawdziwości aksjomatów matematycznych. Może być nim również ich owocność. Gödel pisał, iż

> [D]ecyzja dotycząca ich [nowych aksjomatów — K.W.] prawdziwości jest możliwa także w inny sposób, a mianowicie poprzez indukcyjną analizę ich ‘sukcesu'. Sukces oznacza tutaj

[19]Hipoteza Goldbacha głosi, że każda liczba naturalna parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych.

[20]Lakatos podaje inne przykłady, dotyczące dużych liczb kardynalnych. Twierdzi, że rolę heurystycznych falsyfikatorów mogą pełnić pewne zdania arytmetyczne. Moim zdaniem ta teza Lakatosa jest bardzo wątpliwa, ale nie chcę tutaj wchodzić w techniczne szczegóły.

> owocność w konsekwencje, w szczególności w konsekwencje ‘weryfikowalne’, tj. konsekwencje dowodliwe bez nowych aksjomatów, których dowody z pomocą nowych aksjomatów są jednakże zdecydowanie prostsze i łatwiejsze do odkrycia i umożliwiają zawarcie w jednym dowodzie wielu różnych dowodów. [...] Można jednak wyobrazić sobie o wiele wyższy poziom weryfikowania. Mogą istnieć aksjomaty tak owocne w sprawdzalne konsekwencje, rzucające tak dużo światła na całą dyscyplinę i dostarczające tak silnych metod rozwiązywania problemów (i to rozwiązywania konstruktywnego, tak dalece, jak jest to możliwe), że niezależnie od zagadnienia, czy są one wewnętrznie konieczne, powinny zostać zaakceptowane przynajmniej w takim stopniu, jak dowolna dobrze ugruntowana teoria fizyczna [Gödel 1947/64, 265].

Jest to zatem kryterium pośrednie i ma charakter w pewnym sensie indukcyjny: wiarygodność założeń ocenia się na podstawie wiarygodności wniosków z tych założeń. Można więc powiedzieć, że aksjomaty przyjmowane na mocy tego kryterium mają charakter hipotez wyjaśniających. Jest to metoda uprawniona, ponieważ naszym celem jest opis pewnej obiektywnie istniejącej rzeczywistości, a nie badanie konwencji. Gödel twierdzi wprost: „Jeśli matematyka opisuje obiektywny świat tak jak fizyka, nie ma powodu, aby metody indukcyjne nie miały mieć zastosowania w matematyce, tak samo jak w fizyce” [*Gödel 1951, 313]. Nowe aksjomaty mogą być przyjęte, jeśli jest to niezbędne z punktu widzenia rozwiązania pewnych otwartych problemów[21].

Lakatos w swoich pracach podaje przykłady zdań, które — jego zdaniem — mogą stanowić arytmetyczne falsyfikatory heurystyczne nowych aksjomatów teorii mnogości. Są to zdania, które wyrażają (po odpowiednim zakodowaniu składni) niesprzeczność odpowiednich systemów formalnych. Te przykłady Lakatosa uważam za dość nie-

[21]Gödel uważał problem wiarygodności nowych aksjomatów dla teorii mnogości za problem dobrze postawiony — za autentyczny problem poznawczy. Dodajmy, dla uniknięcia nieporozumień, że chodzi oczywiście tylko o problem *uzasadniania* aksjomatów, a nie o problem *dowodzenia* nowych twierdzeń.

fortunne i mało przekonujące[22]. Niezależnie jednak od tego, że poglądy Lakatosa są (w mojej ocenie) zbyt radykalne, trzeba przyznać, że jego analizy rzucają nowe światło na mechanizmy rozwoju matematyki i zwracają uwagę na zjawiska, którym filozofowie nurtu „fundacjonistycznego" nie poświęcili dostatecznej uwagi. Jego prace z pewnością zasługują na wnikliwą lekturę.

UWAGI KOŃCOWE

W tym podsumowaniu za punkty orientacyjne przyjmijmy następujące dwa pytania:

(1) Skąd wiemy, że jakieś zdanie matematyczne jest prawdą na temat świata matematycznego?

(2) Jakie są mechanizmy tworzenia wiedzy matematycznej?

Quine odpowiada na pytanie (1) odwołując się do swojej koncepcji istnienia i swojej holistycznej koncepcji teorii naukowych. Zdaniom matematycznym przypisujemy interpretację dzięki temu, że występują w zinterpretowanych teoriach naukowych. Quasi-empiryzm Quine'a dotyczy więc problemu ontologicznego: czy zdania matematyki są prawdziwe (w klasycznym sensie), czy istnieje pozajęzykowe odniesienie dla zdań matematycznych? W skrócie: czy matematyka ma swój przedmiot badań? Odpowiedź Quine'a jest pozytywna, choć z zastrzeżeniami: teza matematycznego realizmu może być uzasadniona w stosunku do tych fragmentów matematyki, które mają zastosowanie w naukach empirycznych. Można więc powiedzieć, że to zastosowania stanowią uprawomocnienie dla realistycznej koncepcji matematyki.

Lakatos nie podejmuje dyskusji ontologicznej; przebieg dyskusji realizm-antyrealizm nie ma większego znaczenia z punktu widzenia jego koncepcji[23]. Jego badania dotyczą bowiem mechanizmów roz-

[22] Szczegółową analizę Czytelnik znajdzie w pracy [Wójtowicz 2007].

[23] Należy przyznać, że przypisuje on zdaniom matematycznym *treść* — nie uważa bynajmniej, że są zestawem pustych treściowo konwencji. Jednak mówiąc o tej treści, nie deklaruje, że wynika to np. stąd, że istnieją abstrakcyjne byty matematyczne.

woju matematyki, a jego quasi-empirystyczna teza ma charakter czysto metodologiczny[24]. Lakatos zajmuje się więc tylko pytaniem (2), twierdząc, że owe mechanizmy są bardzo podobne do mechanizmów charakterystycznych dla nauk empirycznych: mamy do czynienia z formułowaniem i obalaniem hipotez, oraz z tworzeniem hipotez wyjaśniających dla „empirycznych danych" (jakimi są zdania bazowe). Według Lakatosa dopiero dowartościowanie tych czynników pozwoli na lepsze zrozumienie natury matematyki, gdyż obraz prezentowany przez filozofie „dogmatyczne" jest zniekształcony. Natomiast Quine bynajmniej nie twierdzi, że sama matematyka ma być uprawiana na podobieństwo nauk empirycznych — choć uwzględnienie jej związków z naukami empirycznymi jest dla dyskusji filozoficznej niezwykle istotne.

Okazuje się więc, że termin „matematyczny quasi-empiryzm" może mieć bardzo różne znaczenia. Różni jego reprezentanci nawet nie tyle się ze sobą nie zgadzają, co po prostu ze sobą nie rozmawiają, zajmując się inną problematyką.

BIBLIOGRAFIA

Carnap R.,

[1950] "Empiricism, semantics and ontology", *Revue Internationale de Philosophie* 4, 20–40; [przedruk w:] *Philosophy of Mathematics*, [eds.:] Benacerraf P., Putnam H., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964, 233–248; [pol. tłum.:] „Empiryzm, semantyka i ontologia", [w:] *Pisma semantyczne*, Fundacja Aletheia, Warszawa, 2007, 417–433.

Davis P.J., Hersh R.,

[1994] *Świat matematyki*, Warszawa, WNT.

Dieudonne J.,

[1970] "The Work of Nicholas Bourbaki", *American Mathematical Monthly* 77, 134–145.

[24] „Teoria, która jest quasi-empiryczna w moim sensie, może być albo empiryczna, albo nieempiryczna w zwykłym sensie" [Lakatos 1978, 224].

Gödel K.,

[1947/64] "What is Cantor's Continuum Problem?", *American Mathematical Monthly* 54, 515–525; [w rozszerzonej wersji przedrukowane w:] *Philosophy of Mathematics*, [eds.:] Benacerraf P., Putnam H., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964, 258–273; [a także w:] *Collected Works*, vol. 2, [eds.:] Feferman S. *et al.*, Oxford University Press, 1990, 254–270.

[*1951] "Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications", [in:] *Collected Works*, vol. 3, [eds.:] Feferman S. *et al.*, Oxford University Press, 1995, 304–323.

Hammond A.L.,

[1983] „Matematyka — nasza niedostrzegalna kultura", [w:] *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, [red.:] Steen L.A., WNT, Warszawa, 26–48.

Hardy G.H.,

[1929] "Mathematical Proof", *Mind* 38, 1–25.

Lakatos I.,

[1976] *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge; [pol. tłum. na podst. wyd. z 1999:] *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, [red.:] Worral J., Zahar E., [tłum.:] Kozłowski M., Lipszyc K., Tikkun, Warszawa, 2005.

[1978] "A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics?", [in:] *Philosophical Papers*, t. 2, *Mathematics, Science and Epistemology*, [eds.:] Worall J., Currie G., Cambridge University Press, 24–42; [pol. tłum.:] „Renesans empiryzmu we współczesnej filozofii matematyki?", [w:] *Współczesna filozofia matematyki*, [red.:] Murawski R., PWN, Warszawa 2002, 215–243.

Mill J.St.,

[1962] *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej*, t. II, PWN, Warszawa.

Putnam H.,

[1975] "What is Mathematical Truth?", [in:] *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers*, t. 1, Cambridge University Press, 60–78; [tłum. pol.:] „Czym jest prawda matematyczna?", [w:] *Współczesna filozofia matematyki*, [red.:] Murawski R., PWN, Warszawa 2002, 244–265.

Quine W.V.O.,

[1953a] "On What There Is", [in:] *From a Logical Point of View*, Cambridge, Harvard University Press, 1–19; [tłum. pol.:] „O tym, co istnieje", [w:] *Z punktu widzenia logiki*, [red.:] Stanosz B., PWN, Warszawa 1969, 9–34.

[1953b] "Two Dogmas of Empiricism", [in:] *From a Logical Point of View*, Cambridge, Harvard University Press, 20–46; [tłum. pol.:] „Dwa dogmaty empiryzmu", [w:] *Z punktu widzenia logiki*, PWN, Warszawa 1969, 35–70.

[1981] "Things and Their Place in Theories", [in:] *Theories and Things*, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, MA, 1–23; [tłum. pol.:] „Rzeczy i ich miejsca w teoriach", [w:] *Metafizyka w filozofii analitycznej*, [red.:] Szubka T., Lublin, TN KUL, 1995, 31–52.

[1984] "Review of Parsons C. Mathematics in Philosophy", *Journal of Philosophy* 81, 783–794.

Wójtowicz K.,

[2007] „Filozofia matematyki Imre Lakatosa", *Roczniki Filozoficzne* LV, (1), 229–247.

SUMMARY

THE KINDS OF MATHEMATICAL QUASI-EMPIRICISM

The received view concerning mathematics is the one, that mathematics is *a priori*, and that mathematical knowledge develops via *intelektuelle Anschauung* rather than by analyzing empirical data. Mathematical proofs seems to be immune to empirical refutation, and in particular the development of mathematics does not in any way resemble the development of e.g. physics.

On the other hand, it is quite clear, that mathematics play a fundamental role in science, and it is often considered to be rather just a useful tool, which provides a language and a conceptual system allowing to express statements concerning empirical world. Such views stress the dependence of mathematics upon physics. In the article, I present two quite different aspects of this problem: the ontological and the methodological aspects.

According to Quine, our argumentation in favor of mathematical realism should be based on the analysis of ontological commitment of empirical theories. There is no other compelling argument for mathematical realism. According to Lakatos, mathematical knowledge develops in a way similar to empirical science: it is fallible, and the proper model to describe it is the model of proofs and refutations. In the article I describe and contrast these two points of view.