ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XLVII (2010), 38–53

Michał HELLER
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych w Krakowie

NIEPRZEMIENNE RACHUNKI PRAWDOPODOBIEŃSTWA

0. WPROWADZENIE

Gdy zastanawiamy się nad pojęciem prawdopodobieństwa, nie sposób nie poświęcić więcej uwagi mechanice kwantowej. Nie tylko dlatego, że jest ona *par excellence* teorią probabilistyczną, ale również — lub nawet przede wszystkim — dlatego, że zrewolucjonizowała ona nasze rozumienie prawdopodobieństwa. Choć trzeba przyznać, że ten ostatni fakt nie przeniknął jeszcze wystarczająco głęboko do świadomości wielu myślicieli. Oczywiście wszyscy, którzy zetknęli się z mechaniką kwantową, wiedzą, że pozwala ona przewidywać wyniki eksperymentów tylko z pewnym prawdopodobieństwem, ale tylko ci, którzy głębiej wniknęli w matematyczny aparat tej pięknej teorii fizycznej, zdają sobie sprawę z tego, jak bardzo klasyczne pojęcie prawdopodobieństwa musiało się przystosować do wymagań fizyki kwantowej, a i oni nie zawsze są świadomi głębokiego filozoficznego znaczenia tego faktu. W tym rozdziale właśnie nad tym chcę się zastanowić. Ale nie jedynie. Bo mechanika kwantowa nie tylko ukazała nowe oblicze prawdopodobieństwa, ale zapoczątkowała również proces jego uogólnień. A kolejne uogólnienia to kolejne transformacje pojęciowe. W przypadku zaś, gdy przeobrażeniom ulega pojęcie prawdopodobieństwa, transformacje mogą oznaczać konieczność przebudowy szeregu ważnych koncepcji filozoficznych.

1. TROCHĘ HISTORII

Zacznijmy od wprowadzenia historycznego. Jak wiadomo[1], wystąpienie Hilberta na Międzynarodowym Kongresie w Paryżu w 1900 r. miało wielki wpływ na późniejszy rozwój teorii prawdopodobieństwa. Na liście Hilberta nierozwiązanych problemów matematyki znalazł się problem szósty, zwracający uwagę na konieczność zaksjomatyzowania tych działów fizyki, „w których matematyka odgrywa decydującą rolę”. Takimi działami są, wedle Hilberta, rachunek prawdopodobieństwa[2] i mechanika statystyczna. Wielu matematyków podjęło wyzwanie Hilberta. Jak wiadomo, w tym nurcie badań Kołmogorow ostatecznie dokonał aksjomatyzacji rachunku prawdopodobieństwa.

W jesiennym semestrze roku akademickiego 1926/1927 w Getyndze Hilbert wygłosił serię wykładów poświęconych mechanice kwantowej, która wówczas była jeszcze owiana atmosferą sensacyjnej nowości. W przygotowaniu tych wykładów pomagali mu jego asystencji, Lothar Nordheim i John von Neumann. Wkrótce ukazało się drukiem ich wspólne opracowanie wykładów[3]. Von Neumann zainteresował się głębiej tą problematyką i niedługo potem opublikował trzy prace, które okazały się fundamentalne w tej dziedzinie[4]. Dały one początek podstawowej monografii poświęconej matematycznym podstawom mechaniki kwantowej[5].

---

[1]Por. mój art.: „Rewolucja probabilistyczna”, w: *Rozważania o filozofii prawdziwej — Jerzemu Perzanowskiemu w darze*, red.: J. Sytnik-Czetwertyński, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2009, ss. 203–218; o wystąpieniu Hilberta na s. 206.

[2]W tamtych czasach rachunek prawdopodobieństwa był praktycznie utożsamiany z jego zastosowaniami do fizyki.

[3]„Über die Grundlagen der Quantenmechanik”, *Mathematische Annalen* 98, 1927, ss. 1–30.

[4]„Mathematische Begründung der Quantenmechanik”, *Göttingen Nachrichten*, 1927, ss. 1–5; „Warscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik”, tamże, 1927, ss. 245–272; „Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten”, tamże, 1927, ss. 273–291. Prace te można również znaleźć w: J. von Neumann, *Collected Works*, red.: A.H. Taub, 3 tomy, Pergamon Press, New York — Oxford, 1961.

[5]J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin 1932.

W podejściu von Neumanna podstawową rolę odgrywają algebry operatorów działających na przestrzeniach Hilberta. Znana praca Murraya i von Neumanna[6] zapoczątkowała rozbudowaną dziś teorię tych operatorów. Pewna ich klasa, na której swoją uwagę skupili Murray i von Neumann, z czasem zyskała sobie nazwę algebr von Neumanna. Właśnie ta klasa operatorów odgrywa podstawową rolę w teoretycznej warstwie mechaniki kwantowej. Podanie definicji algebr von Neumanna wymagałoby zaawansowanego zaplecza technicznego[7], ale przedstawmy przynajmniej niektóre (zadziwiające!) ich cechy.

2. TROCHĘ MATEMATYKI: NIEKTÓRE WŁASNOŚCI ALGEBR VON NEUMANNA

W matematycznym formalizmie mechaniki kwantowej stany kwantowego układu (np. elektronu) są reprezentowane przez elementy (zwane również wektorami) przestrzeni Hilberta. Podstawowa struktura przestrzeni Hilberta jest taka sama jak zwykłych przestrzeni wektorowych, ale na tej strukturze są nadbudowane bogate własności, dzięki którym przestrzenie Hilberta doskonale modelują stany układów kwantowych.

Jeżeli mierzymy jakąś własność układu kwantowego, np. spin elektronu, to akt pomiaru zaburza układ, zmieniając jego stan. Tym właśnie pomiary kwantowe różnią się od pomiarów makroskopowych. Mierząc długość stołu przez przykładanie do niego sztywnego pręta, w żaden zauważalny sposób nie zaburzamy długości stołu. Pomiar „nad układem kwantowym" (jak mówią fizycy) jest prawdziwą inwazją, w wyniku której układ przechodzi ze „stanu początkowego" do „stanu końcowego". Procesowi temu towarzyszy uzyskanie liczby lub liczb (wyników pomiaru) na skali aparatu (lub na wyjściach odpowiednich komputerów). Dokładnie to samo dzieje się, gdy odpowiednim operatorem zadziałamy na wektor przestrzeni Hilberta, reprezentujący stan jakie-

[6] F.J. Murray, J. von Neumann, „On Rings of Operators", *Annals of Mathematics* 37, 1936, ss. 116–229.

[7] W miarę przystępnie przedstawioną ich definicję można znaleźć w mojej książce: *Mechanika kwantowa dla filozofów*, OBI, Kraków 1996, rozdz. 2.

goś układu kwantowego. Zadziałanie to powoduje, że „wektor początkowy" zamienia się na „ wektor końcowy" przestrzeni Hilberta, a operator produkuje liczby, będące możliwymi wynikami pomiaru.

Czy nie jest to zadziwiające, że rzeczywiste procesy kwantowe są posłuszne jakimś abstrakcyjnym operacjom matematycznym?!

Wszyscy znamy operację rzutowania. Słońce rzutuje mój cień na płaszczyznę chodnika. Uczeń w szkole średniej wie (lub powinien wiedzieć), jak zrzutować wektor na oś układu współrzędnych. Wektory przestrzeni Hilberta także można rzutować na różne kierunki lub płaszczyzny. Mamy więc wektor przed zrzutowaniem na jakąś „podprzestrzeń" przestrzeni Hilberta, i wektor po zrzutowaniu. Zrzutowania dokonuje operator przeprowadzający wektor przed zrzutowaniem na wektor po zrzutowaniu. Operator taki nazywa się operatorem rzutowym. Może on produkować tylko dwie liczby: jeden — jeżeli działa na wektor, który daje się zrzutować na daną podprzestrzeń; i zero — jeżeli działa na wektor, którego nie da się zrzutować na daną podprzestrzeń (ma to miejsce wtedy, gdy rzutowany wektor jest prostopadły do podprzestrzeni[8]; wówczas jego rzut jest zerowy).

Otóż algebra von Neumanna to taka algebra operatorów działających na przestrzeni Hilberta, którą da się w całości zrekonstruować z operatorów rzutowych (w języku matematyków taką algebrę nazywa się generowaną przez operatory rzutowe). Można na to spojrzeć pod nieco innym kątem: zamiast mówić o operatorach rzutowych, możemy mówić o podprzestrzeniach, na które te operatory rzutują. Z tego punktu widzenia algebra von Neumanna to taka algebra operatorowa, którą można odzyskać, badając strukturę, jaką tworzą wszystkie podprzestrzenie przestrzeni Hilberta stowarzyszonej z interesującą nas algebrą operatorów (tzn. przestrzeni Hilberta, na którą te operatory działają)[9]. Ten właśnie punkt widzenia obficie wykorzystali Murray i von

[8]W sensie prostopadłości odpowiednio zdefiniowanej dla danej przestrzeni Hilberta.

[9]Istnieje jeszcze jeden, czysto algebraiczny (bez odwoływania się do przestrzeni Hilberta) sposób definiowania algebry von Neumanna. W tym ujęciu algebrę von Neumanna utożsamia się z przestrzenią dualną do pewnej przestrzeni Banacha. Ta ostatnia jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu.

Neumann w swojej oryginalnej pracy, a inni matematycy poszli potem ich śladem.

3. PROGRAM VON NEUMANNA

W 1954 r. miał się odbyć kolejny Międzynarodowy Kongres Matematyków w Amsterdamie. Organizatorzy poprosili von Neumanna, aby — podobnie jak to uczynił Hilbert pół wieku przedtem — podjął się sformułowania najważniejszych problemów matematyki czekających na rozwiązanie. Von Neumann nie tylko podjął wyzwanie, lecz również w znacznej mierze poszedł śladem wyznaczonym przez swego poprzednika. W swoim Szóstym Problemie Hilbert postulował zaksjomatyzowanie tych działów fizyki „w których matematyka odgrywa dominującą rolę". Obecnie takim działem fizyki stała się mechanika kwantowa. Von Neumann postulował więc, by dokonać jej aksjomatyzacji. Zresztą praca, jaką już wykonał, wyraźnie zmierzała w tym kierunku. Jego program był ambitny. Chciał on stworzyć system aksjomatyczny, w którym logika, probabilistyka i mechanika kwantowa zyskałyby geometryczną interpretację. W wyniku tego programu mechanika kwantowa, wraz ze swoimi głęboko probabilistycznymi cechami, zyskałaby logiczną przejrzystość i geometryczną precyzję.

Program von Neumanna nie zyskał takiego rozgłosu jak słynne Nierozwiązane Problemy Matematyki Hilberta. Był zapewne przedwczesny. Dziś wiemy, że przed podjęciem próby unifikacji logiki, geometrii i teorii prawdopodobieństwa, trzeba wszystkie te dyscypliny radykalnie uogólnić. Jak zobaczymy poniżej, proces ten właśnie się dokonuje. Ażeby jednak już teraz uchwycić, na czym polegały intuicje von Neumanna, spójrzmy jeszcze raz na algebrę operatorów na przestrzeni Hilberta[10].

Operatory rzutowe, działając na wektory w przestrzeni Hilberta, produkują tylko dwie liczby[11]: albo jeden, albo zero. Tu właśnie

[10]Dokładniej por.: G. Valente, „John von Neumann's Mathematical ‘Utopia' in Quantum Theory", *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 39, 2008, ss. 860–871.

[11]Tzw. wartości własne tych operatorów.

pojawia się związek z logiką. Jak wiadomo, w rachunku zdań zdaniom prawdziwym przypisuje się wartość logiczną równą jeden, a zdaniom fałszywym wartość logiczną równą zero. Okazuje się, że przy pomocy operatorów rzutowych można odtworzyć cały klasyczny rachunek zdań; z ważnym wyjątkiem: w „logice operatorów" nie jest spełnione klasyczne prawo, zwane prawem rozdzielczości koniunkcji względem alternatywy[12]. Odzwierciedla to specyfikę mechaniki kwantowej, w której — na skutek jej probabilistycznego charakteru — zaciera się różnica między spójnikiem „i" (koniunkcja) a spójnikiem „lub" (alternatywa).

Ponieważ struktura operatorów rzutowych odciska się na strukturze przestrzeni Hilberta, uzasadnione jest twierdzenie, że struktura przestrzeni Hilberta (poprzez geometrię jej podprzestrzeni) koduje w sobie logiczny rachunek zdań, choć zmodyfikowany w porównaniu z klasycznym rachunkiem zdań, i to zmodyfikowany w takim stopniu, w jakim wymaga tego mechanika kwantowa[13].

Związki pomiędzy całą tą konstrukcją a rachunkiem prawdopodobieństwa sięgają znacznie głębiej niż tylko do modyfikacji jednego z praw klasycznego rachunku zdań. Ukazanie tego wymaga nieco więcej pracy przygotowawczej.

4. TROCHĘ RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Przypomnijmy sobie definicje przestrzeni probabilistycznej. Jest nią trójka (X, S, p), gdzie X jest pewnym zbiorem (będziemy go również nazywać przestrzenią), S zbiorem jego podzbiorów[14], a p funkcją, która podzbiorom należącym do S przypisuje liczby z przedziału $[0, 1]$, co zapisujemy: $p\colon S \to [0, 1]$. Podzbiory należące do S nazywamy zdarzeniami, a liczby $p(s)$, $s \in S$, prawdopodobieństwem tego, że zdarzenie s może się zdarzyć. Przy czym zachodzi dość oczywisty

[12] W standardowym zapisie logicznym przyjmuje ono postać:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

[13] Obszerniej por. np. w mojej książce: *Mechanika kwantowa dla filozofów*, OBI — Kraków, Biblos — Tarnów, 1996, rozdz. 11.

[14] Spełniającym aksjomaty σ-algebry.

związek:

$$p(s_1 + s_2 + s_3 + \ldots) = p(s_1) + p(s_2) + p(s_3) + \ldots$$

który mówi, że prawdopodobieństwo sumy zdarzeń równa się sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń (dla dowolnego przeliczalnego zbioru zdarzeń, które są ze sobą rozłączne).

Ważnym pojęciem w rachunku prawdopodobieństwa jest pojęcie zmiennej losowej. Jest to funkcja, która zdarzeniom przypisuje liczby. W życiu codziennym pewnym obiektom lub zdarzeniom niekiedy także przypisujemy liczby. Na przykład stołowi przypisujemy jego długość, a zachodowi słońca godzinę, w której słońce zaszło (dla uproszczenia obiekty też będziemy nazywać zdarzeniami). Zdarzeniom o charakterze losowym nie można jednoznacznie przypisywać tego rodzaju „miar”. Można jednak przypisywać im liczby wedle pewnej, z góry ustalonej reguły, tak aby dało się jakoś porównywać je ze sobą. Np. wynikom rzutów monetą możemy przypisać liczby $\frac{1}{2}$, a rzutu kostką możemy przypisać liczby $\frac{1}{6}$. Zabieg ten służy do tego, by pewne prawidłowości związane z liczbami rzeczywistymi można było przenosić na występowanie zdarzeń losowych. Formalizując te intuicje, powiemy, że zmienną losową jest funkcja f określona na zbiorze X, przyjmująca wartość w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, czyli $f : X \to \mathbf{R}$, przy czym odpowiedni aksjomat zapewnia, iż funkcja ta przenosi pewne „dobre własności” przestrzeni liczb rzeczywistych na przestrzeń X[15].

Rozważmy dowolny podzbiór A przestrzeni X należący do rodziny podzbiorów S i określmy funkcję χ_A w następujący sposób: $\chi_A(x) = 1$, jeżeli x należy do zbioru A i $\chi_A = 0$, jeżeli x nie należy do zbioru A. Jest rzeczą oczywistą, że funkcja χ_A określa zbiór A jednoznacznie; nazywamy ja funkcją charakterystyczną zbioru A. Zbiór wszystkich funkcji tego rodzaju (dla wszystkich podzbiorów należących do rodziny S) oznaczmy przez $\mathcal{P}(S)$. Dochodzimy do ciekawego wniosku. Okazuje się, że funkcje te generują pewną algebrę von Neumanna, w której odgrywają one rolę operatorów rzutowych. Jak na operatory rzutowe

[15] Aksjomat gwarantujący tę własność ma postać: Jeśeli B jest elementem borelowskiej σ-algebry na $\mathbf{R}$, to $f^{-1}(B)$ jest elementem S, czyli S jest borelowską σ-algebrą na X.

przystało, produkują one liczby: jeden i zero. Algebra von Neumanna, o której mowa, składa się z funkcji określonych na przestrzeni probabilistycznej (X, S, p); oznacza się ją symbolem $L^\infty(X, S, p)$[16]. Ponieważ elementami tej algebry von Neumanna są funkcje, a mnożenie funkcji nie zależy od ich kolejności, mamy do czynienia z *przemienną* algebrą von Neumanna. Ale algebra von Neumanna winna działać na jakiejś przestrzeni Hilberta. Tak jest i tym razem. Tę przestrzeń Hilberta, na której działa algebra von Neumanna $L^\infty(X, S, p)$ oznacza się symbolem $L^2(X, S, p)$. Jest to również przestrzeń funkcyjna[17]. Funkcje należące do algebry von Neumanna $L^\infty(X, S, p)$ działają na funkcje należące do przestrzeni Hilberta $L^2(X, S, p)$ przez zwykłe mnożenie.

W ten sposób dochodzimy do ciekawego wniosku: cała klasyczna teoria prawdopodobieństwa sprowadza się do tego, że istnieje przemienna algebra von Neumanna $L^\infty(X, S, p)$, generowana przez funkcje charakterystyczne (rzuty) należące do $\mathcal{P}(S)$, która działa na przestrzeń Hilberta $L^2(X, S, p)$. Musimy jeszcze dopowiedzieć, co w tej konstrukcji odpowiada mierze probabilistycznej p. Wymaga to kilku zdań przygotowania.

Rozważmy jakąś algebrę, np. algebrę von Neumanna $M = L^\infty(X, S, p)$. Odwzorowanie (liniowe) ϕ, przyporządkowujące elementom tej algebry liczby rzeczywiste lub zespolone, tzn. $\phi\colon M \to \mathbf{K}$ (gdzie $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ lub $\mathbf{K} = \mathbf{C}$), nazywa się funkcjonałem na tej algebrze[18]. Jeżeli taki funkcjonał ϕ ma dodatkowo dwie własności: (1) jest dodatni[19] oraz (2) „unormowany do jedności"[20], to taki funkcjonał nazywamy stanem na algebrze M.

Otóż okazuje się, że miara probabilistyczna jednoznacznie determinuje pewien stan ϕ na algebrze von Neumanna M[21]. Możemy te-

[16]Przestrzenie tego typu są bardzo dobrze znane w matematyce; składają się one z funkcji mierzalnych, ograniczonych.

[17]Jest ona także dobrze znana w matematyce; nazywa się ją przestrzenią funkcji całkowalnych z kwadratem.

[18]W rozważanym przypadku można powiedzieć, że funkcjonał jest „funkcją na funkcjach".

[19]Tzn. $\phi(f^* f) \geq 0$ dla każdego $f \in M$.

[20]Co w języku matematyków znaczy, że norma funkcjonału ϕ równa jest jedności, $\|\phi\| = 1$.

[21]Stan ten wyraża się wzorem: $\phi = \int_X f(x)\, dp(x)$.

raz krótko powiedzieć, że klasycznym rachunkiem prawdopodobieństwa jest para (M, ϕ), gdzie M jest przemienną algebrą von Neumanna $L^{\infty}(X, S, p)$ a ϕ pewnym stanem na tej algebrze[22].

Czy cała ta złożona konstrukcja to tylko kwestia matematycznej elegancji? Nie tylko. Wyjściowe określenie przestrzeni probabilistycznej (X, S, p) jest niewątpliwie prostsze i łatwiejsze w zastosowaniach, ale ograniczając się tylko do niego, nie widać możliwości dalszych uogólnień, podczas gdy ujęcie teorii prawdopodobieństwa w języku przemiennych algebr von Neumanna natychmiast sugeruje sposób, w jaki teorię prawdopodobieństwa można uogólnić. Dlaczego algebra von Neumanna musi być przemienna? A może by użyć nieprzemiennych algebr von Neumanna?

5. NIEPRZEMIENNA TEORIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

W ostatnim pytaniu poprzedniego podrozdziału mieści się sugestia: odrzućmy założenie przemienności algebry von Neumanna i za uogólnioną przestrzeń prawdopodobieństwa uznajmy parę (M, ϕ), gdzie M jest niekoniecznie przemienną algebrą von Neumanna, a ϕ stanem na M. Jest to istotnie uogólnienie, bo gdy ograniczymy się do przypadku, gdy M jest przemienną algebrą von Neumanna, otrzymujemy klasyczną przestrzeń prawdopodobieństwa.

Ażeby nasze uogólnienie było całkiem poprawne, musimy jeszcze narzucić pewne ograniczenie na stan ϕ. Otóż stan ϕ, rozumiany jako uogólniona miara probabilistyczna, musi gwarantować spełnienie odpowiednika klasycznej reguły stwierdzającej, że prawdopodobieństwo sumy zdarzeń równa się sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń. Stan, spełniający ten warunek, nazywa się stanem normalnym[23].

Podsumowując, powiemy, że nieprzemienną przestrzenią probabilistyczną nazywamy parę (M, ϕ), gdzie M jest algebrą non Neumanna (niekoniecznie przemienną), a ϕ normalnym stanem na M. Jest to silne

[22] W określeniu tym nie musimy wymieniać przestrzeni Hilberta $L^2(X, S, p)$, ponieważ jej istnienie jest założone w istnieniu algebry von Neumanna $L^{\infty}(X, S, p)$.

[23] Stan ϕ na algebrze von Neumanna M jest stanem normalnym, jeżeli spełnia związek: $\phi(\sum_{n\in\mathbf{N}} P_n) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \phi(P_n)$ dla każdej przeliczalnej rodziny $\{P_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ wzajemnie ortogonalnych operatorów rzutowych w M.

uogólnienie przypadku klasycznego, co przejawia się, między innymi, w tym, że w przypadku klasycznym mamy w zasadzie jedną matematycznie interesującą miarę probabilistyczną[24], podczas gdy w przypadku nieprzemiennym istnieje ogromne bogactwo różnych miar.

Jeżeli Czytelnik przebrnął przez ten żmudny łańcuch wprowadzania kolejnych pojęć, na pewno sam dostrzeże narzucający się wniosek: pojęcie prawdopodobieństwa, jakie funkcjonuje w mechanice kwantowej, jest ściśle związane z nieprzemienną teorią prawdopodobieństwa. Tak jest w istocie. Można nawet powiedzieć, że wszystkie wyobrażeniowe i interpretacyjne trudności, jakie sprawia nam mechanika kwantowa, są następstwem tego, iż intuicyjnie przejrzyste pojęcie klasycznego prawdopodobieństwa zostało w niej zastąpione przez jego nieprzemienne uogólnienie.

Nie znaczy to jednak, że klasyczne pojęcie prawdopodobieństwa zostało z mechaniki kwantowej całkowicie wyeliminowane. Nie wszystkie operatory, odpowiadające wielkościom obserwowalnym mnożą się w sposób nieprzemienny i tam, gdzie nieprzemienność nie występuje, wszystkie rachunki wykonuje się w sposób klasyczny. Nie niszczy to jednak spójności matematycznej struktury mechaniki kwantowej, wszak klasyczna teoria prawdopodobieństwa jest granicznym przypadkiem teorii nieprzemiennej. Mamy tu do czynienia z naprawdę piękną strukturą matematyczną.

Dodajmy jeszcze tytułem uzupełnienia, że ważnym rozszerzeniem standardowej (nierelatywistycznej) mechaniki kwantowej jest kwantowa statystyka i kwantowa teoria pola. Rozważa się w nich układy z nieskończoną liczbą stopni swobody. Wymaga to istotnego uogólnienia aparatu matematycznego. O ile w przypadku standardowej mechaniki kwantowej można by jeszcze utrzymywać, że ujęcie algebraiczne jest tylko kwestią większej elegancji, o tyle w przypadku kwantowych statystyk i kwantowych teorii pól ujęcie algebraiczne staje się nieodzownym narzędziem badawczym. Co więcej, algebry von Neumanna, jakie są tu nieodzowne, odznaczają się znacznie większym

[24] Jest nią miara Lebesgue'a.

stopniem skomplikowania i wymagają znacznie większego kunsztu matematycznego[25].

6. WOLNY RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Ważnym pojęciem klasycznej teorii prawdopodobieństwa jest pojęcie niezależności zdarzeń losowych. Mówiliśmy na przykład, iż zakłada się, że kolejne rzuty kostką lub monetą nie zależą od siebie, tzn. że wynik danego rzutu nie zależy od wyników rzutów poprzednich. To założenie odgrywa istotną rolę w wielu teoretycznych rozważaniach i w wielu praktycznych zastosowaniach. Pojęcie to ma także swoje nieprzemienne uogólnienie.

Ale w uogólnieniach rozmaitych matematycznych struktur, a także różnych matematycznych teoriach, niekiedy pojawiają się pojęcia, nie mające swoich odpowiedników w strukturach lub teoriach, które dały początek danemu uogólnieniu. Na przykład tak ważne pojęcie w mechanice kwantowej, jakim jest pojęcie spinu cząstki elementarnej, nie ma swojego odpowiednika w fizyce klasycznej. Otóż okazuje się, że w nieprzemiennej teorii prawdopodobieństwa istnieje pojęcie podobne do niezależności, które jednak — ściśle rzecz biorąc — nie ma swojego odpowiednika w klasycznej teorii prawdopodobieństwa. Pojęcie to pojawiło się w połowie lat osiemdziesiątych zeszłego stulecia w pracach Dona Voiculescu, dotyczących pewnych zagadnień związanych z algebrami von Neumanna. Podalgebry algebry von Neumanna, „niezależne” w tym nowym znaczeniu, Voiculescu nazwał wolnymi (*free*) podalgebrami. Ten nurt badań dał z czasem początek nowemu działowi probabilistyki, który obecnie nazywa się wolną teorią prawdopodobieństwa[26]. Ujawnia się coraz więcej jego powiązań z różnymi działami matematyki i znajduje on coraz więcej jego zastosowań w fizyce.

---

[25] W nierelatywistycznej mechanice kwantowej występują w zasadzie tylko algebry von Neumanna typu I, podczas gdy w kwantowych statystykach i kwantowych teoriach pola występują algebry von Neumanna wszystkich typów.

[26] Dobrym artykułem wprowadzającym jest: Ph. Biane, „Free Probability for Probabilists”, arXiv:math.PR/98/9809193. Warto również sięgnąć do: D.V. Voiculescu, K.J. Dukema, A. Nica, *Free Random Variables*, American Mathematical Society, Providence 1992.

Ażeby ukazać zaskakującą skuteczność tej nowej teorii, rozpatrzmy jeden, ale bardzo znamienny, przykład. Zagadnienie jest czysto matematyczne, ale z konsekwencjami dla fizyki kwantowej.

W praktycznych rachunkach elementy algebr von Neumanna przedstawia się przy pomocy macierzy kwadratowych o N wierszach i N kolumnach (mówi się o macierzy $N \times N$). Jak wiadomo, niektóre macierze (operatory)[27] odpowiadają wielkościom mierzalnym. Macierze takie produkują liczby (tzw. wielkości własne), które odpowiadają możliwym wynikom pomiarów danej wielkości obserwowalnej. Zbiór tych liczb nazywa się spektrum danej macierzy (operatora). Niech będą dane dwie tego rodzaju macierze, macierz A i macierz B, obie typu $N \times N$. Załóżmy, że znamy ich spektra i chcemy obliczyć spektrum macierzy $A+B$. Gdy N jest duże, zadanie jest bardzo trudne do rozwiązania. W sukurs przychodzi tu wolna teoria prawdopodobieństwa. Pozwala ona w sposób ścisły sformułować i udowodnić następujący wniosek: Jeżeli w powyższym przykładzie liczba kolumn (i liczba wierszy) macierzy A i B dąży do nieskończoności (tzn. $N \to \infty$), to możemy obliczyć spektrum macierzy $A + B$, nawet nie znając dokładnej struktury macierzy A i B (oddzielnie), przy pomocy ściśle określonego wzoru[28] i prawdopodobieństwo, że wynik będzie trafny, będzie bardzo duże.

Jest to wynik naprawdę zaskakujący. Gdy N staje się „naprawdę duże" ($N \to \infty$), dochodzą do głosu własności probabilistyczne, które nie pojawiały się dla małych N. Czegoś takiego nie ma w klasycznym rachunku prawdopodobieństwa.

7. KONSEKWENCJE

Fakt istnienia uogólnień klasycznej teorii prawdopodobieństwa ma daleko idące konsekwencje dla matematyki, fizyki, a także dla pewnych rozważań o charakterze filozoficznym.

[27] Chodzi o macierze (operatory) hermitowskie.

[28] Jeżeli miary probabilistyczne, odpowiednio na spektrach macierzy A i B, są μ_A i μ_B, to miara probabilistyczna na spektrum macierzy $A + B$ jest wolną konwolucją miar μ_A i μ_B.

Aksjomatyka klasycznego rachunku prawdopodobieństwa, dokonana przez Kołmogorowa, włączyła rozważania probabilistyczne w główny nurt rozwoju matematyki i tym samym weszła w silne oddziaływanie z innymi teoriami matematycznymi[29]. Naturalnym kierunkiem ewolucyjnym matematyki jest dążenie do uogólnień. Pierwszy sygnał konieczności dokonania uogólnienia klasycznego pojęcia prawdopodobieństwa przyszedł ze strony fizyki. Podobnie jak to już często bywało w historii nauki, w pierwszej fazie fizycy kwantowi posługiwali się uogólnionym prawdopodobieństwem w sposób spontaniczny i nie całkiem świadomy, a dopiero potem przyszedł czas na matematyczne uściślenia. Poszły one drogą najpierw algebraizacji klasycznej teorii prawdopodobieństwa (przemienne algebry von Neumanna), a następnie narzucającego się uogólnienia z pożądanymi zastosowaniami do fizyki kwantowej (nieprzemienne algebry von Neumanna).

Proces raz zapoczątkowany, zaczął przynosić dalsze owoce. Odkrycie wolnej teorii prawdopodobieństwa otworzyło zupełnie nowe możliwości przed probabilistyką. Zwróciło mianowicie uwagę na jej ścisły związek z nowym, bujnie rozwijającym się, działem matematyki — geometrią nieprzemienną. Teoria ta rewolucjonizuje wiele tradycyjnych pojęć matematycznych. Wiele jej modeli to modele silnie nielokalne. Pojęcia lokalne — takie jak pojęcie punktu lub jego otoczenia — są w nich bezsensowne. A to pociąga za sobą dalsze konsekwencje. Jak pisze Connes, „nieprzemienne zbiory charakteryzują się efektywną nierozróżnialnością swoich elementów”[30]. Czy takie zbiory są jeszcze zbiorami w tradycyjnym rozumieniu? Czy pytanie to nie zapowiada nadejścia pocantorowskiej matematyki? Jeśli istotnie taka rewolucja nadchodzi, nieprzemienna teoria prawdopodobieństwa będzie w niej brała czynny udział.

---

[29] Por.: „Rewolucja probabilistyczna”, w: *Rozważania o filozofii prawdziwej*, ss. 216–218.

[30] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, New York 1994, s. 74. Przez efektywną nierozróżnialność należy rozumieć niemożność rozróżnienia elementów zbioru przy pomocy przeliczalnej rodziny ich cech. Taki wniosek Connes otrzymuje przy założeniu, że wszystkie stosowane w rozumowaniu odwzorowania są mierzalne. Odstąpienie od tego założenia oznaczałoby również poważną „patologię”.

Wszystko, co dzieje się w matematyce, prędzej czy później ma swoje echo w fizyce. Zastosowania geometrii nieprzemiennej, wraz z nieprzemienną teorią prawdopodobieństwa, już są sprawą, która się dokonuje. Naturalnym terenem, którego te poszukiwania dotyczą, jest poszukiwanie fundamentalnej teorii fizycznej, która dokonałaby unifikacji fizyki kwantowej i ogólnej teorii względności (tworząc kwantową teorię grawitacji) i syntezy wszystkich czterech podstawowych sił fizycznych: grawitacji, elektromagnetyzmu, słabych i silnych oddziaływań jądrowych. Większość prac dotyczących matematyki nieprzemiennej a skierowanych w stronę fizyki albo wprost nawiązuje do tego programu, albo przygotowuje teoretyczne narzędzia, by się z nim zmierzyć. Jeżeli istotnie okaże się, że poziom podstawowy, tzw. poziom Plancka, podlega nieprzemiennym strukturom matematycznym, to odkrycie jego struktury zaskoczy fizyków nie mniej niż odkrycie mechaniki kwantowej zaskoczyło ich kolegów z pierwszej połowy XX wieku. Dzisiejsze spory o to, czy poziom Plancka jest zasadniczo probabilistyczny, czy też mimo wszystko rządzony jest prawami podobnymi do fizyki klasycznej, może się okazać naiwny jak naiwnymi okazały się dziewiętnastowieczne spory o istnienie lub nieistnienie atomów w porównaniu z dzisiejszymi osiągnięciami fizyki cząstek elementarnych. Jeżeli jakaś wersja nieprzemiennej teorii prawdopodobieństwa obowiązuje na poziomie podstawowym, to przebudowie będą musiały ulec duże obszary siatki pojęć o istotnym znaczeniu dla naszego rozumienia fizyki i świata. Wniosek ten trzeba będzie jeszcze odpowiednio wzmocnić, jeżeli okaże się, że nieprzemienne teorie matematyczne wymuszą na matematyce kolejną rewolucję w jej podstawach. Zmiany w myśleniu matematycznym odbiją się nie tylko w filozofii fizyki, lecz będą mieć również duże filozoficzne znaczenie.

Jednakże na to, by docenić filozoficzne znaczenie uogólnień klasycznej teorii prawdopodobieństwa, nie trzeba czekać aż dokona się rewolucja w podstawach matematyki i fizycy stworzą fundamentalną teorię. Już teraz nieprzemienna teoria prawdopodobieństwa ma coś do powiedzenia filozofom. To mianowicie, że rachunek prawdopodobieństwa należy traktować tak jak wszystkie inne teorie matematyczne. Nie jest to lekcja banalna, gdyż nazbyt często rachunek prawdopodobieństwa (ciągle jeszcze tylko w wydaniu klasycznym) traktuje się jako rodzaj „nadrzędnej ontologii", duże prawdopodobieństwo zajścia jakiegoś zdarzenia traktując jako wystarczającą rację jego zaistnienia. Oczywiście, w obszarze właściwych zastosowań klasycznego rachunku prawdopodobieństwa jest to uzasadnione, ale rozciąganie tej strategii na podstawowy poziom fizyki lub na pewne rozważania o charakterze metafizycznym może nie być uprawnione. Na przykład, istniała koncepcja, że na poziomie podstawowym panuje zupełny chaos, nie ma tam żadnych prawidłowości, a prawa fizyki wyłoniły się z tego chaosu na skutek uśrednień i gry prawdopodobieństw[31]. Koncepcja ta zakładała ogólną ważność praw klasycznego rachunku prawdopodobieństwa, które miałyby spełniać rolę „nadpraw" w stosunku do zwykłych praw fizyki i wyjaśniać ich istnienie. Tego rodzaju absolutyzowanie klasycznego rachunku prawdopodobieństwa już dziś nie jest dozwolone. Dlaczego akurat klasyczny rachunek prawdopodobieństwa, dobrze sprawdzający się w obszarze makroskopowym, miałby być lepszy od swoich uogólnień poza tym obszarem zastosowania i urastać do roli „wyjaśniającej ontologii"?

Inną domeną, na którą rozciąga się „działanie" praw klasycznego rachunku prawdopodobieństwa, nadając mu rangę „ostatecznego wyjaśniania", jest „zbiór wszystkich wszechświatów". Sama ta koncepcja jest mocno dyskusyjna, a sposób wykorzystania w niej rachunku prawdopodobieństwa czyni ją jeszcze bardziej podejrzaną. W spekulacjach dotyczących „wieloświata" często stawia się pytania: Jakie jest prawdopodobieństwo zrealizowania się w którymś z możliwych wszechświatów warunków początkowych takich jak w naszym Wszechświecie? Jaka jest częstość występowania węgla w zbiorze wszechświatów? Jaki jest rozkład prawdopodobieństwa pojawienia się świadomości w wieloświecie? Jakie jest prawdopodobieństwo występowania wszechświatów, w których obficie występują czarne dziury? Itd., itd. Znowu rachunek prawdopodobieństwa odgrywa tu uprzywilejowaną rolę. Jaki ra-

[31] Pisałem o tym w: *Filozofia i Wszechświat*, Universitas, Kraków 2006, ss. 60–63.

chunek prawdopodobieństwa? Jak zdefiniować miarę probabilistyczną na zbirze (czy to jest zbiór?) wszystkich możliwych wszechświatów?[32]

Teorie prawdopodobieństwa — bo jest ich wiele — należy traktować jak wszystkie inne teorie matematyczne. Wszystkie one, razem z innymi teoriami matematycznymi, tworzą imponującą superstrukturę, zadziwiającą w swojej harmonii i architekturze. Nie sądzę, by którakolwiek z tych teorii miała jakieś wyróżnione ontologiczne znaczenie. Natomiast fakt, że struktura Wszechświata pozostaje w tak skutecznej odpowiedniości ze strukturami matematycznymi, winien być przedmiotem głębokiej refleksji filozoficznej.

Tarnów, 8 lutego 2009 r.

SUMMARY

NONCOMMUTATIVE CALCULI OF PROBABILTY

The paper can be regarded as a short and informal introduction to noncommutative calculi of probability. The standard theory of probability is reformulated in the algebraic language. In this form it is readily generalized to that its version which is virtually present in quantum mechanics, and then generalized to the so-called free theory of probability. Noncommutative theory of probability is a pair (M, ϕ) where M is a von Neumann algebra, and ϕ a normal state on M which plays the role of a noncommutative probability measure. In the standard (commutative) theory of probability, there is, in principle, one mathematically interesting probability measure, namely the Lebesgue measure, whereas in the noncommutative theories there are many nonequivalent probability measures. Philosophical implications of this fact are briefly discussed.

[32] O tych problemach pisałem obszerniej w: *Ostateczne wyjaśnienia Wszechświata*, Universitas, Kraków 2008, ss. 141–144.