Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
L (2012), 152–166

Katarzyna Lewandowska
Wydział Filozoficzny, Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie

AKSJOMAT MULTIPLIKATYWNY RUSSELLA

Aksjomat multiplikatywny[1] został podany po raz pierwszy przez Bertranda Russella w 1906 roku. Jego sformułowanie było następujące:

Dla dowolnej niepustej rodziny zbiorów niepustych $\{A_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$ ich iloczyn kartezjański $\prod_{j\in\mathfrak{J}} A_j$ jest zbiorem niepustym[2].

Jest to stwierdzenie równoważne aksjomatowi wyboru Ernsta Zermela z 1904 roku[3]. Jednakże najprawdopodobniej Russell na krótko przed pierwszym sformułowaniem pewnika wyboru miał świadomość istnienia potrzeby jakiejś postaci aksjomatu multiplikatywnego[4]. Świadczy o tym list Russella do Jourdaina z 1906 roku:

> Jeśli chodzi o aksjomat multiplikatywny, do którego doszedłem przez przypadek. Ja i Whitehead uczyniliśmy kolejną rewizję różnych części naszej książki [*Principia Mathematica*]. W trakcie analizy przeprowadzonego przez nas dowodu aksjomatu multiplikatywnego, zauważyłem, że poprzednia propozycja użyta w tym dowodzie ukradkiem zakłada ten aksjomat. To

---

[1] Ang. *Multiplicative axiom*.

[2] Uogólniony iloczyn kartezjański zbiorów definiujemy jako:
$\prod_{j\in\mathfrak{J}} A_j = \{f : \mathfrak{J} \to \bigcup_{j\in\mathfrak{J}} A_j : \quad f(j) \in A_j \ \ \forall_j \in \mathfrak{J}\}$.

[3] Niech $\mathfrak{J} \neq \varnothing$ oraz $\{X_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$ będzie rodziną niepustych zbiorów. Wówczas istnieje odwzorowanie
$\tau : \mathfrak{J} \to \bigcup_{j\in\mathfrak{J}} X_j$ takie, że $\tau(j) \in X_j$ dla dowolnego $j \in \mathfrak{J}$.

[4] W niniejszej pracy będziemy używać zamiennie następujących określeń: aksjomat wyboru, pewnik wyboru, aksjomat Zermela, aksjomat multiplikatywny oraz skrótów MA (ang. *the multiplicative axiom*), AC (ang. *the axiom of choice*).

> stało się w lecie 1904 roku. Na początku myślałem, że prawdopodobnie dowód da sie prosto znaleźć, ale później doszedłem do wniosku, że jeśli w ogóle istnieje dowód, to jest on bardzo ukryty[5].

W niniejszej pracy skupimy się na tle historycznym rozważanego aksjomatu. Zapytamy o genezę pierwszej wypowiedzi aksjomatu multiplikatywnego oraz znaczenie prowadzonych przez Russella badań nad podstawami matematyki w perspektywie dziejów aksjomatu wyboru[6]. Naszym celem będzie uchwycenie różnicy w podejściach Zermela i Russella do wprowadzonych przez nich postulatów.

NIEŚWIADOME UŻYCIE AKSJOMATU WYBORU

Zagłębimy się najpierw w te miejsca w teorii mnogości, które były istotne dla sformułowania aksjomatu wyboru, a zatem także aksjomatu multiplikatywnego. Zwrócimy szczególną uwagę z jednej strony na nieświadome stosowanie przez Russella i Whiteheada pewnika wyboru[7] oraz z drugiej strony na ich świadome używanie aksjomatu multiplikatywnego.

---

[5] List z 15 marca 1906 roku w Grattan Guinness (fragment można znaleźć w G. H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development and Influence*, Springer, Berlin, 1982, s. 122).

As for the multiplicative axiom, I come on it so to speak by chance. Whitehead and I make alternate recensions of the various parts of our book [Principia Mathematica] each correcting the last recension made by the other. In going over one of this recension, which contained proof of the multiplicative axiom, I found that the previous proposition used in the proof had surreptitiously assumed the axiom. This happened in the summer of 1904. At first I thought probably the proof could easily be found, but gradually I saw that, if there is a proof it must be very recondite.

[6] Jeśli rozważymy podaną w przypisie 2 definicję iloczynu kartezjańskiego, zauważamy, że istotnie aksjomat multiplikatywny Russella jest równoważny aksjomatowi wyboru.

[7] Przypomnijmy, że nieświadome użycie aksjomatu wyboru wiązało się przede wszystkim z nieuzasadnionym dokonywaniem nieskończenie wielu wyborów. Należy także podkreślić, że takie nieumyślne stosowanie aksjomatu wyboru było częstym procederem. Dopuścili się tego między innymi późniejsi jego krytycy - Borel, Baire, Lebesgue.

Okazuje się, że zanim pojawiła się jakakolwiek potrzeba wypowiedzenia pewnika wyboru, Russell wykorzystywał go intuicyjnie już wcześniej w badaniach nad podstawami matematyki. Przykłady takich zastosowań można znaleźć w jego artykułach opublikowanych w *Rivista di mathematica* w latach 1901, 1902[8]. Rozważmy poniższe twierdzenie arytmetyki liczb kardynalnych:

TWIERDZENIE 1. *Niech $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ będą rodzinami niepustych, rozłącznych zbiorów i niech $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ będzie bijekcją, taką, że prawdziwa jest implikacja*

$$f(a) = b \Rightarrow \overline{\overline{a}} = \overline{\overline{b}},$$

dla każdego $a \in \mathfrak{A}$ oraz $b \in \mathfrak{B}$. Wówczas

$$\overline{\overline{\bigcup \mathfrak{A}}} = \overline{\overline{\bigcup \mathfrak{B}}}.$$

Aby dowieść powyższego faktu wystarczy wskazać bijekcje między zbiorami a oraz $f(a)$, dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$. Takie odwzorowania istnieją wprost z założeń twierdzenia. Sklejając nieskończenie wiele wybranych w ten sposób bijekcji otrzymujemy bijekcję między zbiorami $\bigcup \mathfrak{A} = \bigcup \mathfrak{B}$. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że w dowodzie nie korzystamy z niczego więcej jak tylko z założeń i podstawowych definicji. Dokładniejsza analiza pokazuje, że w momencie wskazania nieskończenie wielu bijekcji korzystamy z aksjomatu Zermela.

Właśnie w zagadnieniach związanych z licznością zbiorów, szczególnie dotyczących nieskończonych (pozaskończonych) liczb kardynalnych, aksjomat wyboru był stosowany bardzo często. Najpierw używany nieświadomie, z czasem, po zweryfikowaniu teorii mocy, okazał się być warunkiem równoważnym wielu podstawowych twierdzeń tej teorii[9]. Jednym z najważniejszych takich twierdzeń jest prawo trycho-

[8]B. Russell, *Sur la logique des relations*, „Rivista di mathematica”7, 1901, s. 114–148, B. Russell, *Théorie générale des séries bien ordonnées*, „Rivista di mathematica”8, 1902, s. 12–43.

[9]Gruntownym badaniem teorii mocy zajmowali się także wybitni polscy matematycy: Wacław Sierpiński i Alfred Tarski. Podali oni szereg własności liczb kardynalnych równoważnych aksjomatowi wyboru.

tomii liczb kardynalnych, orzekające, że dowolne dwie liczby kardynalne są porównywalne[10].

Jeszcze starszym problemem teoriomnogościowym związanym z aksjomatem wyboru było zagadnienie definiowania nieskończoności. Od 1888 w matematyce funkcjonowały dwie definicje skończoności:
1. klasyczna, mówiąca, że zbiór jest skończony wtedy i tylko wtedy gdy ma on k elementów, przy pewnym $k \in \mathbb{N}$. W przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór jest nieskończony,
2. podana przez Richarda Dedekinda, orzekająca, że zbiór X jest nieskończony (w sensie Dedekina, ozn. D-nieskończony) wtedy i tylko wtedy gdy istnieje Y, właściwy podzbiór X, równoliczny ze zbiorem X[11]. W przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór jest skończony w sensie Dedekinda (D-skończony).

Definicja postawiona przez Dedekinda dawała wygodny, bardzo prosty przepis odróżniania zbiorów skończonych od nieskończonych, który był niezależny od liczb naturalnych i zdawał się być całkowicie zgodny z intuicją oraz oczekiwaniami matematyków wobec własności zbiorów nieskończonych. Szybko stało się oczywistym (między innymi dla Dedekinda), że jego podejście powinno być równoważne klasycznemu. Po podaniu przez Zermela aksjomatu wyboru stało się jasnym, że aby udowodnić równoważność między dwoma definicjami[12] należy założyć możliwość dokonania nieskończonego wyboru. Warto sobie uświadomić, że Russell już na przełomie XIX i XX wieku był przekonany, iż aby udowodnić rozważaną równoważność należy przyjąć jakiś postulat. Sam nawet podał kilkanaście takich twierdzeń. W 1902 roku był nawet przekonany, że udało mu się udowodnić jeden z postulatów potrzebnych do udowodnienia równoważności

[10]Prawo trychotomii liczb kardynalnych zostało sformułowane przez Georga Cantora w 1878. Początkowo twierdzenie to wydawało się być oczywistym faktem. Jednakże z biegiem czasu, gdy zmieniała się, dojrzewała cantorowska koncepcja zbioru, pojawiła się potrzeba bardziej krytycznego spojrzenia na zbyt pochopnie przyjęte prawo.

[11]Mówimy, że dwa zbiory X, Y są równoliczne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja $f : X \to Y$ (odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne na Y).

[12]Dokładniej chodzi o implikację: Każdy zbiór D-skończony jest skończony. Implikacja w drugą stronę jest oczywista.

między D-skończonością i skończonością[13]. Jednakże okazało się, że w dowodzie użył twierdzenia:

TWIERDZENIE 2. *Każdy zbiór nieskończony ma podzbiór przeliczalny.*

które uzasadnia się korzystając z aksjomatu wyboru[14]. Co więcej, podał także następny postulat:

TWIERDZENIE 3. *Każdy nieskończony zbiór jest sumą rodziny zbiorów przeliczalnych.*

będący uogólnieniem twierdzenia 2, zależnym od pewnika wyboru. Dla Russella, właśnie twierdzenie 3, stało się ważnym punktem wyjścia do dalszych rozważań, szczególnie w uzasadnieniu wielu ważnych zależności teoriomnogościowych.

Każdy z wymienionych tutaj przypadków jest w pewnym sensie wyrazem nieświadomości istnienia olbrzymich możliwości dedukcyjnych płynących z przyjęcia dowolnego wyboru, jak również z udowodnionych na podstawie pewnika wyboru twierdzeń. Widać, jak użycie aksjomatu wyboru w uzasadnieniu zasadniczego, choć z drugiej strony niepozornego twierdzenia, dawało szansę na budowanie na przykład arytmetyki liczb kardynalnych zgodnie z intuicyjnymi oczekiwaniami.

Wokół tego tematu rodzi się wiele trudnych pytań. Dlaczego tak wielu matematyków nie zauważyło w prowadzonych przez siebie badaniach zastosowania dowolnego wyboru? Dlaczego dopiero wprowadzenie przez Zermela aksjomatu wyboru, w celu udowodnienia zasady

---

[13] Wymienione tutaj rozważania Russella zostały opublikowane w pracy Whiteheada *On cardinal numbers*, „American Journal of Mathematics”, 1902, s. 367–394.

[14] Dowód tego twierdzenia opiera się na następującym rozumowaniu. Niech A będzie zbiorem nieskończonym. Definiujemy ciąg podzbiorów $\{A\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbioru A o następujących własnościach:

1) $\overline{\overline{A_n}} = n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

2) $A_n \subset A_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Szukanym zbiorem nieprzeliczalnym jest $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Istota tego dowodu nie polega na wykorzystaniu własności zbioru nieskończonego, lecz na dokonaniu wyborów elementów ze zbioru $A\backslash A_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Takich wyborów jest przeliczalnie wiele, a bez przyjęcia aksjomatu wyboru nie mamy żadnej gwarancji, że są one możliwe.

dobrego uporządkowania[15] wywołało ostry sprzeciw wśród wielu matematyków, którzy *notabene* często stosowali go wcześniej? Dlaczego dopiero właśnie po 1904 roku zaczęła rozwijać się paryska szkoła intuicjonizmu i wykrystalizowały się poglądy filozoficzne jej czołowych przedstawicieli: Baire'a, Borela i Lebasgue'a[16]?

To tylko przykładowe wątpliwości jakie spotykamy prowadząc rozważania nad aksjomatem wyboru związanym nieodzownie z aksjomatem multiplikatywnym Russella. Dlatego tak ważnym, z naszej perspektywy, jest poznanie toku rozumowania Russella, który doprowadził go do sformułowania aksjomatu multiplikatywnego. Prześledzimy w tym celu jego rozważania zawarte w *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londyn, 1919. Celowo posłużymy się tak późnym tekstem, gdyż jest on pewnego rodzaju refleksją Russella nad aksjomatem multiplikatywnym, spojrzeniem z szerszej perspektywy, obejmującej między innymi rolę MA w matematyce oraz jego status. Jednocześnie, jak można przypuszczać, jest on także odtworzeniem dociekań z 1904 i 1906 roku, które doprowadziły Russella do podania aksjomatu multiplikatywnego.

[15]Jest to twierdzenie wprowadzone do teorii mnogości przez Georga Cantora w 1883 jako oczywiste prawo logiczne, podstawowe prawo myśli, posiadające wiele doniosłych konsekwencji w teorii mnogości. Orzeka ono, że dowolny zbiór da się dobrze uporządkować, czyli wprowadzić na nim relację spełniającą określone warunki. Jest to szczególne twierdzenie, gdyż z jednej strony jest jednym z wielu twierdzeń równoważnych aksjomatowi wyboru, a z drugiej strony, to właśnie ono stało się dla Zermela bodźcem do sformułowania jego postulatu, który wystarczał, aby je udowodnić. W kontekście naszych rozważań interesujące jest zdanie Russella na temat zasady dobrego uporządkowania zbiorów. Okazuje się, że brytyjski matematyk nie znajdował żadnych argumentów za uznaniem zasady dobrego uporządkowania. Między innymi w *Théorie générale des séries bien ordonnées*, „Rivista di mathematica"8, s. 12–43 oraz w *The Principles of Mathematica*, Cambridge, 1903, pisał, że zbiór (klasa) liczb porządkowych z całą pewnością nie daje się dobrze uporządkować. Podkreślał, że zasada dobrego uporządkowania zbiorów jest bezpodstawna, zwłaszcza w związku z faktem, iż jak na razie nikomu nie udało się ułożyć $2^{\aleph_0}$ elementów w ciąg dobrze uporządkowany. Bardzo silne wątpliwości Russella w stosunku do Cantorowskiej zasady związane były z antynomią Burali-Fortiego największej liczby porządkowej, gdyż właśnie możliwość wprowadzenia w klasie liczb porządkowych dobrego porządku stała się według Russella przyczyną tej antynomii.

[16]Szkoła ta ukształtowała się właściwie na krytyce niekonstruktywnego charakteru aksjomatu wyboru.

SFORMUŁOWANIE AKSJOMATU MULTIPLIKATYWNEGO

Dla lepszego zrozumienia istoty aksjomatu multiplikatywnego Russell wprowadza teorię wyboru oraz definicję iloczynu klas, rozpoczynając od podstawowych definicji operacji w arytmetyce liczb kardynalnych. Idąc za Russellem zaczniemy od najprostszej operacji: dodawania. Załóżmy zatem, że mamy dane liczbę kardynalną μ i klasę α, mocy μ. Jak zdefiniować $\mu + \mu$? Aby to uczynić, musimy mieć 2 klasy równoliczne z μ, które się nie pokrywają. Takie klasy można skonstruować na wiele sposobów. Przykładowo pierwsza klasa to wszystkie możliwe pary uporządkowane, w których pierwszy element to jednoelementowa klasa klasy α, a drugi to zbiór pusty. Natomiast druga klasa, to wszystkie możliwe uporządkowane pary, w których pierwszym elementem jest zbiór pusty, a drugim jednoelementowa klasa klasy α. Takie dwie klasy są rozłączne, suma tych klas jest dokładnie mocy μ+μ. W analogiczny sposób możemy zdefiniować μ+ν, gdzie μ jest mocą pewnej klasy α, a ν klasy β.

Jeżeli zaczniemy rozważać iloczyn nieskończonych klas, to napotykamy na poważne problemy już na poziomie definicyjnym. Przypomnijmy, że dla klasy α, mocy μ oraz klasy β, mocy ν, możemy zdefiniować $\mu \times \nu$ jako liczbę wszystkich możliwych par uporządkowanych, w których pierwszy element należy do klasy α, drugi do β. Tak przyjęta definicja pracuje niezależnie od tego, czy klasy α oraz β są rozłączne oraz gdy μ, ν są nieskończone. Ponadto, możemy rozszerzyć tę definicję na dowolną skończoną ilość liczb kardynalnych.

Problemy pojawiają się, jeśli zechcemy pomnożyć nieskończenie wiele elementów. Załóżmy zatem, że mamy daną klasę nieskończoną κ składającą się z klas, posiadających pewną daną liczbę elementów[17]. Załóżmy ponadto, że wszystkie klasy z κ są parami rozłączne. Klasę μ nazwiemy wyborem lub klasą wybraną (wybierającą)[18], jeśli $\forall_{\alpha\in\kappa}\ \overline{\overline{\mu \cap \alpha}} = 1$. Klasę takich wyborów, *selections*, będziemy nazywać klasą multiplikatywną. Liczbę elementów klasy multiplikatywnej,

[17]Russell w swych rozważaniach powołuje się na Whiteheada i napisany przez niego fragment *Principia Mathematica*, traktujący o tym problemie.

[18]Ang. *selection*.

czyli liczbę wszystkich możliwych wyborów z klasy κ, nazwiemy produktem (iloczynem kartezjańskim) mocy klas z rodziny κ.

Powyższa definicja jest dobrze określona, także dla rodziny, której elementy nie są parami rozłączne. Definiujemy wtedy relację R, relację selektora[19] w klasie κ, która wybiera (równocześnie) z każdej klasy z κ dokładnie jeden element nazywany reprezentatywnym dla tej klasy (względem relacji R). Okazuje się, że takich selektorów może być więcej niż wyborów, jeżeli bowiem jakiś element x należy do dwóch klas α oraz β, to może być wybrany raz jako reprezentant α, raz jako reprezentant β, dając tym samym dwa selektory, ale jeden wybór. Dlatego też, w takim przypadku produkt (iloczyn kartezjański) mocy klas klasy κ będziemy definiować jako liczbę selektorów.

Pozostało do zdefiniowania jeszcze jedno działanie na liczbach kardynalnych: „potęgowanie”[20] μ^{ν}. Niech α będzie klasą mocy μ, a β klasą mocy ν. Niech y będzie pewnym elementem klasy β, konstruujemy nową klasę uporządkowanych par, które na pierwszym miejscu mają elementy klasy α, zaś na drugim y. Takich par będzie dokładnie μ. Wybierając różne elementy z β, otrzymujemy ν klas mocy μ, parami rozłącznych. Definiujemy μ^{ν} jako liczbę selektorów (albo równoważnie - wyborów) z tak powstałej klasy.

Dla zdefiniowanych tutaj działań - mnożenia i potęgowania można udowodnić podstawowe prawa i własności. Nie można „tylko” udowodnić, że produkt klas niepustych, nieskończonych jest zbiorem niepustym. Jeśli klasy są skończone, niepuste - wiemy, że produkt takich klas istnieje i jest zbiorem niepustym. Nie mamy jednakże pewności i nie możemy uzasadnić faktu, iż w klasie klas niepustych, nieskończonych istnieje choćby selektor lub wybór. Russell sam przyznaje, że istnienie produktów wydawało sie być na pierwszy rzut oka rzeczą oczywistą. Jednakże z biegiem czasu fakt ten zaczął budzić w nim coraz więcej wątpliwości. Stał on się założeniem, które niesie ze sobą pewne konsekwencje, a które postrzegamy teraz tak jak piąty aksjomat Euklidesa. Krótko mówiąc, musimy założyć istnienie pewnych obiektów, których istnienia się spodziewamy, oczekujemy.

[19]Ang. *selector*.

[20]Ang. *exponentiation*.

To przypuszczenie to właśnie aksjomat multiplikatywny. Możemy go wypowiadać w różnych formach[21], choć Russell w 1919 roku jako aksjomat multiplikatywny określał następujące stwierdzenie[22]:

Dla dowolnej klasy α rozłącznych klas niepustych, istnieje co najmniej jedna klasa, która ma z każdą klasą z α dokładnie jeden wspólny element[23].

Prowadząc te rozważania brytyjski filozof zdaje sobie sprawę z faktu, że aksjomat multiplikatywny jest równoważny aksjomatowi wyboru wprowadzonemu przez Zermela. Russell wie także, jaką rolę odgrywa AC w matematyce i jak „problematyczny" jest jego status. Podkreśla doniosłość dokonania Zermela, uświadamiając nam, że wprowadzenie tego założenia do matematyki było bardzo ważne, niezależnie od tego czy uważamy je za prawdziwe, akceptujemy, czy też nie. Zwraca także uwagę, że jest ogromna ilość twierdzeń wynikających z aksjomatu wyboru, nie będących mu równoważnymi (przynajmniej w tamtych czasach nie znano takiej zależności). Jako przykłady podaje uznawane jako oczywiste (do tej pory) proste fakty z arytmetyki liczb kardynalnych. Rozważmy sumę ν klas parami rozłącznych, niepustych, μ-elementowych. Wydaje się oczywistym, że moc sumy takich klas będzie równa dokładnie $\mu \times \nu$. O ile dla ν skończonej faktycznie z uzasadnieniem tego faktu nie ma problemu, o tyle dla klasy nieskończonej do dowodu potrzebujemy aksjomatu multiplikatywnego. Russell przypisuje bardzo dużą wagę konsekwencjom płynącym z rozważanego postulatu (i *de facto* aksjomatu wyboru), a zwłaszcza z równości:

$$\aleph_0^2 = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0.$$

---

[21] Russell podaje chociażby, że równoważnikiem aksjomatu multiplikatywnego jest na przykład twierdzenie orzekające, iż produkt klas jest niepusty jeśli przynajmniej jedna z klas jest niepusta.

[22] *This proposition we will call „the multiplicative axiom"*.
B. Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londyn, 1919, s. 123.

[23] Powyższe stwierdzenie to dokładnie jedna z postaci aksjomatu wyboru, podana przez Zermela w 1906 i nazywana dziś aksjomatem Zermela.

Odgrywa ona istotną rolę w teorii pozaskończonych liczb porządkowych. Co więcej, Russell unaocznia nam, że powyższy fakt był znany już wcześniej i uzasadniany. Problem tkwi w tym, że wielu matematyków wywodziło go z oczywistego stwierdzenia orzekającego, iż suma $\aleph_0$ klas o $\aleph_0$ elementach ma moc $\aleph_0$.

Aby lepiej wytłumaczyć, gdzie tkwi problem, Russell podaje pewien przykład. Wyobraźmy sobie milionera, który ma $\aleph_0$ par skarpetek i $\aleph_0$ par butów. Pytanie jest następujące: ile skarpetek i ile butów ma milioner? Wydaje się naturalnym odpowiedzieć - skarpetek i butów ma dokładnie dwa razy tyle co par. Z drugiej strony intuicyjnie zdajemy sobie sprawę z faktu, że liczba $\aleph_0$ nie daje się powiększyć przez przemnożenie przez 2. Nie jest też tak, że zawsze nie jest możliwe „policzenie" elementów takiego zbioru - w przypadku butów mamy metodę porządkowania: najpierw lewe później prawe - mamy konkretny przepis wyboru. Jeżeli chodzi o skarpetki, nie mamy wskazówki jak je układać i policzyć - musimy założyć aksjomat wyboru, aby mieć pewność, że istnieje jakaś klasa składająca się ze skarpetek, z których każda pochodzi z innej pary.

Przedstawiony powyżej problem można sprowadzić do zagadnienia ułożenia w ciąg rosnący wszystkich elementów klasy, co wystarczy do udowodnienia, że ma ona $\aleph_0$ elementów. Z takim zadaniem nie mamy trudności w przypadku butów (bierzemy na zmianę prawy i lewy but z każdej pary), ale w przypadku skarpetek mamy dowolność w wyborze, która z danej pary ma być pierwsza, co uniemożliwia podanie przepisu na dokonanie nieskończenie wiele wyborów. Dopóki nie znajdziemy zasady wyboru nie mamy, według Russella, pewności, nawet teoretycznej, że nieskończona liczba wyborów jest możliwa. Nie mamy tym samym żadnej informacji potwierdzającej, że skarpetek jest dokładnie $\aleph_0$.

Podany tutaj przykład ilustruje istotę aksjomatu multiplikatywnego. Uświadamia nam także, że pomimo odrębnych punktów wyjścia, tok rozumowania Russella i Zermela był bardzo zbliżony[24]. Główna

[24] Aby unaocznić Czytelnikowi podkreślone tutaj podobieństwo przytoczymy pierwsze sformułowanie aksjomatu wyboru umieszczone w E. Zermelo, *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)*,

różnica polega na tym, że Russell nie zdawał sobie sprawy (przynajmniej do 1904 roku)[25], że poprawności przyjmowanych przez niego definicji nie da się udowodnić bez dodatkowego założenia. Sama zmiana podejścia Russella do aksjomatu multiplikatywnego wiązała się z kolejnymi niepowodzeniami w jego uzasadnieniu i narastającym sceptycyzmem co do ważności wprowadzonego założenia. Ponadto, nawet po tej zmianie, Russell nigdy nie traktował swojego aksjomatu jako samooczywistej prawdy, ale tylko jako fundamentalne, niedowodliwe założenie.

REAKCJE RUSSELLA NA AKSJOMAT WYBORU

Pokazaliśmy dotychczas, że Russell zajmował się zagadnieniami, które okazały się być istotnymi dla sformułowania aksjomatu wyboru. Będziemy rozważać krytykę pewnika wyboru podaną przez Russella w kontekście prowadzonych przez niego badań. Naszym głównym punktem odniesienia będzie zasada dobrego uporządkowania. Russell już w 1903 roku wypowiadał się bardzo sceptycznie o możliwości dobrego uporządkowania dowolnego zbioru (zob. przypis nr. 15), przy-

„Mathematische Annalen”59, 1904, s. 514–516:
„Niech M będzie dowolnym niepustym zbiorem mocy $\mathfrak{m}$, którego elementy będą oznaczane m, niech M' będzie podzbiorem zbioru M mocy $\mathfrak{m}'$ ($1 \leq \mathfrak{m}' \leq \mathfrak{m}$), a $M \backslash M'$ podzbiorem komplementarnym do M'. Dwa podzbiory są uważane za różne, gdy jeden z nich zawiera jakiś element, który nie pojawia się w drugim zbiorze. Przez $\mathfrak{M}'$ oznaczmy rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów M' zbioru M. Z każdym elementem $M' \in \mathfrak{M}'$ możemy związać pewien element m', który należy do M' i może być nazwany wyróżnionym elementem M'. Uzyskujemy w ten sposób „pokrycie” rodziny $\mathfrak{M}'$ elementami zbioru M i zbiór takich pokryć jest niepusty (równy produktowi $\Pi\mathfrak{M}'$)”.

[25]Nie wiemy, kiedy dokładnie Russell zaczął postrzegać aksjomat multiplikatywny jako aksjomat. Z cytowanego na początku pracy fragmentu listu do Jourdaina, wynika, jakoby stało się to na krótko przed pierwszą wypowiedzią aksjomatu wyboru przez Zermela. We wstępie do drugiego wydania *The Principles of Mathematics* Russell pisał: „Nie byłem świadomy konieczności jego [aksjomatu wyboru] założenia, aż do roku po pierwszym opublikowaniu *The Principles of Mathematics*. Dlatego ta książka zawiera oczywiste błędy, np. przyjmowane przeze mnie stwierdzenie orzekające, iż klasyczna definicja nieskończoności i D-nieskończoności są równoważne, nie może być udowodnione inaczej, jak tylko przy założeniu tego aksjomatu”.

pominając, że dotychczas nikomu nie udało się ułożyć w ciąg liczb rzeczywistych. Kiedy Russell poznał dowód Zermela, miał dużo wątpliwości co do jego poprawności. Zauważył on bowiem, że wprowadzony przez Zermela aksjomat wyboru implikuje jego „kłopotliwy" aksjomat multiplikatywny. Kluczowym jest fakt, że Russell nie znajdował żadnego argumentu, który miałby przemawiać za prawdziwością aksjomatu wyboru. Wątpliwości związanych z prawdziwością pewnika wyboru Russell nie wyzbył się nigdy. Jeszcze w 1938, we wstępie do drugiego wydania *The principles of Mathematics* pisał:

> Czy on [aksjomat Zermela] jest prawdziwy czy nie, nikt nie wie. Łatwo możemy wyobrazić sobie wszechświat, w którym mógłby on być prawdziwy i nie możemy udowodnić, że istnieje wszechświat, w którym pewnik wyboru byłby fałszywy; ale nie możemy także udowodnić (przynajmniej ja tak sądzę), że nie istnieje żaden wszechświat w którym byłby on fałszywy[26].

Stosunek Russella do aksjomatu wyboru bardzo dobrze opisuje wypowiedź z 1911 roku:

> [Aksjomat Wyboru] może być prawdziwy, ale nie jest on oczywisty, a konsekwencje z niego wynikające są zadziwiające. W takich okolicznościach, uważam, że lepiej go unikać.
>
> ...
>
> Jego pozorna poprawność, prawomocność wraz z dokładniejszą analizą, stopniowo zanika.
>
> ...
>
> W końcu przestaniemy rozumieć, co tak naprawdę on oznacza.
>
> ...
>
> Moim zdaniem, nie ma żadnego powodu, by wierzyć w prawdziwość aksjomatu wyboru[27].

---

[26]*Whether this is true or not, no one knows. It is easy to imagine universes in which it would be true, and it is impossible to prove that there are possible universes in which it would be false; but it is also impossible (at least, so I believe) to prove that there are no possible universes in which it would be false.*
B. Russell, *The Principles of Mathematics*, New York, 1938, Introduction.

[27]B. Russell, *Sur les axiomes de l'infini et du transfini*, „Soc. math. France, Comptes rendues des séances"2, 1911, s. 22-35. Anglojęzyczne tłumaczenie rozważanego fragmentu pochodzi z H. Herrlich, *Axiom of Choice*, Springer-Verlag, 2006, s. 6.

Russell podkreślał, że to, czego dokonał Zermelo jest ważne i bardzo interesujące. Zdawał sobie sprawę, że prostota formy AC niejako przekonuje o jego oczywistości. Jednakże wiedział także, że szersze badania nad pewnikiem wyboru skłaniają do podania jego ważności w wątpliwość, albowiem ogólność aksjomatu Zermela czyniła go silnym narzędziem dowodowym, niosącym często ważne, lecz równocześnie kłopotliwe konsekwencje. Widoczne jest pewnego rodzaju rozdarcie: z jednej strony Russell zdawał sobie sprawę z doniosłości aksjomatu multiplikatywnego w arytmetyce liczb kardynalnych, a z drugiej strony miał świadomość, że logikę, wraz z teorią zbiorów, trzeba okroić, by uniknąć antynomii teoriomnogościowych. Ten fakt zdaje się być sednem krytyki aksjomatu wyboru przez Russella. Gregory Moore podaje w swojej monografii o aksjomacie wyboru, że w lipcu 1905 roku Russell pisał do Couturata wyrażając swoje wątpliwości co do pewnika wyboru:

> Ale na ten moment nie wiem, czy przy przyjęcie tego założonia [aksjomatu wyboru] nie niesie za sobą sprzeczności[28].

Możemy zatem stwierdzić, że podejście Russella do aksjomatu wyboru związane było przede wszystkim z jego programem dla matematyki. Podejrzliwość w stosunku do aksjomatu wyboru, podyktowana niemożliwością jego uzasadnienia i brakiem samooczywistości[29], połączona ze świadomością wagi pewnika wyboru w matematyce, kazała mu badać go dogłębnie. Wierzył (na pewno na początku), że da się znaleźć warunki, przy których aksjomat wyboru mógłby być uprawomocniony. Dopóki się ich nie znajdzie, w obawie przed paradoksalnymi konsekwencjami mogącymi z niego płynąć, należy go unikać, mimo, iż wiąże się to ze zubożeniem matematyki.

---

[28] G. H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice Its Origins, Developments and Influences*, Springer-Verlag, 1982 s. 125.

[29] Musimy mieć świadomość, że Russell postrzegał aksjomaty (przynajmniej w sensie logicznym) jako samooczywiste prawdy.

AKSJOMAT WYBORU A AKSJOMAT MULTIPLIKTYWNY

Obaj, Russell i Whitehead, byli świadomi potrzeby aksjomatu multiplikatywnego na krótko przed sformułowaniem aksjomatu wyboru przez Zermela, choć wyszli z innego punktu niż niemiecki matematyk. Ponadto, w odróżnieniu od Zermela, ani Russell ani Whitehead nie traktowali początkowo aksjomatu multiplikatywnego jako aksjomatu, tylko jako twierdzenie, które należy udowodnić. Zermelo natomiast dobitnie podkreślał, że sformułowany przez niego aksjomat musi być założony, musi być postulowany, jest aksjomatem, samooczywistą prawdą, a nie twierdzeniem, które należy udowodnić. Tu tkwi diametralna różnica obu niezależnych od siebie podejść.

Russell mówiąc o aksjomacie multiplikatywnym - nazywa go:

> postulatem, który może być w języku logiki dobrze określony i jasno sprecyzowany, ale na gruncie logiki nie da się go udowodnić[30]; postulatem, który jest w pewnych działach matematyki założeniem wygodnym, ale nie nieodzownym. Wygodnym, w tym sensie, że wiele ważnych twierdzeń wydających się być naturalnymi daje się udowodnić tylko przy jego pomocy; nieodzownym, w takim znaczeniu, iż pomimo braku tych oczywistych faktów, zasadniczy temat rozważań jest dobrze postawionym problemem i można go rozważać, choć w pewnej okaleczonej formie[31].

Trzeba jeszcze podkreślić, że zasadniczo Russell, kiedy dostrzegł niemożność udowodnienia prawdziwości wprowadzonego przez niego aksjomatu multiplikatywnego, zaczął sceptycznie podchodzić do jego ważności, prawdziwości. Gdzieś na przełomie 1904/1905 roku za-

---

[30]W tym czasie, Russell już wiedział, że MA, wbrew jego wcześniejszym oczekiwaniom, nie da się udowodnić.

[31]*An axiom which can be enunciated, but not proved, in terms of logic, and which is convenient, though not indispensable, in certain portions of mathematics. It is convenient, in the sense that many interesting propositions, which it seems natural to suppose true, cannot be proved without its help; but it is not indispensable, because even without those propositions the subjects in which they occur still exist, though in a somewhat mutilated form.*
B. Russell *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londyn, 1919, s. 117.

czął traktować aksjomat multiplikatywny jako fundamentalne, niedowodliwe założenie, ale nigdy jako samooczywistą prawdę, niepodważalne prawo myśli. Tak naprawdę Russell pozostał ambiwalentny w stosunku do aksjomatu wyboru i swojego aksjomatu multiplikatywnego, mimo iż był świadomy licznych i ważnych faktów teorii liczb kardynalnych zależnych od tych dwóch aksjomatów. Wydaje się, że przyczyną takiego stanu rzeczy było traktowanie przez Russella teorii zbiorów jako części logiki, i podporządkowanie prowadzonych rozważań niesprzeczności całego systemu. Wiedział, że w związku z paradoksami teoriomnogościowymi cała, jako taka, logika będzie musiała być zawężona, obcięta. Dla Russella aksjomat wyboru był zasadą zapewniającą pewien wybór - ale był tylko zasadą, którą należy dokładnie badać i nie należy uzależniać od niej możliwości uprawiania matematyki. Co więcej, podjął on wyzwanie i zajął się aksjomatem wyboru, zdając sobie stopniowo sprawę z faktu, iż matematyka z pewnikiem wyboru jest bardziej interesująca. Russell od początku (gdy tylko zajął się podstawami matematyki) miał bardzo trafne intuicje w stosunku do aksjomatu multiplikatywnego, brakło mu tylko narzędzi, by je uzasadnić i rozwinąć.

SUMMARY

RUSSELL'S MULTIPLICATIVE AXIOM

We present the history of two parallel (and equivalent) discoveries: the axiom of choice and the multiplicative axiom. Firstly, we consider the origins of the formulation of the multiplicative axiom. Next, we concentrate on Russell's attitude towards the role of this axiom, which is closely related to his philosophy of mathematics. We also highlight some differences between Russell's and Zermelo's propositions.